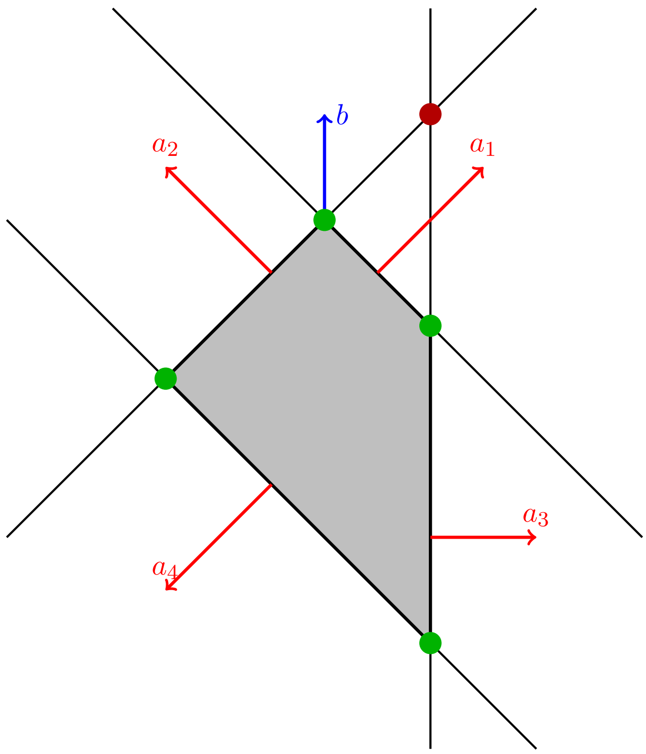
Einführung in die Optimierung

Gennadiy Averkov

IMO | FMA | OvGU Magdeburg

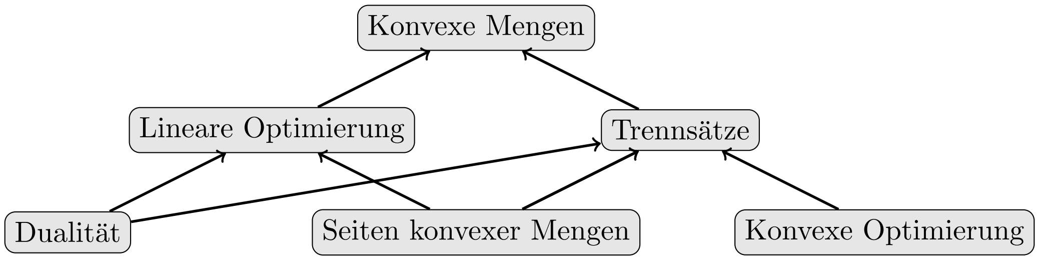
26. Februar 2019



Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Pflichtkurs für den Studiengang Bachelor-Mathematik an der Universität Magdeburg; wird im 3. Semester gehalten; Umfang: 4 V / 2 Ü (9 Leistungspunkte); Wintersemester 15/16. Im folgenden Diagramm wird die Abhängigkeit der Kapitel präsentiert.



1.1 Optimierungsaufgaben

Optimierung ist die Theorie von Optimierungsaufgaben. Wir führen die allgemeine Terminologie der Optimierung eine (basierend auf [Sch86, §2.1].) Für eine nichtleere Menge V und eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq V$ heißen die Rechenaufgaben der Form

$$\inf \{f(x) \,:\, x \in X\} \qquad \text{(MIN)}$$

und

$$\sup \{f(x) \,:\, x \in X\}\,. \qquad \text{(MAX)}$$

Optimierungsaufgaben (*Minimierungsaufgabe* bzw. *Maximierungsaufgabe*). Jede Minimierungsaufgabe kann durch das Ersetzen von f durch $-f$ zu einer Maximierungsaufgabe konvertiert werden (und umgekehrt). Daher ist es immer möglich eine der beiden Formen festzulegen, in diesem Abschnitt wird (MIN) gewählt. Wenn man von einer Rechenaufgabe spricht, bedeutet es dass die Daten zur Aufgabe (in unserem Fall f und X) als endliche Daten gegeben sind, etwa als f als Formel und X als ein System von Ungleichungen oder Gleichungen. Solche Details werden vorerst nicht diskutiert, sie spielen aber bei der Untersuchung der Schwierigkeit von Rechenaufgaben eine wichtige Rolle.

Die Elemente von V heißen *Lösungen*. Die Funktion f in der Aufgabe (MIN) heißt die *Zielfunktion*, Elemente von X heißen *zulässige Lösungen*. Die Elemente von $V \setminus X$ heißen *unzulässig*. Die Menge X heißt die *zulässige Menge*. Wenn die zulässige Menge leer ist, dann heißt das zugrundeliegende Problem *unzulässig* (bzw. *nicht zulässig*). Man beachte den Unterschied zur Terminologie in Algebra, insbl. der linearen Algebra (was man in der Optimierung zulässige Lösung nennt, nennt man in Algebra einfach Lösung).

Für $g : V \to \mathbb{R}$ sagt man, dass die Ungleichung $g(x) \le 0$ *gültig* für X ist, wenn $g(x) \le 0$ für alle $x \in X$ gilt. Meistens ist X durch ein System von Bedingungen definiert. Solche definierende Bedingungen nennt man dann die *Nebenbedingungen* des Optimierungsproblems. Oft hat man Nebenbedingungen in der Form von Gleichungen und Ungleichungen. Die zulässige Menge $X = \{x \in V \,:\, g_1(x) \le 0, \ldots, g_k(x) \le 0\}$ ist z.B. durch k Ungleichungen definiert. Für die Menge X benutzen wir dann auch die Abkürzung $\{g_1 \le 0, \ldots, g_k \le 0\}$.

Der Wert $\inf\{f(x) : x \in X\} \in [-\infty, \infty]$ heißt das *Optimum* (bzw. der *Optimalwert*) von (MIN). Elemente $x^* \in X$ mit $f(x^*) = \inf\{f(x) : x \in X\}$ heißen *optimale Lösungen.* Die Optimierungsaufgabe (MIN) zu *lösen* heißt das Optimum und, gegebenenfalls, mindestens eine optimale Lösung zu bestimmen. Untere bzw. obere Schranken an das Optimum von (MIN) nennt man *untere* bzw. *obere* Schranken für das Optimierungsproblem (MIN). Wenn man weiß, dass im Fall eines endlichen Optimums auch mindestens eine optimale Lösung existiert, so schreibt man oft min und max an der Stelle von inf bzw. sup.

Lineare und konvexe Optimierung bilden Grundlage für viele weitere Optimierungsufgaben. Daher werden wir vor allem diese beiden Arten von Aufgaben diskutieren.

Für eine gegebene Art von Optimierungsaufgaben hat man unterschiedliche Aspekte wie etwa:

Struktur-Theorie: Mathematik ohne algorithmischen Schwerpunkt.

Algorithmen: Laufzeit von Optimierungsverfahren, Konvergenz und Fehlerschätzung numerischer Optimierungsverfahren.

Komplexität: Zuordnung der Entscheidungsversionen der Optimierungsaufgaben zu Klassen P und NP. NP-Schwere und NP-Vollständigkeit. Weitere Komplexitätsklassen, die in der Optimierung von Bedeutung sind.

Anwendungen: Wirtschaft, Technik, Medizin, Ingenieurwesen, Biologie weiteren Anwendungsbereichen (je quantitativer der Anwendungsbereich ist, desto zahlreicher sind die Möglichkeiten, Optimierung zu benutzen).

Software: Entwicklung und Benutzung.

Die letzten beiden Aspekte sind nicht mathematisch.

In Bezug auf diese Aspekte, kann man Kurse unterschiedlich konzipieren: je nach dem, bei welchem Aspekt der Schwerpunkt liegt und, ob die Aspekte mehr oder minder parallel oder in getrennten Teilen des Kurses diskutiert werden. Der Schwerpunkt liegt dieses Kurses liegt bei Strukturen. Wenn man die Strukturen nicht versteht wird man auch nicht in der Lage sein, die Algorithmen anzuwenden. Nehmen wir als Beispiel die Lineare Algebra. Auch wenn man das Gauß-Verfahren kennt, wird man nicht weiter kommen, wenn man nicht entscheiden kann, auf welche Weise man das Gauß-Verfahren in konkreter Situation verwenden kann. Man betrachte zum Beispiel die Aufgaben eine Basis von $\mathrm{lin}(A) \cap \mathrm{lin}(B)$ für zwei gegebene endliche Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ auszurechnen. Klar kann man dafür das Gauß-Verfahren verwenden, aber es eher geht darum, wie man es benutzen kann (und dafür muss man auf jeden Fall die Theorie verstehen).

1.2 Allgemeine Grundlagen, Begriffe und Bezeichnungen

Wie im Modulhandbuch angegeben ist, benutzten wir Kenntnisse aus den Kursen *Lineare Algebra I und II* sowie *Analysis I und II.* Dementsprechend kann man auch bei der Lösung von Aufgaben auf Kenntnisse aus diesen Kursen zugreifen.

Falls irgendwelche Bezeichnungen nicht klar sind, bitte melden! In diesem Kurs wird die Menge der natürlichen Zahlen als

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

(ohne die Null) definiert und die Menge

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Also $\subseteq$ bezeichnen wir die Inklusion und als $\subsetneq$ die strikte Inklusion.

Im gesamten Kurs ist $n \in \mathbb{N}$. Diese Zahl wir in den meisten Fällen die Dimension des Raums $\mathbb{R}^n$ sein, in dem man sich befindet.

Also 0 bezeichnen wir die Zahl 0 aber auch den Nullvektor, etwa im Raum $\mathbb{R}^n$. Wenn es betont werden muss, dass es sich um einen Vektor handelt, so schreiben wir 0_n. Wir bezeichnen als $e_1, \ldots, e_n$ die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ von Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Die Standardnorm des Euklidischen Raums:

D.h., für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ setzt man

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Die Bezeichnung $\|\cdot\|$ reservieren wir in diesem Kurs für allgemeine Normen.

Eine Bezeichnung, die in der Diskreten Mathematik und Informatik ziemlich verbreitet ist: $[k] := \{1, \ldots, k\}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $[0] := \emptyset$. Ansonsten benutzen wir die Bezeichnung $x \le y$ für k-Tupeln $x = (x_1, \ldots, x_k)$ und $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Diese bedeutet, dass $x_i \le y_i$ für alle $i \in [k]$ gilt. Die Bezeichnungen $x \ge y, x < y, x > y$ für Tupeln werden analog eingeführt.

Nun führen wir einige Begriffe und Bezeichnungen ein. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ führen wir Strecken, (relativ) offene Strecken und halboffene Strecken zwischen x und y ein:

$$\begin{aligned}
[x, y] &:= \{(1-\lambda)x + \lambda y \,:\, 0 \le \lambda \le 1\} \\
(x, y) &:= \{(1-\lambda)x + \lambda y \,:\, 0 < \lambda < 1\} \\
[x, y) &:= \{(1-\lambda)x + \lambda y \,:\, 0 \le \lambda < 1\} \\
(x, y] &:= \{(1-\lambda)x + \lambda y \,:\, 0 < \lambda \le 1\}
\end{aligned}$$

Für $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ führen wir Hyperebenen, abgeschlossene Halbräume und offene Halbräume ein.

$$\begin{aligned}
H_{u,\alpha} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle u, x \rangle = \alpha\} \\
H_{u,\alpha}^{\le} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle u, x \rangle \le \alpha\} \\
H_{u,\alpha}^{\ge} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle u, x \rangle \ge \alpha\} \\
H_{u,\alpha}^{<} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle u, x \rangle < \alpha\} \\
H_{u,\alpha}^{>} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle u, x \rangle > \alpha\}
\end{aligned}$$

Der Vektor u heißt eine *Normale* von $H_{u,\alpha}$, *außere Normale* von $H_{u,\alpha}^{\le}$ und $H_{u,\alpha}^{<}$.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ führen wir $\lambda A := \{\alpha a \,:\, a \in A\}$ und $-A := (-1)A$.

Für Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$A + B := \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}$$

die *Minkowski-Summe* bzw. *Vektor-Summe* von A und B. Die Menge $A - B := A + (-B)$ heißt die Minkowski-Differenz bzw. Vektordifferenz von A und B.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ benutzen wir die Bezeichnung $\lambda A = \{\lambda a \,:\, a \in A\}$.

Für $u \in \mathbb{R}^n$ und A heißt $u + A := A + u = \{a + u \,:\, a \in A\}$ die Verschiebung von A um den Vektor u.

Für Punkte $a_1, \ldots, a_k (k \in \mathbb{N})$ und Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ heißt der Punkt $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ die affine Kombination von $a_1, \ldots, a_k$ mit Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Die affine Hülle einer Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ ist als Menge aller affinen Kombinationen der Punkte aus A definiert; Bezeichnung: $\mathrm{aff}(A)$. Insbesondere $\mathrm{aff}(\emptyset) = \emptyset$.

Aufgabe 1.1. *Zeigen Sie Folgendes. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer, so gilt*

$$\mathrm{aff}(A) = a + \mathrm{lin}(A - a)$$

für alle $a \in A$

Eine *affiner Unterraum* ist die leere Menge oder die Verschiebung eines linearen Raums um einen Vektor. $\mathrm{aff}(A)$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Punkte $a_1, \ldots, a_k (k \in \mathbb{N})$ aus $\mathbb{R}^n$ heißen *affin unabhängig*, falls für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ die Folgerung $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ gilt.

Aufgabe 1.2. *Zeigen Sie Folgendes. Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $a_1, \ldots, a_k$ sind affin unabhängig,

(ii) kein Punkt a_i lässt sich als affine Kombination der Restlichen Punkte

$$a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k$$

darstellen.

(iii) die Punkte $(a_1, 1), \ldots, (a_k, 1)$ aus $\mathbb{R}^{n+1}$ sind linear unabhängig.

Wir führen die Bezeichnung für die Standardnorm von $\mathbb{R}^n$ ein: Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ setze

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Wir führe darüber hinaus Bezeichnungen für offene/abgeschlossene Kugeln und die Sphären ein:

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \le 1\}, \\
\mathbb{B}_0^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < 1\}, \\
\mathbb{S}^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| = 1\}, \\
\mathbb{B}^n(c, \rho) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x - c| \le \rho\}, \\
\mathbb{B}_0^n(c, \rho) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x - c| < \rho\}, \\
\mathbb{S}^{n-1}(c, \rho) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x - c| = \rho\}
\end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$ und $\rho > 0$.

Für eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{dist}(A, x) := \inf \{|x - a| \, : \, x \in A\}$$

der Abstand zwischen A und x.

Der Wert

$$\operatorname{diam}(A) := \sup \{|x - y| \, : \, x, y \in A\}$$

heißt der Durchmesser von A.

Wir führen Bezeichnungen $\operatorname{cl}(A)$, $\operatorname{int}(A)$ und $\operatorname{bd}(A)$ für den (topologischen) Abschluss, das Innere bzw. den Rand von A ein.

$\operatorname{relint}(A)$ und $\operatorname{relbd}(A)$ bezeichnen das relative innere und den relativen Rand von A (bzgl. des topologischen Raums $\operatorname{aff}(A)$). Das heißt

$$\begin{aligned}
\operatorname{relint}(A) &:= \{a \in A \, : \, \mathbb{B}^n(a, \rho) \cap \operatorname{aff}(A) \subseteq A \text{ gilt für ein } \rho > 0\} \\
\operatorname{relbd}(A) &:= \operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}(\operatorname{aff}(A) \setminus A).
\end{aligned}$$

Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m (n, m \in \mathbb{N})$ heißt *affin* falls $F(\lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_k a_k) = \lambda_1 F(a_1) + \cdots + \lambda_k F(a_k)$ für alle $a_1, \ldots, a_k (k \in \mathbb{N})$ und alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ gilt.

Aufgabe 1.3. *Zeigen Sie folgendes. Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ ist genau dann affin, wenn F als $F(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ dargestellt werden kann.*

Wir können folgende Klassen von affinen Transformationen unterscheiden.

$F(x) = x + v$	Verscheibung
$F(x) = \lambda x + v$	Homothetische Transformation
$F(x) = Ux + v$	Bewegung; U orthogonale Matrix

Für die Menge A nennen wir $\lambda A + v$ eine homothetische Kopie von A.

Sei H affiner Raum in $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung, die jedem $x \in \mathbb{R}^n$ den eindeutigen nächsten Punkt y von H zuordnet ist affin. Diese Abbildung heißt orthogonale Projektion auf H. Bezeichnung $y = \operatorname{proj}_H(x)$ oder $y = x|H$. Die orthogonale Projektion auf H ist eine affine Abbildung (folgt aus der linearen Algebra).

Aufgabe 1.4. *Berechnen Sie die orthogonalprojektion proj_H auf $H = \operatorname{aff}(a_1, \ldots, a_k)$ für Ihre Auswahl von $n, k \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$. Etwa $n = 2$, $k = 2$, $a_1 = (1, 1)$ und $a_2 = (4, 5)$.*

Die *Dimension* $\dim(A)$ einer nichtleeren Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ wird mit Berücksichtigung der Relation $\operatorname{aff}(A) := a + \operatorname{lin}(A - a)$ für $a \in A$ als $\dim(A) := \dim(\operatorname{lin}(A - a))$ definiert, sodass $\dim(A) = \dim(\operatorname{aff}(A))$ gilt. Wir setzen außerdem $\dim(\emptyset) = -1$.

2 Konvexe Mengen: kombinatorische Grundlagen

2.1 Konvexe Mengen und Kegel

Wir nennen die Ungleichungen bzw. Gleichung der Form $\langle u, x\rangle \leq \beta$ bzw. $\langle u, x\rangle = \beta$ mit $u \in \mathbb{R}^n$ und $\beta \in R$ für Punkte x aus $\mathbb{R}^n$ *lineare Ungleichungen* bzw. *lineare Gleichungen*.

Die Diskussion der Systeme von linearen Gleichungen beginnt im Mathematik-Studium mit der Diskussion der linearen Gleichungen in n Variablen im Kurs "Lineare Algebra". Dieser lineare Fall bildet bekannterweise die Grundlage zur Behandlung allgemeinerer Fälle (das Newton-Verfahren löst z.B. nichtlineare Gleichungen numerisch mit Hilfe der Approximation durch lineare Gleichungssysteme).

In der Optimierung werden zulässige Mengen in der Regel durch Systeme von Gleichungen und Ungleichungen definiert. Genau so wie bei Systemen von Gleichungen, bilden die linearen Systeme von Ungleichungen theoretische Grundlage für komplexere Fälle. Wie wir sehen werden, passt die Diskussion der linearen Systemen von Ungleichungen perfekt in den Kontext der Konvexitätstheorie.

Es soll noch auf den folgenden Unterschied zwischen Gleichungen und Ungleichungen hingewiesen werden. Die Menge der Lösungen eines Systems von linearen Ungleichungen in $n \in \mathbb{N}$ Variablen ist immer ein affiner Unterraum, auch wenn die Anzahl der Ungleichungen im System unendlich ist. Man hat bei Systemen von linearen Ungleichungen einen Unterschied: Lösungsmengen eines endlichen Systems von linearen Ungleichungen in $\mathbb{R}^n$ sind sogenannte Polyeder; Lösungsmengen eines beliebigen (nicht unbedingt endlichen) Systems von linearen Ungleichungen sind allgemeine abgeschlossene konvexe Mengen, darunter findet man zahlreiche interessante Mengen die keine Polyeder sind (Kugel ist eines der vielen Beispiele, die man geben kann). Dementsprechend hat man in der Konvexitätstheorie die endliche und die allgemeine Variante, wobei man die endliche Variante oft Polyedertheorie nennt. Die allgemeine Konvexitäts ist das Fundament der allgemeinen konvexen Optimierung. Polyedertheorie bildet das Fundament für die lineare Optimierung (die man, als endlichen Fall der konvexen Optimierung auffassen kann).

Aufgabe 2.1. *Zeigen Sie Folgendes: Es existiert eine nur von n abhängige Schranke k, so dass jedes (endliche oder unendliche) lineare System in $\mathbb{R}^n$ ein äquivalentes Untersystem aus höchstens k Ungleichungen besitzt.*

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in A$ die Strecke $[x, y]$ Teilmenge von A ist.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvexer Kegel*, wenn A nicht leer und konvex ist und $\lambda a \in A$ für alle $\lambda \geq 0$ und $a \in A$ gilt. Es ist klar, dass A genau dann ein konvexer kegel ist, wenn $\lambda x + \mu y \in A$ für alle $\lambda, \mu \geq 0$ und $x, y \in A$ gilt.

Aufgabe 2.2. *Zeigen Sie Folgendes. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, und F eine affine Transformation auf $\mathbb{R}^n$ (bzw. nach $\mathbb{R}^n$), so ist auch $F(A)$ (bzw. $F^{-1}(A)$) konvex.*

Aufgabe 2.3. *Die Minkowski-Summe von zwei konvexen Mengen ist wieder eine konvexe Menge. Für jede konvexe Menge A und $\lambda, \mu \geq 0$ gilt $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$.*

Aufgabe 2.4. *Zeigen Sie folgendes. Der Würfel $[0, 1]^n$, sowie offene und abgeschlossene Kugeln sind konvex.*

2.2 Konvexe und konische Hülle

Für $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n (k \in \mathbb{N})$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$, heißt $p = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ *nichtnegative* (bzw. *konische*) *Kombination* von $a_1, \ldots, a_k$ mit Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Gilt zusätzlich $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ gilt, so heißt p die *konvexe Kombination* (bzw. *Konvexkombination*) von $a_1, \ldots, a_k$ mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_k$.

Die *konvexe Hülle* $\operatorname{conv}(A)$ einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller konvexen Kombinationen der Punkte aus A. Insbesondere gilt $\operatorname{conv}(\emptyset) = \emptyset$.

Die *konische Hülle* $\operatorname{cone}(A)$ einer nichtleeren Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is die Menge aller konischen Kombination der Punkte aus A. (Warnung: In der Literatur bezeichnet man manchmal $\operatorname{cone}(A)$ als $\operatorname{ccone}(A)$ und redet von konvexer konischen Hülle, und reserviert die Bezeichnung $\operatorname{cone}(A)$ dann für die Menge $\{\lambda a : a \in A, \lambda \geq 0\}$.) Wir definieren die konischen Hülle der leeren Menge nicht.

Konvexe Hülle einer endlichen Menge heißt *Polytop*. Wir benutzen die Schreibweise $\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_k)$ an der Stelle von $\operatorname{conv}(\{a_1, \ldots, a_k\})$.

Ein *Simplex* ist konvexe Hülle einer endlichen Mengen aus affin unabhängigen Punkten $a_1, \ldots, a_k$ in $\mathbb{R}^n$. Die Punkte $a_1, \ldots, a_k$ heißen die Ecken des Simplex. Zum Beispiel ist $\operatorname{conv}(0, e_1, \ldots, e_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein k-dimesionales Simplex in $\mathbb{R}^n$ für jedes $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2.5. *Zeigen Sie Folgendes. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die konvexe Hülle:*

(a) *A ist genau dann konvex wenn $A = \operatorname{conv}(A)$ gilt.*

(b) $\operatorname{conv}(A)$ *ist Durchschnitt aller konvexen Mengen, die A als Teilmengen enthalten.*

(c) $\operatorname{conv}(A + B) = \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B)$.

(d) $\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(A)) = \operatorname{conv}(A)$.

Analog gilt für im Fall von nichtleeren Mengen A und B für die konische Hülle Folgendes:

(a') *A ist genau dann konvexer Kegel wenn $A = \operatorname{cone}(A)$ gilt.*

(b') $\operatorname{cone}(A)$ *ist Durchschnitt aller konvexen Kegel, die A als Teilmengen enthalten.*

(c') $\operatorname{cone}(A + B) = \operatorname{cone}(A) + \operatorname{cone}(B)$.

(d') $\operatorname{cone}(\operatorname{cone}(A)) = \operatorname{cone}(A)$.

2.3 Satz von Carathéodory

Die Theorien der konvexen Menge und konvexen Kegel haben viele Parallelen. Wir diskutieren den Satz von Caratheodry. Hier ist eine Version für konvexe Mengen.

Theorem 2.6 (Satz von Carathéodory für konvexe Mengen)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $x \in \operatorname{conv}(A)$. Dann existieren affin unabhängige Punkte $x_1, \ldots, x_k$ ($k \in \mathbb{N}$) aus A mit*

$$x \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k).$$

Für jedes k wie oben gilt $k \leq n + 1$.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ kleinstmögliche Zahl mit $x \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k)$ für gewisse $x_1, \ldots, x_k \in A$. Wir zeigen, dass in diesem Fall $x_1, \ldots, x_k$ affin unabhängig sind.

Angenommen, $x_1, \ldots, x_k$ wären affin abhängig, d.h., $\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0$ für gewisse μ_i's, die nicht alle gleich Null sind.

Da $x \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k)$ gilt, hat man $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ mit $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$ und $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Da k minimal ist, gilt $\lambda_i > 0$ fúr jedes $i \in [k]$.

Es folgt $x = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - t\mu_i) x_i$.

Da man mindestens ein positives μ_i hat, ist es klar, dass ein $t > 0$ existiert mit $\lambda_j - t\mu_j = 0$ für mindestens ein $j \in [k]$ und $\lambda_i - t\mu_i \geq 0$ für alle $i \in [k]$. Somit haben wir x als konvexe Kombination einer echten Teilmenge von $\{x_1, \ldots, x_k\}$ geschrieben, was der Wahl von k widerspricht. □

Wenn $x_1, \ldots, x_k$ affin unabhängig sind, so heißt das Polytop $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k)$ Simplex (der Dimension $k - 1$). Theorem 2.6 besagt also, dass $\operatorname{conv}(A)$ als Vereinigung von Simplizes mit Ecken in A darstellbar ist. Der Beweis von Theorem 2.6 ist konstruktiv.

Aufgabe 2.7 (Satz von Carathéodory für konvexe Kegel)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere Menge und sei $x \in \operatorname{cone}(A) \setminus \{0\}$. Dann gilt $x \in \operatorname{cone}(x_1, \ldots, x_k)$ für gewisse linear unabhängige Punkte $x_1, \ldots, x_k$ aus A und $k \in \mathbb{N}$.*

Aufgabe 2.8. *Wählen Sie $n, k \in \mathbb{N}$ und Vektoren $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ und versuchen Sie für Ihre konkrete Wahl, wie im Beweis von Theorem 2.6, das arithmetische Mittel $x = \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}$ von Ihren Vektoren als Konvexkombination einer affin unabhängigen Teilmenge von $\{a_1, \ldots, a_k\}$ darzustellen. Sie könnten etwa $k = 5$ und $n = 2$ fixieren.*

2.4 Der Satz von Radon

Der Satz von Radon ist auch an sich interessant wird aber in diesem Kurs eher als ein Hilfsresultat benutzt.

Lemma 2.9 (Der Satz von Radon)**.** *Sei A endliche Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit mindestens $n + 2$ Punkten. Dann kann A als disjunkte Vereinigung von Mengen B und C dargestellt werden, deren konvexen Hüllen sich scheiden (d.h, $\operatorname{conv}(B) \cap \operatorname{conv}(C) \neq \emptyset$).*

Beweis. Sei $m = |A|$ und $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Da $m \geq n + 2$ gilt, sind die Elemente von A affin abhängig. Daher existieren $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich null sind, für die $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 0$ und $\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k = 0$ gilt. ObdA seien $\mu_1, \ldots, \mu_k \geq 0$ und $\mu_{i+1}, \ldots, \mu_m < 0$. Die Summe $\mu_1 + \cdots + \mu_k$ ist strikt positiv. Durch Skalieren von $\mu_1, \ldots, \mu_m$ mit einem positiven Faktor können wir voraussetzen, dass diese Summe gleich 1 ist. Dann gilt $\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k = -\mu_{k+1} a_{k+1} + \cdots - \mu_m a_m$, wobei die linke Seite ein Element aus $\operatorname{conv}(B)$ für $B = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ist und die rechte Seite ein Element von $\operatorname{conv}(C)$ mit $C := \{a_{k+1}, \ldots, a_m\}$ ist. □

TODO: Aufgaben aus Barvinok's Buch zu Radon und/oder konkrete Rechenaufgaben?

2.5 Satz von Helly

Theorem 2.10 (Satz von Helly)**.** *Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen mit $A_{i_1} \cap \ldots A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \ldots, i_{n+1} \in [k]$. Dann gilt $A_1 \cap \ldots \cap A_k \neq \emptyset$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über k. Die Behauptung ist im Fall $k \leq n+1$ trivial, da man $\{i_1, \ldots, i_{n+1}\} = \{1, \ldots, k\}$ wählen kann. Nun sei $k \geq n+2$ und sei die Behauptung für weniger als k konvexe Mengen erfüllt. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass für alle $j \in [k]$ die Bedingung $\bigcap_{i \in [k] \setminus \{j\}} A_i \neq \emptyset$ erfüllt ist. Wir wählen ein $x_j \in \bigcap_{i \in [k] \setminus \{j\}} A_i$. Wenn unter den Punkten $x_1, \ldots, x_k$ zwei Punkte übereinstimmen, etwa $x_1 = x_2$, so hat man $x_1 = x_2 \in A_1 \cap \ldots A_k$. Ansonsten ist $\{x_1, \ldots, x_k\}$ eine Menge aus $k \geq n+2$ Punkten. In diesem Fall kann die Menge nach dem Satz von Radon in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden X und Y zerlegt werden mit $\operatorname{conv}(X) \cap \operatorname{conv}(Y) \neq \emptyset$. OBdA sei $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$ und $Y = \{x_{t+1}, \ldots, x_k\}$. Wir betrachten einen Punkt $p \in \operatorname{conv}(X) \cap \operatorname{conv}(Y)$. Für diesen Punkt gilt $p \in A_i$ für alle $i > t$ wegen $p \in \operatorname{conv}(X)$ und $p \in A_i$ für $i \leq t$ wegen $p \in \operatorname{conv}(Y)$. D.h.. $p \in A_1 \cap \ldots \cap A_k$. □

Aufgabe 2.11 (Satz von Helly für eine Folge von kompakten konvexen Mengen)**.** *Zeigen Sie Folgendes. Sei $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von kompakten konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$ für ale $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \neq \emptyset$.*

Bemerkung 2.12. *Man formuliert die Sätze von Helly oft auch anders (durch Kontraposition): Wenn $A_1 \cap \ldots \cap A_k = \emptyset$ gilt, dann existieren gilt $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} = \emptyset$ für gewisse $i_1, \ldots, i_{n+1} \in [k]$. In der Optimierung kann man $i_1, \ldots, i_{n+1}$ als ein Zertifikat der Unzulässigkeit interpretieren. Wenn man etwa die zulässige Menge einer Optimierungsaufgabe durch Nebenbedingungen $g_1(x) \leq 0, \ldots, g_k(x) \leq 0$ beschrieben hat, bei denen jede Menge $\{x : g_i(x) \leq 0\}$ konvex ist, so kann man die die Frage, ob man mindestens eine zulässige Lösung hat. Wenn man keine zL hat, lässt sich das durch Angabe eines 'kleinen' Untersystems bestätigen, welches bereits keine Lösungen hat.*

TODO: Irgendeine Aufgabe aus Barvinok zu Helly?

2.6 Literaturhinweise

Die ersten Kapitel von Rolf Schneider's Buch [Sch14] (die alte Auflage: [Sch93]).

3 Lineare Optimierung und das Simplex-Verfahren

3.1 Lineare Ungleichungen und lineare Optimierung

Ein *Polyeder* ist als Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume definiert. Somit ist eine Teilmenge P von $\mathbb{R}^n$ ein Polyeder, wenn P die Lösungsmenge eines endlichen System von linearen Ungleichungen vom Typ $\leq$ darstellbar ist, d.h., $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

Bei der Diskussion von linearen Gleichungen und Ungleichungen benutzen wir die folgenden Bezeichnungen. Für eine Matrix $A \in (a_{ij})_{i \in [m], j \in [n]}$ und eine Indexmengen $I \subseteq [m]$ und $J \subseteq [n]$ führen wir die Bezeichnungen für die folgenden Untermatrizen von A ein:

$$A_{I,*} := (a_{ij})_{i \in I, j \in [n]} \in \mathbb{R}^{I \times [n]},$$
$$A_{*,J} := (a_{ij})_{i \in [m], j \in J} \in \mathbb{R}^{[m] \times J}.$$

Für einen Vektor $x = (x_i)_{i \in [n]} \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq [n]$ benutzen wir die Bezeichnung

$$x_I := (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I.$$

Die *Lineare Optimierung* (oder kurz *LP* wie *linear programming*) ist die Aufgabe der Optimierung einer *linearen Zielfunktionen* unter Nebenbedingungen in der Form von endlich vielen nichtstrikten linearen Ungleichungen. Formal heißt es, dass man Problem der Form $\inf \{\langle c, x\rangle : Ax \le b\}$ behandeln möchte, mit $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Allgemeiner können wir natürlich von der Optimierung einer affinen Zielfunktion $\langle c, x\rangle - \alpha$ reden, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, die additive Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ ändert an der Aufgabe kaum etwas.

Lineare Gleichungen können als Nebenbedingungen von einem Linearen Problem auch zugelassen werden, da jede lineare Gleichung durch zwei Ungleichungen darstellbar ist. Geometrisch gesehen ist LP das Optimieren einer linearen Zielfunktion auf einem Polyeder.

Man hat die folgenden Möglichkeiten, ein gegebenes LP umzuformulieren:

- Jede Variable z mit Werten aus $\mathbb{R}$ kann als Differenz $z = z^+ - z^-$ von zwei (neu eingeführten) nichtnegativen Variablen $z^+, z^- \ge 0$ dargestellt werden.
- Eine Nebenbedingung in der Form $\langle a, x\rangle = \beta$ an den Vektor (der Variablen) $x \in \mathbb{R}^n$ kann als zwei lineare Ungleichungen $\langle a, x\rangle \le \beta$ und $\langle a, x\rangle \ge \beta$ dargestellt werden.
- Eine Ungleichung vom Typ $\langle a, x\rangle \le \beta$ kann als die Ungleichung vom Typ $\langle -a, x\rangle \ge -\beta$ dargestellt werden (und umgekehrt)
- Eine lineare Ungleichung $\langle a, x\rangle \le \beta$ kann durch Einführen einer zusätzlichen nichtnegativen Variablen $s \ge 0$ (einer sogenannten *Schlupfvariablen*, engl. *slack variable*) als eine lineare Gleichung $\langle a, x\rangle + s = \beta$ dargestellt werden.
- Das Minimieren von $\langle c, x\rangle$ kann durch das Maximieren von $\langle -c, x\rangle$ ersetzt werden (und umgehkert). Dabei bleibt ein lineares Problem linear.

Als Folgerung erhält man, dass man die Nebenbedingungen eines LPs oBdA in einer der folgenden Formen darstellen kann:

- $Ax \le b$
- $Ax = b, x \ge 0$
- $Ax \le b, x \ge 0$

mit einer passenden Wahl von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $m, n \in \mathbb{N}$.

Darüber hinaus kann man im System $Ax = b$ kann man oBdA voraussetzen, dass der Rang von A gleich m ist (in diesem Fall sagt man, dass A den *vollen Zeilenrang* hat). Hat A nämlich keinen vollen Zeilenrang, so kann man das System

$Ax = b$ durch elementare Transformation (etwa mit Hilfe des Gaußverfahrens) zu einer Form überführen, bei der die linke Seite mancher Gleichungen identisch gleich null ist. Wenn auch die rechte Seite einer solchen Gleichung gleich null ist, so kann die Gleichung weggelassen werden. Ansonsten ist die Gleichung nicht erfüllt, sodass die Lösungsmenge von $Ax = b, x \geq 0$ leer ist und das zugrunde liegende Optimierungsproblem keine zulässigen Lösungen besitzt.

Des Weiteren kann man frei entscheiden, ob man Minimierungsaufgaben oder Maximierungsaufgaben behandeln möchte.

3.2 Lineare Probleme in der Standardform

In diesem Abschnitt behandeln wir ein lineares Problem der Form

$$\inf \{ f(x) \, : \, Ax = b, x \geq 0 \}, \qquad \text{(std-LP)}$$

bei der f, A, b und x folgendermassen definiert sind:

$$A = (a_{ij})_{i \in [m], j \in [n]} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ist die Matrix der rechten Seite des zugrundeliegenden linearen Gleichungssystems, deren Spalten wir als $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen: d.h.,

$$A = \big(a_1 \cdots a_n \big).$$

Die Matrix hat Größe $m \times n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Wie oben erwähnt, setzen wir OBdA voraus, dass A den vollen Zeilenrang hat, d.h.

$$\operatorname{rang}(A) = m.$$

Der Vektor

$$x = (x_i)_{i \in [n]} \in \mathbb{R}^n$$

ist der Vektor von n Variablen des Optimierungsproblems und

$$b = (b_i)_{i \in [m]} \in \mathbb{R}^m$$

ist der Vektor der rechten Seite des linearen Gleichungssystems. f ist eine linearen Zielfunktion der Form

$$f(x) := \langle c, x \rangle,$$

die durch einen Vektor

$$c = (c_i)_{i \in [n]} \in \mathbb{R}^n$$

gegeben ist.

Ein lineares Problem (std-LP) wie oben beschrieben nennen wir ein *lineares Problem in der Standardform.* Im Folgenden werden im Bezug auf (std-LP) die oben eingeführten Bezeichnungen benutzen und die vorigen Eigenschaften (wie der volle Zeilenrang von A) voraussetzen.

3.3 Zulässige Basislösungen

Wir betrachten weiterhin ein beliebiges (std-LP) und wollen dafür ein Verfahren entwickeln, dass dieses Problem in endlich vielen Schritten löst.

Zunächst diskutieren wir die Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$, ohne die Berücksichtigung der Nichtnegativitätsbedingung $x \geq 0$ an x.

Wir nennen eine Lösung

$$x^* = (x_i^*)_{i\in[n]} \in \mathbb{R}^n$$

von $Ax = b$ eine *Basislösung* (kurz: *BL*), falls für die Menge

$$I := \{i \in [n] \, : \, x_i^* \neq 0\}$$

die Spalten a_i von A mit $i \in I$ ein linear unabhängiges System bilden. Wenn die Vektoren $(a_i)_{i\in I}$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$ bilden, so heißt die Basislösung x^* *nicht entartet*.

Eine Basislösung x^* von $Ax = b$, welche für das (std-LP) zulässig ist (d.h., $x^* \geq 0$), nennen wir eine *zulässige Basislösung* von (std-LP), oder kurz *zBL*. Eine zulässige Lösung, die für das System $Ax = b$ eine nichtentartete Basislösung ist, heißt eine *nichtentartete zBL*.

Proposition 3.1. *Besitzt (std-LP) eine zulässige Lösung, dann besitzt es auch eine zulässige Basislösung.*

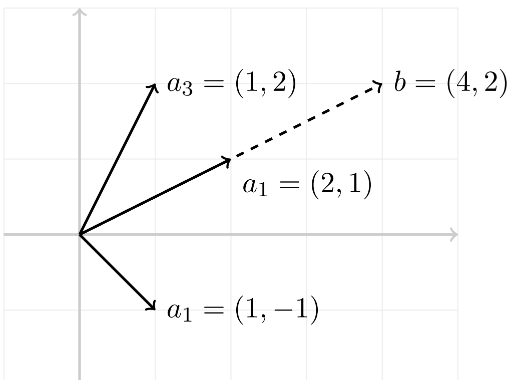
Beweis. Ist $x^* = (x_i^*)_{i\in[n]}$ eine zulässige Lösung, so gilt $a_1x_1^* + \cdots a_nx_n^* = b$ und $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, das heißt, $b \in \operatorname{cone}(a_1, \ldots, a_n)$. Nach dem Satz von Caratheodory für Kegel (vgl. Aufgabe 2.7), ist b konische Kombination von linear Unabhängigen Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Die Koeffizienten der konischen Kombination entsprechen einer zBL. □

Da der Beweis des Satzes von Caratheodory konstruktiv ist, sieht man dass man bei einer vorhandenen zulässigen Lösung von (std-LP) eine zBL von (std-LP) ausrechnen kann.

Beispiel 3.2. *Wir konstruieren für das System $Ax = b, x \geq 0$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

anhand einer vorhandenen zulässigen Lösung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ etliche zBL'en. Wenn wir a_1, a_2, a_3 und b zeichnen, sehen wir die Lösungen sofort:



Am Bild sieht nämlich, dass $b \in \operatorname{cone}(a_1)$ und $b \in \operatorname{cone}(a_1, a_3)$ gilt, für linear Unabhängige Systeme a_1 und (a_1, a_3). Das heißt, das System $Ax = b, x \geq 0$ zwei zBLen.

Wir finden nun diese Lösungen durch das folgende Verfahren. Zuerst lösen wir die homogene Gleichung $Ax = 0$ (etwa mit Hilfe des Gauß-Verfahrens), indem wir $Ax = 0$ zu der Form

$$\begin{pmatrix} \mathit{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathit{1} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

überführen. Somit haben wir

$$\ker(A) := \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

sodass $\begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 1-t \end{pmatrix}$ eine Lösung von $Ax = b$ ist. Wir wählen t so, dass die konstruierte Lösung für $Ax = b, x \geq 0$ zulässig ist und mindestens einer der Einträge gleich 0 ist. Mit $t = -1$ kriegen wir eine Lösung $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Das ist eine nichtartete Basislösung, da das System (a_1, a_3) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Wenn wir $t = 1$ setzen, so kriegen wir die Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das ist eine entartete Basis lösung, da das System (a_2) zwar linear unabhängig ist aber keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

3.4 Darstellung des Problems bzgl. einer Basis und das Simplex-Tableau

Sei $x^* = (x_i^*)_{i \in [n]}$ eine zBL von (std-LP) und sei $I = \{i \in [n] : x_i^* \neq 0\}$. Das linear unabhängige System $(a_i)_{i \in I}$ kann zu einer Basis $\mathcal{B} = (a_i)_{i \in B}$ mit $I \subseteq B \subseteq [n]$ vom Raum $\mathbb{R}^m$ erweitert werden (da der Rang von A gleich m ist, ist die lineare Hülle der Spalten von A gleich $\mathbb{R}^m$, sodass man eine Basis findet). Ist x^* nicht entartet, so gilt natürlich $I = B$. Führen wir noch die Indexmenge $N := [n] \setminus B$. Die Variablen x_i mit $i \in B$ heißen *Basisvariablen* (bzgl. der Basis $\mathcal{B}$), die Variablen x_i mit $i \in N$ heißen *Nichtbasisvariablen.*

Bei einer gegebenen Basis $\mathcal{B}$ bestimmen wir nun eine Darstellung von (std-LP), bei der die Zielfunktion sowie die Nebenbedingung ausschließlich duch x_N dargestellt werden können.

Wir zerlegen x in x_B und x_N und schreiben dem entsprechend das System $Ax = b$ als

$$A_{*,B}\, x_B + A_{*,N}\, x_N = b$$

um. Das Einsetzen von $x = x^*$ ergibt $A_{*,B} x_B^* = b$, sodass man die rechte Seite der Gleichung mit Hilfe von x_B^* darstellen kann. Man erhält

$$A_{*,B} x_B + A_{*,N} x_N = A_{*,B} x_B^*.$$

Da $(a_i)_{i\in B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$ ist, ist die Matrix $A_{*,B}$ invertierbar. Man kann also die vorige Gleichung mit $A_{*,B}^{-1}$ von links multiplizieren kann. Das ergibt

$$x_B + \underbrace{A_{*,B}^{-1} A_{*,N}}_{=:\overline{A}} x_N = x_B^*$$

was man mit Hilfe von $\overline{A}$ als

$$x_B + \overline{A} x_N = x_B^*$$

formulieren. Etwas später werden wir die Komponenten von $\overline{A}$ gebrauchen:

$$\overline{A} = (\overline{a}_{i,j})_{i\in B, j\in N} \in \mathbb{R}^{B\times N}.$$

Wir haben nun eine Beschreibung der Basisvariablen in Nichtbasisvariablen: $x_B = x_B^* - \bar{A} x_N$. Das bedeutet insbesondere, dass wir eine Darstellung der Zielfunktion finden können, die ausschließlich die Nichtbasisvariablen involviert. Unter der Bedingung $Ax = b$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} f(x) = cx &= c_B x_B + c_N x_N \\ &= c_B(x_B^* - \overline{A} x_N) + c_N x_N \\ &= c_B x_B^* + (c_N - c_B \overline{A}) x_N. \end{aligned}$$

Wenn wir nun den Vektor

$$\overline{c} := (\overline{c})_{i\in N} := c_N - c_B \overline{A} \in \mathbb{R}^N$$

einführen, so erhalten wir

$$f(x) = f(x^*) + \overline{c} x_N$$

D.h. (std-LP) kann als das Problem

$$\inf \left\{ f(x^*) + \overline{c} x_N \;:\; x_B + \overline{A} x_N = x_B^*, x \geq 0 \right\} \qquad \text{(std-LP-B)}$$

umformuliert werden. Im Folgenden beziehen wir uns auf bei der Diskussion von Basen und zBL's auf (std-LP-B) und benutzen dabei die Bezeichnungen N, x_B, X_N, $\overline{c}$ und $\overline{A}$.

Bei der Berechnung von Darstellungen wie (std-LP-B) in konkreten Situationen benutzt man ein tabellarisches Format. Unser Zielfunktion hat die Form $f(x) = \langle c, x\rangle$ in (std-LP).

In der Darstellung (std-LP-B) hat man eine additive Konstante $f(x^*)$. Daher ist es sinvoll auch affine Zielfunktionen der Form $\langle c, x\rangle - \alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Das Problem $\inf \{\langle c, x\rangle - \alpha \;:\; Ax = b, x \geq 0\}$ wird tabellarisch folgendermassen dargestellt:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & \dots & x_n & \\ \hline a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \\ \hline c_1 & \dots & c_n & \alpha \end{array}$$

In dieser Tabelle haben wir eine (optionale) Zeile, welche die Namen der Variablen enthält. Dann folgen m Zeilen, die uns die m linearen Gleichungen kodieren. Diese Zeilen/Gleichungen bezeichnen wir als $(1), \ldots, (m)$. Die letzte Zeile enthält die Koeffizienten der Zielfunktion. Die letzte Zeile bezeichnen wir als (z).

Die vorige Tabelle nennen wir ein *Simplex-Tableau*. Das Simplex-Tableau ist lediglich die Kompakte Darstellung

$$\begin{array}{c|c} x & \\ \hline & \\ A & b \\ & \\ \hline \mathrm{c} & \alpha \end{array}$$

der LP-Formulierung

$$\inf \{\langle c, x\rangle - \alpha \,:\, Ax = b, x \geq 0\}.$$

Wenn man für konkrete Daten A, b, c, α die Zielfunktion $\langle c, x\rangle - \alpha$ sowie die Gleichungen $Ax = b$ schreiben würde, so wäre eine solche Darstellung länger als die Tabelle, weil man die Symbolen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sowie die Symbolen der arithmetischen Operationen mehrmals hinschreiben müsste.

Nun kann man bei der Berechnung der Basislösungen elementare Zeilentransformation zu den Gleichungen $(1), \ldots, (m)$ sowie zur Änderung der Darstellung der Zielfunktion mit verwenden:

Bezeichnung	**Beschreibung**
$(i) := (i) + \alpha \cdot (j)$	Addition der mit α multiplizierten j-ten Gleichung zur i-ten Gleichung, mit $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$(i) \leftrightarrow (j)$	Vertauschen der i-ten und j-ten Gleichungen
$(i) := \alpha \cdot (i)$	Skalieren der i-ten Gleichung mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(z) := (z) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot (i)$	Änderung der Darstellung der Zielfunktion mit Hilfe von $(1), \ldots, (m)$

Das Simplex-Tableau bzgl. der Darstellung (std-LP-B) heißt das Simplex-Tableau zur Basis $\mathcal{B}$. Dieses Simplex-Tableau hat die Struktur:

$$\begin{array}{cc|c} x_B & x_N & \\ \hline & & \\ I_m & \overline{A} & x_B^* \\ & & \\ \hline 0_m & \overline{c} & -f(x^*) \end{array}$$

Hier ist I_m die $m \times m$ Einheitsmatrix und 0_m der Nullvektor mit m Komponenten.

Bemerkung 3.3. *Es existiert noch ein weiteres verkürztes Format für das Simplex-Tableau. Das ist ein Format, in dem man I_m und 0_m weglässt. Beim verkürzten Format indexiert man Spalten mit x_N und die Zeilen mit x_B.*

Das verkürzte Format entspricht wahrscheinlich genauer der Weise, wie man das Simplex-Tableau bei den Computerberechnungen speichert. Man müsste tatsächlich I_m und O_m nicht speichert. Es reicht aus, $B, N, \overline{A}, x_B^*$, $\overline{c}$ und $f(x^*)$ zu speichern. Hier ein Beispiel eines Simplex-Tableaus im verkürzten Format:

	x_4	x_5	x_6	
$x_1 =$	-1	0	1	2
$x_2 =$	1	3	0	1
$x_3 =$	-2	0	3	6
	-1	2	1	0

Im Beispiel sind x_1, x_2, x_3 Basis-Variablen und x_4, x_5, x_6 Nichtbasis-Variablen.

3.5 Optimalität einer zBL: eine hinreichende Bedingung

Proposition 3.4. *Sei x^* eine zBL von (std-LP) zu einer Basis $\mathcal{B} = (a_i)_{i \in B}$ und man betrachte die Darstellung (std-LP-B). Dann gilt:*

(a) Wenn $\bar{c} \geq 0$ erfüllt ist, dann ist x^* eine optimale Lösung von (std-LP).

(b) Wenn $\bar{c} > 0$ erfüllt ist, dann ist x^* eine eindeutige optimale Lösung von (std-LP).

Beweis. Die Behauptungen folgen direkt aus den Darstellungen in Abschnitt 3.4. □

Beispiel 3.5. *In Abschnitt 3.3 haben wir ein Beispiel betrachtet (Beispiel 3.2), für das wir zwei zBLen ausgerechnet haben. Wir führen für dieses Beispiel die Zielfunktion f mit*

$$c = (1\ 2\ 3)$$

ein und wollen nun die vorige Proposition zu den beiden zBL'en anwenden. Unser Ausgangstableau hat die Form:

x_1	x_2	x_3	
1	2	1	4
-1	1	2	2
1	2	3	0

Das entspricht noch keiner Basis. Da wir bereits, wissen dass die Basis (a_1, a_3) einer zBL entspicht, überführen wir das vorige Tableau zu dieser Basis.

Zunächst modifizieren wir die Gleichungen so, dass in der ersten und der dritten Spalte die Standardeinheitsvektoren stehen.

x_1	x_2	x_3	
1	1	0	2
0	1	1	2
1	2	3	0

Hieraus kann man ablesen, was die zugrundeliegende BL ist: Die Basis-Variablen setzt man $x_1 = 2$ und $x_3 = 2$ (vgl. die rechten Seiten) und die Nichtbasis-Variable x_2 setzt man $x_2 = 0$. Damit man das Simplex-Tableau zur Basis a_1, a_3 hat, muss man noch die Zielfunktion anders beschreiben, sodass man keine Abhängigkeit von den Basisvariablen hat. Dafür benutzen wir

$$(z) := (z) - (1) - 3 \cdot (2).$$

Man erhält:

x_1	x_2	x_3	
1	1	0	2
0	1	1	2
0	-2	0	-8

Um nochmal darauf einzugehen, wie das Tableu bedeutet, schreiben wir es als explizit als eine lineare Aufgabe um

$$\begin{aligned} \min\{ \quad & 0 \cdot x_1 + (-2) \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - (-8) : \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ & x_1 = 2 - x_2 \\ & x_2 = 2 - x_2 \quad \} \end{aligned}$$

oder mit Matrizen und Vektoren

$$\begin{aligned} \min\{ \quad & 8 + (-2) \cdot x_2 : \\ & x \in \mathbb{R}^3_+ \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In dieser Darstellung ist

$$B = \{1, 3\}, \qquad N = \{2\}, \qquad \overline{c} = -2, \qquad x_N = x_2 \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad x_B^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zu diesem Tableau zur Basis (a_1, a_2) *kann die Proposition nicht verwendet werden, da* $\overline{c}_2 = -2 < 0$ *gilt. Wir werden sehen, dass diese zL nicht optimal ist. Man kann an dem Tableau den Wert der Zielfunktion an der aktuellen Basislösung in der Zelle unten rechts ablesen, das ist das negative von* -8*, also* 8*.*

Wie sieht es mit der anderen Basislösung aus, die wir vorhin ausgerechnet haben? Wir könnten das linear unabhängige System (a_2) *nehmen, dieses System zu einer Basis von* $\mathbb{R}^2$ *erweitern, etwa* (a_1, a_2) *und dann mit der Ausgangstabelle beginnen das Simplex-Tabelle zur Basis* (a_1, a_2) *ausrechnen (völlig analog). Es ist aber weniger aufwändig, die Tabelle zur Basis* (a_1, a_3) *zu einer Tabelle zur Basis* (a_1, a_2) *zu konvertieren. Dafür führen wir in der Basis* (a_1, a_3) *den Vektor* a_3 *aus der Basis raus und führen dafür den Vektor* a_2 *in die Basis hinein. Durch die Operation*

$$(1) := (1) - (2)$$

für das letzte Tableau erhält man:

x_1	x_2	x_3	
1	0	-1	0
0	1	1	2
0	-2	0	-8

Auch in diesem Fall können wir die zBL zur Basis (a_1, a_2) ablesen. Für die Basisvariablen hat man $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und für die Nichtbasisvariable $x_3 = 0$. Damit man aus dem vorigen Tableau ein Tableau zur Basis (a_1, a_2) erhält, passen wir noch die Darstellung der Zielfunktion durch die Operation

$$(z) := (z) + 2 \cdot (2)$$

an:

x_1	x_2	x_3	
1	0	−1	0
0	1	1	2
0	0	2	−4

In diesem Fall ist $\overline{c} > 0$. In unserem kleinen Beispiel besteht $\overline{c}$ aus einer einzigen Komponente. Wir sehen also nach Proposition 3.4, dass die zBL zur Basis (a_1, a_2) eine eindeutige Optimallösung ist. Der Wert der Zielfunktion für diese Lösung ist $-(-4) = 4$. Das ist unser Optimum.

3.6 Unbeschränkter Fall: eine hinreichende Bedingung

Eine Minimierungsaufgabe heißt *unbeschränkt*, falls das Optimum gleich $-\infty$ ist (analog: eine Maximierungsaufgabe ist unbeschränkt, falls das Optimum ∞ ist). Der Fall einer unbeschränkten Minimierungsaufgabe ist eine entartete Situation, die wir anhand (std-LP-B) erkennen wollen.

Falls $\overline{c} \geq 0$ erfüllt ist, so ist die zBL x^* optimal, sodass die Aufgabe nicht unbeschränkt ist. Wir können also voraussetzen, dass $\overline{c}_k < 0$ für ein Index $k \in N$ gilt. In diesem Fall geben wir eine hinreichende Bedingung der Unbeschränktheit.

Proposition 3.6. *Sei x^* eine zBL von (std-LP) zu einer Basis $\mathcal{B} = (a_i)_{i \in B}$ und man betrachte die Darstellung (std-LP-B). Sei $k \in N$ ein Index mit $\overline{c}_k < 0$. Wenn $\overline{a}_{ik} \leq 0$ für alle $i \in B$ erfüllt ist, dann ist die Aufgabe (std-LP) unbeschränkt.*

Beweis. Wir führen einen nichnegativen Parameter $\theta \geq 0$ ein und definieren in Abhängigkeit von θ den Vektor $x' = (x'_i) \in \mathbb{R}^n$. Dafür reicht es x'_N anzugeben. Wir fixieren x'_N durch

$$x'_i = \begin{cases} \theta & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \in N \setminus \{k\}. \end{cases}$$

Mit dieser Wahl gilt für die Komponenten von x'_B die Gleichung $x'_i = x^*_i - \overline{a}_{i,k}\theta$ für alle $i \in B$. Aus den Voraussetzungen folgt, dass der Vektor x' nichtnegativ und somit für (std-LP) zulässig ist. Für die Zielfunktion gilt $f(x') = f(x^*) + c_k\theta$. Da $c_k < 0$ vorausgesetzt ist, gilt $f(x') \to -\infty$, für $\theta \to +\infty$. Das heißt, die Aufgabe ist unbeschränkt. □

Beispiel 3.7. *Betrachten wir das folgende kleine Problem in $\mathbb{R}^2$:*

$$\inf \{-x_1 - x_2 - x_3 \,:\, x_1, x_2, x_3 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6\}$$

mit verschiedenen Wahlen von c. In der Standardform lässt sich das Problem mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = (6)$$

formulieren. Die Spalten $a_1 = (2) \in \mathbb{R}^1, a_2 = (3) \in \mathbb{R}^1$ *und* $a_3 = (-1) \in \mathbb{R}^1$ *sind Basen von* $\mathbb{R}^1$*. Die Basen* a_1 *und* a_2 *entsprechen den zBLen,* a_3 *nicht. Wir betrachten zwei konkrete* c *bzgl. der zBL zur Basis* (a_1)*. Für*

$$c = (1\ 1\ 1)$$

hat man

x_1	x_2	x_3	
1	3/2	−1/2	3
−1	−1	−1	0

Die Darstellung der Zielfunktion wird durch

$$(z) := (z) + (1)$$

angepasst:

x_1	x_2	x_3	
1	3/2	−1/2	3
0	1/2	−3/2	3

Mit Hilfe von Proposition 3.6 sieht man von der dritten Spalte, dass das Problem unbeschränkt ist. Um den Beweis der Proposition 3.6 für diese konkrete Situation zu illustrieren, zeigen wir die entsprechende Überlegung an diesem konkreten Beispiel. Die Zielfunktion ist als $f(x) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_2 - 3$ *dargestellt. Wir haben außerdem* $x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$*. Wenn wir als* $x_2 = 0$ *und* $x_3 = \theta \geq 0$ *setzen, so haben wir*

$$f(x) = -\frac{3}{2}\theta - 3$$

und $x_1 = 3 + \frac{1}{2}\theta$*. Diese Wahl von* x *ist also für jedes* $\theta \geq 0$ *zulässig, und der Wert der Zielfunktion geht gegen* $-\infty$ *für* $\theta \to +\infty$*.*

3.7 Pivoting: Verbesserung einer zBL

Wenn wir nun eine zBL haben, an der weder die Optimalität noch die Unbeschränktheit feststellen können, so kann man versuchen, die zBL durch eine bessere Lösung zu ersetzen:

Proposition 3.8. *Sei* x^* *eine zBL von (std-LP) zu einer Basis* $\mathcal{B} = (a_i)_{i \in B}$ *und man betrachte die Darstellung (std-LP-B). Sei* $k \in N$ *ein Index mit* $\bar{c}_k < 0$ *und sei*

$$I := \{i \in B : \bar{a}_{ik} > 0\} \neq \emptyset.$$

(Bemerkung: diese Voraussetzung ist sinnvoll, da wir im Fall $I =$ *die Unbeschränktheit haben, die wir bereits im vorigen Abschnitt behandelt haben.) Man betrachte für* $\theta \geq 0$ *die Lösung* $x' = (x'_i)_{i \in [n]}$ *des Systems* $Ax = b$*, mit der folgenden Wahl von* x'_N

$$x'_i = \begin{cases} \theta, & i = k, \\ 0, & i \in N \setminus \{k\}, \end{cases}$$

sodass dementsprechend für x'_B *die Gleichungen*

$$x'_i = x^*_i - \bar{a}_{ik}\theta \qquad \forall i \in B$$

gelten. Dann gilt:

(a) Die Lösung x' ist für (std-LP) genau dann zulässig wenn $\theta \le x_i^*/\overline{a}_{ik}$ für alle $i \in I$ gilt.

(b) Für die Zielfunktion f gilt $f(x') < f(x^*)$ (d.h., x' ist eine bessere Lösung als x^*), wenn $\theta > 0$ erfüllt ist.

(c) Ist $\theta = \min\{x_i^*/\overline{a}_{ik} : i \in I\}$ und $\ell \in I$ ein Index mit $x_\ell^*/\overline{a}_{ik} = \theta$, so ist x' eine zBL zur Basis $(a_i)_{i \in B \setminus \{\ell\} \cup \{k\}}$.

Beweis. (a): wir müssen $x' \ge 0$ charakterisieren. Man hat $x'_N \ge 0$ nach der Konstruktion und man sieht sofort, dass $x'_{B \setminus I} \ge 0$. D.h. es geht nur darum zu verifizieren, ob $x'_I \ge 0$ erfüllt ist. Diese Bedingung (in einer etwas umformulierten Form) hat man in der Äquivalenz stehen.

(b): $f(x') = f(x^*) + \overline{c}_k \theta$ und wegen $\overline{c}_k < 0$ hat man die Behauptung.

(c): Aus (a) folgt, dass x' zulässig ist. Man soll nun verifizieren, ob die Lösung eine BL ist. Bei der Konstruktion von x' aus x^* haben wir die Variablen $i \in N \setminus \{k\}$ nicht verändert, und nach der Wahl von θ gilt $x'_\ell = 0$. Das ergibt

$$N \setminus \{k\} \cup \{\ell\} \subseteq \left\{ i \in [n] : x'_i = 0 \right\}.$$

Das ist äquivalent zu

$$\left\{ i \in [n] : x'_i \ne 0 \right\} \subseteq B \setminus \{\ell\} \cup \{k\}.$$

Es reicht also zu verifizieren, dass die Spalten a_i mit $i \in B \setminus \{\ell\} \cup \{k\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$ bilden. Die Matrix $\overline{A}$ war als

$$\overline{A} = A_{*,B}^{-1} A_{*,N}$$

definiert. Es gilt also

$$A_{*,N} = A_{*,B} \overline{A}.$$

Wenn wir diese Gleichung spaltenweise bzgl. $A_{*,B}$ und $A_{*,N}$ ausschreiben, so erhalten wir

$$a_j = \sum_{i \in B} a_i \overline{a}_{ij} \qquad \forall j \in N.$$

Insbesondere ist die Spalte a_k Linearkombination der Spalten a_i mit $i \in B$:

$$a_k = \sum_{i \in B} a_i \overline{a}_{ik}.$$

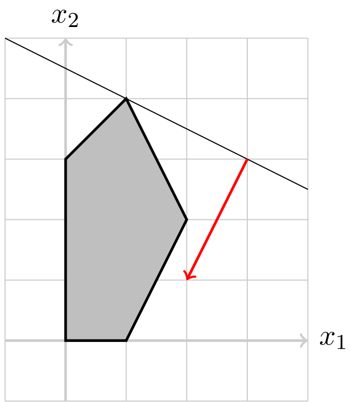
Hierbei ist der Koeffizient $\overline{a}_{\ell k}$ ungleich Null. Nun folgt aus der linearen Algebra, dass das System, das aus $(a_i)_{i \in B}$ durch das Weglassen von a_ℓ und Hinzufügen von a_k entsteht, wieder eine Basis von $\mathbb{R}^m$ ist. □

Die Konvertierung von einer Basis $(a_i)_{i \in B}$ zu einer neuen Basis $(a_i)_{i \in B \setminus \{\ell\} \cup \{k\}}$ mit der Wahl von k und ℓ wie Proposition 3.8(c) nennt man *Pivoting*. Dies ist ein Grundschritt der sogenannten *Simplex-Methoden*.

Beispiel 3.9. *Wir betrachten das lineare Problem*

$$\begin{aligned}\inf\{-x_1 - 2x_2 \ :& \\ x_1, x_2 \geq 0,& \\ x_2 \geq -2 + 2x_1,& \\ x_2 \leq 3 + x_1,& \\ 2x_1 + x_2 \leq 6\}&\end{aligned}$$

Hier die Skizze der zulässigen Menge.

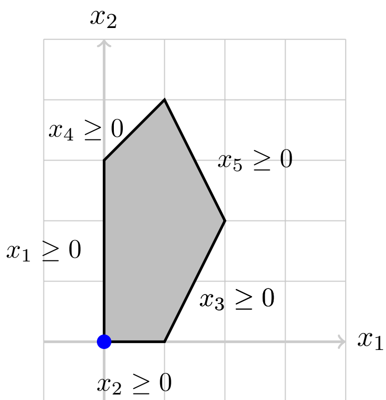


An der Skizze sehen wir gleich, welche Lösung optimal ist. Wir wollen diese Lösung mit der Simplex-Methode bestimmen. Wir führen drei Schlupfvariablen $x_3, x_4, x_5 \geq 0$ *ein und erhalten dadurch ein Problem in der Standardform mit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Basis (a_3, a_4, a_5) *entspricht einer zBL, die wir nun benutzen können um die Simplex-Methode zu starten. Wir schreiben das Simplex-Tableau zur Basis* $\mathcal{B}$ *hin:*

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	−1	1	0	0	2
−1	1	0	1	0	3
2	1	0	0	1	6
−1	−2	0	0	0	0



Wir sehen, dass wir nun die Spalte a_2 *oder* a_1 *in die Basis einführen können. Nun muss man sich entscheiden, welche Spalte in die Basis aufgenommen werden kann. Wir entscheiden uns für* a_2 *(Sie können auch gerne nachschauen, was passiert, wenn Sie sich für* a_1 *entscheiden und wieviele Pivoting-Schritte man in diesem*

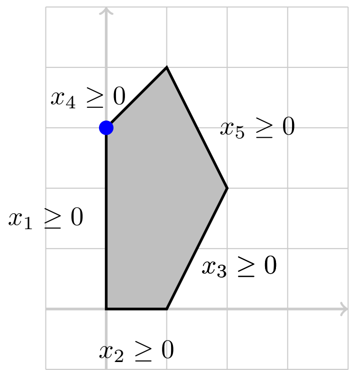
Fall machen wird). Es gibt hier zwei Optionen: In der Matrix des Gleichungsystem stehen zwei positive Einträge, die den Basisvariablen x_4 und x_5 entsprechen. Die Entscheidung, welche in die Basis aufgenommen wird erfolgt durch den Vergleich von $3/1$ und $6/1$. Wir illustrieren kurz was dahinter steckt. Wir setzen $x_1 = 0$ und wollen x_2 so weit es geht vergrößern. Dann ist $x_4 = 3 - x_2 \geq 0$ und $x_5 = 6 - x_2 \geq 0$. Wir wollen also, dass $x_2 \leq 3$ und $x_2 \leq 6$ gelten. Das größtmögliche x_2, bei dem das geht ist $x_2 = 3$. Somit wird bei der nächsten zBL x_2 positiv und $x_4 = 3 - x_2 = 0$ (d.h., a_2 kommt in die Basis, und a_4 verlässt die Basis).

Da $3/1$ kleiner als $6/1$ ist müssen wir die Spalte a_4 aus der Basis ausführen: Die Durchführung der Operationen

$$(1) := (1) + (2)$$
$$(3) := (3) - (2)$$

ergibt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	1	1	0	5
-1	1	0	1	0	3
3	0	0	-1	1	3
-1	-2	0	0	0	0



Nun schreiben wir die Zielfunktion so um, dass diese ausschließlich von den neuen Nichtbasis-Variablen x_1, x_4 abhängig ist. Dafür verwenden wir die Operation

$$(z) := (z) + 2(2).$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	1	1	0	5
-1	1	0	1	0	3
3	0	0	-1	1	3
-3	0	0	2	0	6

Wir sehen, dass die neue zBL zur basis (a_2, a_3, a_5) besser ist, auf dieser hat unser Zielfunktion den Wert -6. Wir sehen aber, dass wir den Wert noch weiter verkleinern können: und zwar wollen wir nun a_1 in die Basis einführen. Wiederum berechnen wir die Verhältnisse (in diesem Fall $3/3$ und $5/1$) und stellen fest, dass wir a_5 aus der Basis ausführen sollen. Wir führen die Operation

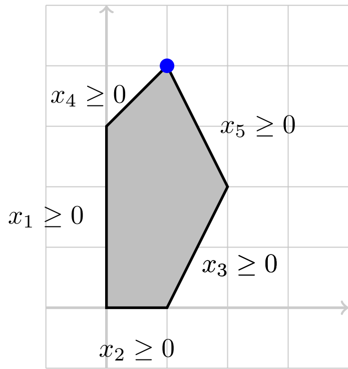
$$(3) := \frac{1}{3}(3)$$

durch und anschließend die Operationen

$$(2) := (2) + (3)$$
$$(1) := (1) - (3).$$

So erhalten wir das Tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	1	4/3	−1/3	4
0	1	0	2/3	1/3	4
1	0	0	−1/3	1/3	1
−3	0	0	2	0	6



Wir wollen nun die Zielfunktion ausschließlich in x_4 und x_5 schreiben. Das geht durch die Transformation

$$(z) := (z) + 3(3)$$

Man erhält:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	1	4/3	−1/3	4
0	1	0	2/3	1/3	4
1	0	0	−1/3	1/3	1
0	0	0	1	1	9

Da die Koeffizienten vor x_4 und x_5 in der Darstellung der Zielfunktion strikt positiv sind, folgt nun, dass die aktuelle zBL mit $x_4 = 0, x_5 = 0$ und $x_1 = 1, x_2 = 4$ und $x_3 = 4$ eine eindeutige Optimallösung ist.

Bemerkung 3.10 (Übersicht der LP-software)**.** *Die folgende bekannte Software verfügt über LP-solver:*

SCIP (ZIB)	*frei*	*Linux*
octave	*frei*	*Linux/Windows*
CPLEX	*kommerziell*	*Linux (Windows?)*
Gurobi	*kommerziell*	*Linux (Windows?)*
Matlab	*kommerziell*	*Linux/Windows*

Etablierte kommerzielle Software. CPLEX und Gurobi (nicht nur LP), Matlab hat ebenfalls LP.

Da man recht unterschiedliche Formate für Instanzen verschiedener Optimierungsaufgabe erstellte, benutzt man heutzutage oft die algebraische Modellierungssprachen (Algebraische Modelierungssprachen, *oder kurz* AML*) zum Erstellen von Optimierungsaufgaben. Hier zwei Beispiele solcher Sprachen.*

ZIMPL (ZIB)	*frei*	*Linux*
AMPL	*kommerziell*	*Linux (Windows?)*
JuMP (Teil von Julia)	*??*	*??*

Hier ein Beispiel (aus `https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/part_dgl/teaching/WS2009_Grundlagen_der_Optimierung/amplguide.pdf`) eines AMPL-Modells, anhand dessen man für eine gewisse Nebenbedingungen drei Zielfunktionen mit Hilfe von cplex maximieren soll:

Consider the following example. Berkeley Paint Company makes two colors of paint, blue and gold. The blue paint sells for \$ 10 per gallon, while the gold paint sells for \$ 15 per gallon. The company has one factory, and can make only one color of paint at a time. However, blue paint is easier to make so the factory can make 40 gallons per hour of blue paint, but only 30 gallons per hour of gold paint. In addition, the marketing department tells manufacturing that they can sell at most 860 gallons of gold paint and 1000 gallons of blue paint. If a week is 40 hours and paint can't be stored until next week, we need to determine how many gallons of blue and gold paint to make; so that the total revenue is maximized.

```
## Example One
var PaintB;  # amount of blue
var PaintG;  # amount of gold
maximize profit: 10*PaintB + 15*PaintG;
subject to time: (1/40)*PaintB + (1/30)*PaintG <=  40;
subject to blue_limit: 0 <= PaintB <= 1000;
subject to gold_limit: 0 <= PaintG <= 860;
```

Pakete für Modellierung und Lösung in Programmiersprachen:

PuLP	*Python*
ompr	*R*

Bemerkung 3.11 (Lösung der LP-Probleme mit Octave). *Wir lösen das Problem aus Beispiel 3.9 mit Octave (Version 4.2). Wir benutzen also die Variablen $x \in \mathbb{R}^5$ mit $x \geq 0$ und formulieren das Problem als*

$$\min \{\langle c, x\rangle \, : \, x \geq 0, Ax = b\}$$

Die folgenden Befehler führen c, A und b ein:

```
c = [-1 -2 0 0]
A = [2 -1 1 0 0;-1 1 0 1 0 ;2 1 0 0 1]
b = [2;3;6]
```

Hier ist c eine Zeile, A eine 3×5 Matrix und b eine Spalte. Nun können wir die Funktion glpk *benutzen, vgl.*

https://www.gnu.org/software/octave/doc/v4.2.0/Linear-Programming.html

um das Problem zu lösen. Wir führen den Befehl

```
[xopt,optval] = glpk(c,A,b)
```

aus und erhalten eine optimale Lösung `xopt` *und den optimalen Wert -9 als* `optval`.

LPs in einer allgemeinen Form können mit Hilfe weiterer optionalen Parameter von `glpk` *eingegeben und gelöst werden.*

In Matlab hat man die Funktion `linprog`*, die das gleiche machen kann, allerdings das Interface von* `linprog` *etwas anders.*

Als Mathe-Studierende werden Sie sich höchstwahrscheinlich mit Octave/Matlab im 4. Semester in Numerik beschäftigen. Ansonsten werden Octave und Matlab oft in der nichtlinearen Optimierung benutzt (unter anderem auch im Wahlpflichtkurs 'Nichtlineare Optimierung').

Bemerkung 3.12 (Beispiel in python mit pulp und in Sagemath mit ppl-Solver). *Hhier ein Beispiel in Python 2 mit Packet pulp*

```
from pulp import *

prob=LpProblem("Beispiel 3.9 aus EMO",LpMinimize)
x1=LpVariable("x1",0,None) # nichnegative Variable
x2=LpVariable("x2",0,None) # nichtnegative Variable
# Kommentare unten zur Zielfunktion und den nebenbedingungen sind optional
prob += -x1-2*x2, "Ziel"
prob += x2 >= -2 + 2*x1, "Bedingung 1"
prob += x2 <= 3 + x1, "Bedingung 2"
prob += 2*x1 + x2 <= 6 , "Bedingung 3"
prob.solve()

for v in prob.variables():
print v.name,"=", v.varValue
```

Hier ein Beispiel in sagemath mit ppl-solver (Lösung des Diät-Problems)

```
prob = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False,solver='ppl')
v=prob.new_variable(real=True,nonnegative=True)
h,m,b=v['h'],v['m'],v['b']
prob.set_objective(1.8*h+2.3*m+0.05*b)
prob.add_constraint(107*h+500*m>=5000)
prob.add_constraint(65*h+120*m+65*b>=2000)
print prob.solve()
hopt,mopt,bopt=prob.get_values(h,m,b)
print hopt,mopt,bopt
```

Für kurze Berechnungen können sagemath, octave, python und weitere Sprachen auch online unter `sagecell.sagemath.org` *benutzt werden.*

3.8 Entartete Lösungen und Anticycling-Regeln

Wenn die zBL x^* nicht entartet ist, so ist das θ wie in der Behauptung (c) der vorigen Proposition strikt positiv. In diesem Fall gilt $f(x') < f(x^*)$. Wenn keine zBL von (std-LP) entartet ist, so sehen wir also, dass man durch die Verwendung von endlich vielen Pivoting-Schritte (std-LP) löst (von einer Startlösung zu einer gegebenen Basis ausgehend).

Aufgabe 3.13. *Zeigen Sie, dass jedes (std-LP) durch eine beliebig kleine Änderung von b zu einem Problem überführen kann, bei alle zBL'en nicht entartet sind.*

Beispiel 3.14. *Betrachteten wir das Polyeder*

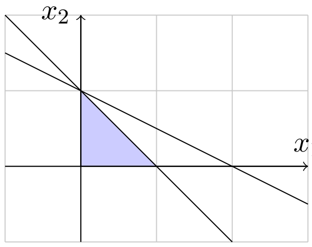
$$P = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + x_2 \le 1, x_1 + 2x_2 \le 2, x_1, x_2 \ge 0\big\}$$

in $\mathbb{R}^2$*. Das Polyeder* P *ist ein Dreieck mit Ecken* $(0, 0), (1, 0)$ *und* $(0, 1)$*. Das könnte man auch mit drei Ungleichungen* $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1+x_2 \le 1$ *beschreiben beschreiben. Die Ungleichung* $x_1 + 2x_2 \le 2$ *ist redundant. Diese Ungleichung wird an der Ecke*

$(0,1)$ des Dreiecks mit Gleichheit erfüllt. Wir können P die redundante Beschreibung von P durch die Einführung von drei Schlupfvariablen x_3, x_4 in das System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b} \qquad x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R}_+$$

Die Ecke $(0,1)$ wird dabei in die zBL x^* mit $x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 0, x_4^* = 0$ überführt. Da die Ecke $(0,1)$ die redundante Ungleichung mit Gleichheit erfüllt hat , ist die zBL x^* entartet. Dass, die x^* eine entartete zBL Lösung ist, kann man natürlich auch direkt aus der Definition sehen.



Beispiel 3.15. *Betrachten wir noch ein weiteres Polyeder, diesmal in der Dimension 3. Sei P Polyeder, das folgendermaßen durch eine Ungleichungbeschreibung gegeben ist.*

$$P = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1, x_3 - x_1 - x_2 \leq 0\right\}.$$

Das ist eine Pyramide mit der Spitze $(0,0,0)$ und einem Quadrat als Grundfläche. Bei einer generischen Beschreibung eines n-dimensionalen Polyeders würde ein Punkt von P höchstens n Ungleichungen mit Gleichheit erfüllen. Hier erfüllt die Spitze der 3-dimensionalen Pyramide P 4 Ungleichungen mit Gleichheit (im Gegenteil zum vorigen Beispiel ist keiner der Ungleichungen aus der Beschreibung von P redundant). Die Beschreibung von P kann durch Einführung von zwei Schlupfvariablen x_5, x_6 in das System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} \qquad x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}_+$$

in der Standardform überführt werden. Die Spitze $(0,0,0)$ der Pyramide P entspricht dabei der entarteten zBL x^* mit $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* 1, x_5^* = 0$ des Systems in der Standardform.

Im Fall von entarteten BL'en kann die Situation auftreten, bei der man zwar die Basis verändert hat, die zugrundeliegende Basislösung aber gleich geblieben ist, d.h., $x^* = x'$. Insbesondere ist bei einer willkürlichen Wahl der Indizes k und ℓ nicht ausgeschlossen, dass man durch Wiederholung der Pivoting-Schritte zu einer Basis zurückkehrt, die bereits betrachtet wurde. Um solche Situationen auszuschließen und auch für allgemeine (std-LP) endliche Lösungsverfahren zu haben, hat man etliche Regeln zur Wahl von k und ℓ erfunden, bei denen die Rückkehr zu einer bereits betrachteten Basis nicht möglich ist und (std-LP) auch in entarteten Fällen nach endlich vielen Pivoting-Schritten gelöst wird. Wir diskutieren eine solche Regel, die sogenannte *Bland-Regel.*

Theorem 3.16. *Man betrachte das Simplex-Verfahren mit der folgenden Umsetzung des Pivoting-Schritts (wobei bei der Beschreibung der Umsetzung Bezeichnungen aus der Proposition 3.7 verwendet werden): Beim Austausch von a_ℓ gegen a_k in der aktuellen Basis, werden k und ℓ wie folgt gewählt:*

1. *Unter allen Indizes $k \in N$ mit $\overline{c}_k < 0$ wird der kleinste Index gewählt.*
2. *Unter allen Indizes $\ell \in I$ mit $x_\ell^*/\overline{a}_{\ell k} = \min\{x_i^*/\overline{a}_{ik} \,:\, i \in I\}$ wird der kleinste Index gewählt.*

Das Simplex-Verfahren mit dem oben Beschriebenen Pivoting-Schritt löst jede lineare Optimierungsaufgabe in der Standardform (std-LP) von einer Startbasis zu einer zBL ausgehend in endlich vielen Pivoting-Schritten.

Beweisskizze. Angenommen, das Verfahren terminiert nicht. Man bezeichne durch $B(t) \subseteq [n]$ die Indexmenge B, die im Pivoting-Schritt Nummer $t \in \mathbb{N}$ berechnet wurde. Da man nur endlich viele solche Indexmengen hat, enthält die Folge $B(1), B(2), B(3), \ldots$ manche der Teilmenge von $[n]$ unendlich oft. OBdA setzen wir voraus, dass die Menge $B(1)$ in der Folge $B(1), B(2), B(3), \ldots$ unendlich oft auftritt. Daraus folgt, dass man beim Pivoting in keiner der Pivotingschritte den Wert der Zielfunktion verbessert hat. Somit definieren alle Indexmengen $B(1), B(2), B(3), \ldots$ die selbe zBL, die wir als x^* bezeichnen. Wir betrachten nun für jedes $t \in \mathbb{N}$ die Darstellung (std-LP-B) für $B = B(t)$:

$$\inf\left\{f(x^*) + \overline{c}(t)x_{N(t)} \,:\, x_{B(t)} + \overline{A}(t)x_{N(t)} = x^*_{B(t)},\ x \geq 0\right\},$$

mit $N(t) = [n] \setminus B(t)$, $\overline{c}(t) \in \mathbb{R}^{N(t)}$ und $\overline{A}(t)$. Die Lösung x^* und somit die additive Konstante $f(x^*)$ sind von t unabhängig. Daher können wir oBdA voraussetzen, dass $f(x^*) = 0$ gilt. Wenn für $t \in \mathbb{N}$ die Gleichung $B(t+1) = B(t) \setminus \{\ell\} \cup \{k\}$ gilt, so sagen wir, dass im Schritt t der Index ℓ die Menge B betritt und der Index ℓ die Menge B verlässt. Jede Menge $B(t)$ tritt in der Folge $B(1), B(2), B(3), \ldots$ unendlich oft auf. Das bedeutet, dass jeder Index der in eine Iteration die Menge B betritt, muss auch in einer anderen Iteration die Menge B verlassen (und umgekehrt). Kein Index i mit $x_i^* > 0$ verlässt die Menge B, da sich sonst der Wert der Zielfunktion an der aktuellen zBL verbessern würde. Das bedeutet, jedes $i \in [n]$ mit $x_i^* > 0$ gehört zu $B(t)$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Wir entfernen in unserer Folge von äquivalenten Optimierungsproblemen alle Gleichungen, deren, rechte Seite x_i^* strikt positiv ist. So erhalten wir eine neue Folge von äquivalenten Optimierungsproblemen. Anschließend setzen wir die Variablen $j \in N(1) \cap N(2) \cap \ldots$ gleich 0. So ensteht eine neue Folge von äquivalenten Optimierungsaufgaben der Form

$$\inf\left\{\overline{c}(t)x_{N(t)} \,:\, x_{B(t)} + \overline{A}(t)x_{N(t)} = 0,\ x \geq 0\right\},$$

wobei nun jeder Index i in einer Iteration die Menge B verlässt.

Wir betrachten den Schritt, in dem der Index n die Menge B betritt und bezeichnen die Menge B in diesem Schritt als B'. Wir betrachten außerdem den Schritt, in dem der Index n die Menge B verlässt und ein anderer Index p die Menge B betritt und bezeichnen die Menge B in diesem Schritt als B''. Wir betrachten die zugehörigen Optimierungsaufgaben:

$$\inf\left\{\overline{c}' x_{N'} \,:\, x_{B'} + \overline{A}' x_{N'} = 0,\ x \geq 0\right\},$$
$$\inf\left\{\overline{c}'' x_{N''} \,:\, x_{B''} + \overline{A}'' x_{N''} = 0,\ x \geq 0\right\}.$$

Wir betrachten nun die Lösung $y = (y_i)_{\in[n]}$ von $x_{B''} + \overline{A}'' x_{N''} = 0$ mit

$$y_i = \begin{cases} 1 & i = p, \\ 0 & i \in N'' \setminus \{p\}, \\ -\overline{a}''_{ip} & i \in B''. \end{cases}$$

(Man beachte, dass die Lösung y nicht zulässig sein muss).

Es gilt $\overline{c}'' y_{N''} = \overline{c}''_p \cdot 1 < 0$. Hier nutzen wir die Ungleichung $\overline{c}''_p < 0$ für die p-te Komponente von $\overline{c}''$, die erfüllt ist, da der Index p die aktuelle Menge B betritt. Wegen der Äquivalenz der Umformungen der Zielfunktionen und der Gleichungssysteme gilt $\overline{c}'' y = \overline{c}' y$. Für $\overline{c}' y$ hat man

$$\overline{c}' y = \sum_{j \in N'} \overline{c}'_j y_j. \tag{1}$$

Da der Index n die Menge $B = B'$ betritt, gilt nach dem Teil 1 der Pivoting-Regel:

$$\overline{c}'_1, \ldots, \overline{c}'_{n-1} \geq 0,\ \overline{c}'_n < 0.$$

Da der Index n die Menge $B = B''$ verlässt, gilt nach dem Teil 2 der Pivoting-Regel $-\overline{a}''_{ip} \geq 0$ für alle $i \in B'' \setminus \{n\}$ und $-\overline{a}''_{np} < 0$. Es folgt, als dass die Summanden in (1) nicht negativ sind, das heißt
$oc' y \geq 0$. Wir erhalten als den Widerspruch $0 \leq \overline{c}' y = \overline{c}'' y < 0$. □

Die Pivoting-Regel aus dem vorigen Theorem heißt die *Bland-Regel*. Man hat auch viele andere Pivoting-Regel (lexikographische Regel), die man verwenden kann.

Bemerkung 3.17. *Theorem 3.16 ergibt, dass man in (std-LP)* min *an der Stelle von* inf *schreiben kann, da man im Fall eines endlichen Optimums auch immer eine optimale Lösung findet.*

3.9 Bestimmung einer Startlösung

Um eine Simplex-Methode starten zu können brauchen wir eine Startbasis, die einer zBL entspricht. Wir präsentieren hier eine Möglichkeit eine solche Startbasis zu generieren.

Wir können wir in (std-LP) oBdA $b \geq 0$ annehmen (wenn $b_i < 0$ gilt, so kann die i-te Gleichung mit -1 multipliziert werden). Wenn wir für $Ax = b$ keine zL kennen, können wir einen Vektor $z = (z_i)_{i\in[m]} \in \mathbb{R}^m_+$ mit Hilfsvariablen einführen und das System $Ax + z = b, x \geq 0, y \geq 0$ betrachten. Für dieses System mit Matrix (AI_m) ist $x = 0, z = b$ eine zBL (da die Spalten von I_m eine Basis von $\mathbb{R}^m$ bilden).

Es ist nicht schwer zu sehen, dass für $Ax = b, x \geq 0$ genau zLen exstieren, wenn

$$\min \{z_1 + \cdots + z_m \ : \ Ax + z = b, x \geq 0, z \geq 0\} = 0$$

gilt. Wenn wir also die vorige Hilfsaufgabe mit der Simplex-Methode Lösen, so verifizieren wir, bo das Ursprüngliche System $Ax = b, x \geq 0$ eine zLen hat. Ist das der Fall, so erhalten wir als optimale Lösung der Hilfsaufgabe eine zBL (x^*, z^*) mit $z^* = 0$. Somit ist x^* eine zBL von $Ax = b, x \geq 0$. Wir können also x^* als Startlösung für LPs mit den Nebenbedingungen $Ax = b, x \geq 0$ verwenden.

Rechentechnisch geht man folgendermaßen vor:

- Ein Simplextableau für das Hilfsproblem aufstellen und das Simplex-Verfahren ausführen.
- Ist das Optimum des Hilfsproblems strikt positiv, so weiß man dass das ursprüngliche Problem keine zLen besitzt (das heißt, das Optimum des ursprünglichen Problems ist $+\infty$).
- Ansonsten kann man das Simplex-Tableau zur Optimalenlösung des Hilfsproblems wiederverwenden: Man ersetzt die (Zeile der) Zielfunktion durch die (Zeile der) Zielfunktion für das ursprüngliche Problem und entfernt die Spalten der z-Variablen. Auf dem so entstandenen Tableau kann nun das Simplex-Verfahren ausgeführt werden.

Aufgabe 3.18. *Man betrachte das System $Ax = b, x \geq 0$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifizeren Sie mit Hilfe des Simplexverfahrens in den Fallen $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, ob das System eine zulässige Lösung besitzt. Lösen Sie in den beiden Fällen die Optimierungsaufgabe $\inf \{\langle c, x\rangle \ : \ Ax = b, x \geq 0\}$ *mit $c = (1\ 2\ 3\ 4)$.*

3.10 Bemerkungen

Die Die Herleitung des Simplex-Verfahren, die hier präsentiert wurde, ist recht klassisch, die findet man unter anderem in [PS98, Gro04]. Der Beweis der Terminierung des Simplex-Algorithmus mit der Bland-Regel basiert auf [PS98].

4 Trennung konvexer Mengen

4.1 Metrische Projektion und ihre Eigenschaften

Aufgabe 4.1. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge. Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ existiert ein eindeutiger Punkt $p \in A$ mit $|p - x| = \operatorname{dist}(A, x)$.*

Der Punkt p aus der vorigen Aufgabe wird als $p(A, x)$ bezeichnet.

Theorem 4.2. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge. Für die oben eingeführte Abbildung $p(A, \cdot\,) : \mathbb{R}^n \to A$ gilt:*

(a) Ist für $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus A$ die Bedingung $y = p(A,x) + \lambda(x - p(A,x))$ mit $\lambda > 0$ erfüllt, so gilt $p(A,x) = p(A,y)$.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|p(A,x) - p(A,y)| \le |x - y|$. Insbesondere ist $p(A, \cdot)$ eine stetige Abbildung.

(c) Ist A beschränkt, so gilt $\{p(A,x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus A\} = \mathrm{bd}(A)$.

Beweis. (a): Wir können $\lambda \neq 1$ voraussetzen, da ansonsten $x = y$ gilt und die Behauptung trivial ist. Angenommen, man hätte $p(A,x) \neq p(A,y)$. Im Fall $\lambda < 1$, ist y strikt näher zu $p(A,x)$ als x. Aus der Dreiecksungleichung folgt $|x - p(A,y)| \le |x - y| + |y - p(A,y)|$. Da der Punkt $p(A,y)$ der eindeutige nächste Punkt zu y in der Menge A ist, gilt $|y - p(A,y)| < |y - p(A,x)|$. Wir erhalten also $|x - p(A,y)| \le |y - x| + |y - p(A,y)| < |y - x| + |y - p(A,x)|$. Der Punkt y ist auf der Strecke zwischen x und $p(A,x)$. Das ergibt $|y - x| + |y - p(A,x)| = |x - p(A,x)|$. Wir haben also $|x - p(A,y)| < |x - p(A,x|$ hergeleitet, was der Wahl von $p(A,x)$ widerspricht.

Im Fall $\lambda > 1$ bemerken wir zunächst, dass $p(A,y)$ nicht auf der Verbindungsgeraden von x und $p(A,x)$ liegt. Es existiert also ein eindeutiger Punkt q im relativen Inneren von $[p(A,x), p(A,y)]$ mit der Eigenschaft, dass das Segment $[x,q]$ parallel zu $[y, p(A,y)]$ ist. Aus der Konvexität von A folgt, $q \in A$. Wir betrachten die homothetischen Dreicke $\mathrm{conv}(p(A,x), q, x)$ und $\mathrm{conv}(p(A,x), p(A,y), y)$. Es gilt

$$\frac{|x - q|}{|x - p(A,x)|} = \frac{|y - p(A,y)|}{|y - p(A,x)|}.$$

Das linke Verhältnis ist strikt größer als 1 nach der Definition von $p(A,x)$. Somit ist auch das rechte Verhältnis strikt größer als 1, was aber der Wahl von $p(A,y)$ widerspricht.

(b): Man betrachte

$$v := p(A,x) - p(A,y).$$

Sei $v \neq 0$ (ansonsten ist die Behauptung trivial). Nun zeigen wir

$$\langle x - p(A,x), v \rangle \ge 0.$$

Angenommen, man hätte $\langle x - p(A,x), v \rangle < 0$. Dann treffen sich der Strahl aus $p(A,x)$ in Richtung $x - p(A,x)$ und die Hyperebene durch $p(A,y)$ orthogonal zu v in einem Punkt. Mit anderen Worten: Man betrachte einen Punkt der Form $z = p(A,x) + \lambda(x - p(A,x))$ mit $\lambda \ge 0$. Wir fixieren $\lambda \ge 0$ mit $\langle z, v \rangle = \langle p(A,y), v \rangle$ (das geht, da wir $\langle x - p(A,x), v \rangle < 0$ haben und $\langle p(A,y), v \rangle \le \langle p(A,x), v \rangle$ aus der Def. von v folgt).

Wegen (a) gilt $p(A,z) = p(A,x)$. Es folgt $|z - p(A,z)| = |z - p(A,x)| = |(z - p(A,y)) - v|$, wobei nach der Wahl von z die Vektoren $z - p(A,y)$ und v orthogonal sind. Es folgt $|z - p(A,z)| = \sqrt{|z - p(A,y)|^2 + |v|^2} > |z - p(A,y)|$. Die Ungleichung $|z - p(A,z)| > |z - p(A,y)|$ widerspricht der Definition von $p(A,z)$.

Also gilt $\langle x - p(A,x), v \rangle \ge 0$ und analog (durch den Vertausch der Rollen von x und y) gilt auch $\langle y - p(A,y), v \rangle \le 0$. Was man nun geometrisch hat ist das Folgende. Das Segment $[x,y]$ trifft die Hyperebenen durch $p(A,x)$ und $p(A,y)$ die orthogonal zu $v := p(A,x) - p(A,y)$ sind in Punkten, die weiter voneinander liegen, als $p(A,x)$ von $p(A,y)$. Das kann man natürlich auch analytisch zeigen. Im Wesentlich geht es hier um die Projektion auf die Verbindungsgerade von $p(A,x)$ und $p(A,y)$. Mit Cauch-Schwarz und der vorigen Ungleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}|x-y|\cdot|v| &\geq \langle x-y,v\rangle \\ &= \underbrace{\langle x-p(A,x),v\rangle}_{\geq 0}+\underbrace{\langle p(A,x)-p(A,y),v\rangle}_{=|v|^2}+\underbrace{\langle p(A,y)-y,v\rangle}_{\geq 0} \\ &\geq |v|^2,\end{aligned}$$

woraus dann die gewünschte Ungleichung $|x-y|\geq|v|$ folgt.

(c): Man betrachte eine offene Kugel B, die A enthält und sei S der Rand dieser Kugel (S ist eine Sphäre). Es ist klar, dass $p(A,S)=\{p(A,x):x\in S\}\subseteq \mathrm{bd}(A)$ gilt. Denn jeder Punkt $p(A,x)$ ist in A und muss im Rand von A sein, da die inneren Punkte von A keine nächsten Punkte zu den Punkten außerhalb von A sein können. Wir zeigen nun $\mathrm{bd}(A)\subseteq p(A,S)$. Sei $x\in\mathrm{bd}(A)$ beliebig. Wir wählen für jedes $i\in\mathbb{N}$ ein $x_i\in B\setminus A$ mit $|x-x_i|<\frac{1}{i}$. Wegen (b) gilt

$$|x-p(A,x_i)|=|p(A,x)-p(A,x_i)|\leq|x-x_i|<\frac{1}{i}.$$

Für jedes i existiert ein $\lambda_i\geq 0$, sodass der Punkt $y_i:=p(A,x_i)+\lambda_i(x-p(A,x_i))$ in S liegt. Nach (a) gilt $p(A,y_i)=p(A,x_i)$. Das heißt $|x-p(A,y_i)|<\frac{1}{i}$. Da die Menge S kompakt ist, besitzt die Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Sei $y\in S$ der Grenzwert einer solchen konvergente Teilfolge. Wegen (b) folgt nun aus $|x-p(A,y_i)|<\frac{1}{i}$ die Ungleichung $|x-p(A,y)|\leq 0$. Das heißt $p(A,y)=x$. □

Die Abbildung $p(A,\cdot\,)$ aus dem vorigen Theorem heißt die *metrische Projektion* auf A. Die Abbildung verallgemeinert die orthogonale Projektion. Die Behauptung (a) zeigt, dass die Urbilder der metrischen Projektion aus einem einzigen Punkt oder aus einem Strahl bestehen.

Ich denke, (c) gilt auch für unbeschränkte A (wir zeigen das erstmal aber nur im beschränkten Fall).

4.2 Topologische Hilfsaussagen

Aufgabe 4.3. *Sei A konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sei $x\in\mathrm{int}(A)$ und $y\in\mathrm{cl}(A)$. Dann gilt $[x,y)\subseteq\mathrm{int}(A)$.*

Aufgabe 4.4. *Sei A konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann sind die Mengen $\mathrm{relint}(A)$ und $\mathrm{cl}(A)$ konvex und es gilt*

(a) $\mathrm{relint}(A)=\mathrm{relint}(\mathrm{cl}(A))$.

(b) $\mathrm{cl}(A)=\mathrm{cl}(\mathrm{relint}(A))$.

(c) $\mathrm{relbd}(A)=\mathrm{relbd}(\mathrm{cl}(A))=\mathrm{relbd}(\mathrm{relint}(A))$.

4.3 Stützhyperebenen

Sei A Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $x\in A$. Eine *Stützhyperebene* H von A an x ist eine Hyperebene mit $x\in H$, die als $H=H_{u,\beta}$ mit $u\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ und $\beta\in\mathbb{R}$ dargestellt werden kann, sodass die Bedingung $A\subseteq H^{\leq}_{u,\beta}$ erfüllt ist. In diesem Fall sagen wir, dass H eine Stützhyperebene für A im Punkt x ist und dass der Vektor u ein äußerer Normalenvektor im Punkt x der Menge A ist. Der Halbraum $H^{\leq}_{u,\beta}$ heißt *Stützhalbraum* der Menge A im Punkt x.

Lemma 4.5. *Sei A eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge, $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ und*

$$v := x - p(A, x).$$

Dann ist

$$\{y \in \mathbb{R}^n \, : \, \langle y, v \rangle = \langle p(A, x), v \rangle\}$$

eine Stützhyperebene von A im Punkt $p(A, x)$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für alle $y \in A$ die Ungleichung $\langle y, v \rangle \leq \langle p(A, x), v \rangle$ gilt. Wir betrachten ein beliebiges $y \in A$. Für ein $\epsilon \in (0, 1)$ betrachten wir den Punkt $p(A, x) + \epsilon(y - p(A, x)) \in A$. Wegen der Definition von $p(A, x)$ gilt

$$\begin{aligned}
|v|^2 = |x - p(A, x)|^2 &\leq |x - ((1 - \varepsilon)p(A, x) + \varepsilon y)|^2 \\
&= |x - p(A, x) + \epsilon(p(A, x) - y)|^2 \\
&= |v + \epsilon(p(A, x) - y)|^2 \\
&= |v|^2 + 2\epsilon \langle v, p(A, x) - y \rangle + \epsilon^2 |p(A, x) - y|^2.
\end{aligned}$$

Nun subtrahieren wir $|v|^2$ von der linken und der rechten Seite der Ungleichung und dividieren anschließend durch 2ϵ. Man erhält

$$0 \leq \langle v, p(A, x) - y \rangle + \frac{1}{2}\epsilon \, |p(A, x) - y|^2.$$

Da $\epsilon \in (0, 1)$ beliebig ist, folgt durch $\epsilon \downarrow 0$ die Ungleichung $0 \leq \langle v, p(A, x) - y \rangle$, d.h., man erhält $\langle v, y \rangle \leq \langle v, p(A, x) \rangle$. □

Theorem 4.6. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene konvexe Menge. Dann gilt:*

(a) Jeder Randpunkt von A ist in einer Stützhyperebene von A enthalten.

(b) Ist A kompakt, so existiert für jeden Vektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Randpunkt von A mit dem äußeren Normalenvektor u.

Beweis. (a): Ist A beschränkt, so kann nach Theorem 4.1(c) jeder Randpunkt von A als $p(A, x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ dargestellt werden. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 4.5. Angenommen, A ist unbeschränkt. Sei $a \in \mathrm{bd}(A)$. Wir betrachten die beschränkte abgeschlossene konvexe Menge $A \cap \mathbb{B}^d(a, 1)$. Der Randpunkt a von $A \cap \mathbb{B}^d(a, 1)$ besitzt eine Stützhyperebene $H_{u,\beta}$ mit $\langle u, x \rangle \leq \langle u, a \rangle = \beta$ für alle $x \in A \cap \mathbb{B}^d(a, 1)$. Wir zeigen nun, dass $H_{u,\beta}$ auch eien Stützhyperebene für die gesamte Menge A ist. Sei $x \in A$ beliebig. Dann existiert ein $\epsilon \in (0, 1)$ mit $(1 - \epsilon)a + \epsilon x \in \mathbb{B}^d(a, 1)$. Der Punkt $(1 - \epsilon)a + \epsilon x$ gehört zu A. Somit gilt $\langle u, (1 - \epsilon)a + \epsilon x \rangle \leq \langle u, a \rangle$. Wir ziehen von der linken und der rechten Seite der Ungleichung den Wert $\langle u, a \rangle$ ab und klammer anschließend ϵ aus. Wir erhalten somit $\epsilon(- \langle u, a \rangle + \langle u, x \rangle) \leq 0$. Division durch ϵ ergibt $\langle u, x \rangle \leq \langle u, a \rangle$.

(b): Sei A beschränkt. Dann existiert ein $a \in A$ mit $\langle u, a \rangle = \sup \{\langle x, u \rangle \, : \, x \in A\}$. Nach der Konstruktion ist u ein äußerer Normalenvektor von A am Punkt a. □

4.4 Trennung einer konvexen Menge und eines Punkts

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $H_{u,\beta} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene. Wir sagen, dass A und B durch $H_{u,\beta}$ *getrennt* werden, wenn $A \subseteq H^{\leq}_{u,\beta}$ und $B \subseteq H^{\geq}_{u,\beta}$ gilt (oder umgekehrt: $A \subseteq H^{\geq}_{u,\beta}$ und $B \subseteq H^{\leq}_{u,\beta}$). Man spricht von einer *echten Trennung*, wenn A oder B nicht in $H_{u,\beta}$ liegt. Man spricht von einer *strikten Trennung*, wenn $A \subseteq H^{<}_{u,\beta}$ und $B \subseteq H^{>}_{u,\beta}$ gilt (oder umgekehrt). Man spricht von einer starken Trennung, wenn $A \subseteq H^{\leq}_{u,\beta-\epsilon}$ und $B \subseteq H^{\geq}_{u,\beta+\epsilon}$ gilt (oder umgekehrt) mit $\epsilon > 0$. Man hat

$$\text{stark} \quad \Longrightarrow \quad \text{strikt} \quad \Longrightarrow \quad \text{echt}$$

Die Trennung eines Punktes x und einer Menge A ist als Trennung von $\{x\}$ und A definiert.

Aufgabe 4.7. *Zeigen Sie, dass konvexe Mengen A und B existiert die*

(a) eine strikte Trennungshyperebene besitzen aber keine starke.

(b) eine echte Trennungshyperebene besitzen aber keine strikte.

Theorem 4.8. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann gilt:*

(a) Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ kann von A durch eine Hyperebene getrennt werden; im Fall einer abgeschlossenen Menge A, kann der Punkt x sogar stark getrennt werden.

(b) Ist A abgeschlossen, so kann A als Durchschnitt aller Stützhalbräume von A dargestellt werden. Insbesondere ist A Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume H mit $A \subseteq H$.

Beweis. (a): Ist A abgeschlossen, so folgt aus Lemma 4.5 die Ungleichung

$$\langle y, v\rangle \leq \langle p(A, x), v\rangle$$

für alle $y \in A$. Des Weiteren hat man die Gleichung

$$\langle x, v\rangle = \langle p(A, x) + v, v\rangle = \langle p(A, x), v\rangle + |v|^2.$$

Also hat man die starke Trennung durch $H_{v,\beta}$ mit $\beta = \langle p(A, x), v\rangle + \frac{1}{2}|v|^2$. Wenn A allgemein ist und der Punkt x nicht in $\mathrm{cl}(A)$ liegt, so folgt die Behauptung durch das Trennen von x von $\mathrm{cl}(A)$. Gilt $x \in \mathrm{cl}(A)$, so hat man $x \in \mathrm{bd}(\mathrm{cl}(A))$, da sonst nach den topologischen Hilfsaussagen, der Punkt in $\mathrm{relint}(A)$ und somit in A wäre. In diesem Fall trennt die Stützhyperebe von $\mathrm{cl}(A)$ im Punkt x die gesuchte Hyperebene.

(b): Es reicht die Aussage über die Stützhalbräume zu beweisen. Ist $x \in A$, so liegt x in jedem Stützhalbraum von x. Ist $x \notin A$, so gilt wegen Lemma 4.5, $x \notin H$ für den Halbraum $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v\rangle \leq \langle p(A, x), v\rangle\}$ mit $v = x - p(A, x)$. □

Teil (b) des vorigen Theorems zeigt, dass jede abgeschlossen konvexe Menge eines Lösungsmenge eines (möglicherweise unendlichen) Systems von linearen Ungleichungen ist.

Für den Fall eines abgeschlossenen konvexen Kegels haben wir eine etwas stärkere Aussage:

Aufgabe 4.9. *Sei C abgeschlossener konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Dann existiert ein Vektor u mit $\langle u, c\rangle \geq 0$ für alle $c \in C$ und $\langle x, u\rangle < 0$.*

4.5 Trennung von zwei konvexen Mengen

Lemma 4.10. *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Die sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) Die Mengen A und B können getrennt (bzw. stark getrennt) werden

(ii) Die Menge $A - B$ und der Punkt 0 können getrennt (bzw. stark getrennt) werden.

Beweis. Wir verifizieren die Behauptung über die starke Trennung (die andere Behauptung ist analog). Angenommen, A und B werden durch die Hyperebene $H_{u,\alpha}$ stark getrennt, sodass $A \subseteq H^{\leq}_{u,\alpha-\epsilon}$ und $B \subseteq H^{\geq}_{u,\alpha+\epsilon}$ für ein $\epsilon > 0$ gilt. Für $x \in A - B$ gilt $x = a - b$ für ein $a \in A$ und ein $b \in B$. Daraus folgt

$$\langle x, u\rangle = \langle a, u\rangle - \langle b, u\rangle \leq (\alpha - \epsilon) - (\alpha + \epsilon) = -2\epsilon.$$

Das zeigt, dass $A - B$ und 0 mit der Hyperebene $H_{u,-\epsilon}$ stark getrennt sind. Umgekehrt, nehmen wir nun an dass $A - B$ und 0 mit einer Hyperebene voneinander getrennt sind. Das heißt $\langle a - b, u\rangle \leq \gamma - \epsilon$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ und $0 = \langle 0, u\rangle \geq \gamma + \epsilon$ für gewisse $\gamma \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ und $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sup\{\langle a, u\rangle \,:\, a \in A\}}_{=:\alpha} - \underbrace{\inf\{\langle b, u\rangle \,:\, b \in B\}}_{=:\beta} &= \sup\{\langle a - b, u\rangle \,:\, a \in A,\ b \in B\} \\
&\leq \gamma - \epsilon \\
&\leq \underbrace{\gamma + \epsilon}_{\leq 0} - 2\epsilon \\
&\leq -2\epsilon
\end{aligned}$$

Das zeigt also $\alpha + 2\epsilon \leq \beta$. Somit werden A und B stark durch die Hyperebene $H_{u,(\alpha+\beta)/2}$ getrennt. □

Aufgabe 4.11. *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie Folgendes:*

(a) Ist A oder B beschränkt, dann ist $A - B$ abgeschlossen.

(b) Es existieren Beispiele von unbeschränkten Mengen A und B, für welche $A - B$ nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 4.12. *Seien A und B nichtleere konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Dann gilt:

(a) Die Mengen A und B können getrennt werden.

(b) Ist einer dieser Mengen kompakt und die andere abgeschlossen, so können A und B stark getrennt werden.

4.6 Bemerkungen

Dieses Kapitel basiert auf [Sch93].

5 Farkas-Lemmas und Dualität linearer Aufgaben

5.1 Das Farkas-Lemma für Systeme in der Standardform

Theorem 5.1. *Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt <u>entweder</u> das System*

$$Ax = b \text{ und } x \geq 0 \qquad (*)$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ <u>oder</u> das System

$$yA \geq 0 \text{ und } yb < 0 \qquad (**)$$

eine Lösung $y \in \mathbb{R}^m$. Mit anderen Worten sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

(i) $\exists x\,(Ax = b,\ x \geq 0)$.

(ii) $\forall y\,(yA \geq 0 \Rightarrow yb \geq 0)$.

Beweis. Besitzt $(*)$ eine Lösung so kann $(**)$ keine Lösung besitzen, da man sonst für eine Lösung x des einen Systems und eine Lösung y des anderen Systems ein Widerspruch hätte:

$$0 \leq \underbrace{(yA)}_{\geq 0}\underbrace{x}_{\geq 0} = y(Ax) = yb < 0.$$

Besitzt $(*)$ keine Lösung, so gilt $b \notin C := \operatorname{cone}(a_1, \ldots, a_n)$ für die Spalten $a_1, \ldots, a_n$ von A. Nach dem Trennsatz für einen konvexen Kegel und einen Punkt existiert ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $\langle y, c\rangle \geq 0$ für alle $c \in C$ und $\langle y, b\rangle < 0$. Dieses y ist eine Lösung von $(**)$. $\square$

Bemerkung 5.2. *Das Farkas-Lemma besagt, dass die Unlösbarkeit von $(*)$ durch die Angabe einer Lösung y von $(**)$ bestätigt werden kann.*

Beispiel 5.3. *Wir betrachten $(*)$ im Fall*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das System:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 &= 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Wir bestätigen die Unlösbarkeit:

$$\underbrace{(-1)}_{=:y_1}\cdot(-x_1 + x_2) + \underbrace{1}_{=:y_2}\cdot(x_1 + 2x_2) = \underbrace{(-1)}_{=y_1}\cdot 2 + \underbrace{1}_{=y_2}\cdot 1$$

Das ergibt:

$$\underbrace{2 \cdot \underbrace{x_1}_{\geq 0} + 1 \cdot \underbrace{x_2}_{\geq 0}}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{<0}.$$

Die linke Seite ist nichnegativ, die rechte Seite ist negativ. Wir haben die Lösung $y = (y_1\ y_2) \in \mathbb{R}^2$ des Systems $(**)$ mit $y_1 = -1$ und $y_2 = 1$ benutzt.

5.2 Dualität für lineare Aufgaben in der Standardform

Theorem 5.4. *Man betrachte für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ die lineare Aufgabe in der Standardform*

$$\alpha = \min\{f(x) \, : \, x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geq 0\} \qquad \text{(std-LP)}$$

mit der Zielfunktion $f(x) = \langle c, x\rangle$ und die lineare Aufgabe

$$\beta = \max\{g(y) \, : \, y \in \mathbb{R}^m,\ yA \leq c\} \qquad \text{(std-LP-dual)}$$

mit der Zielfunktion $g(y) = \langle y, b\rangle$. Dann gilt:

(a) Wenn (std-LP) und (std-LP-dual) zulässige Lösungen besitzt, dann gilt $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Ist (std-LP) unbeschränkt, d.h., $\alpha = -\infty$, so besitzt (std-LP-dual) keine zLen, d.h., $\beta = -\infty$.

(c) Ist (std-LP-dual) unbeschränkt, d.h., $\beta = +\infty$, so besitzt (std-LP) keine zulässige Lösungen, d.h., $\alpha = +\infty$.

(d) Für eine zL x^* von (std-LP) und eine zL y^* von (std-LP-dual) sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) x^* ist optimal für (std-LP) und y^* ist optimal für (std-LP-dual)

(ii) $f(x^*) = g(y^*)$

(iii) Für jedes $i \in [n]$ ist die i-te Komponente von x^* oder die i-te Komponente von $c - y^*A$ gleich 0.

Beweis. (a): Angenommen, die beiden Aufgaben besitzen zulässige Lösungen. Dann gilt für jede zulässige Lösung x von (std-LP) und jede zulässige Lösung y von (std-LP):

$$yb = y(Ax) = \underbrace{(yA)}_{\leq c}\underbrace{x}_{\geq 0} \leq cx. \tag{2}$$

Es folgt

$$yb \leq \beta \leq \alpha \leq cx, \tag{3}$$

Also gilt $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \leq \alpha$.

Um $\beta \geq \alpha$ zu zeigen, leiten wir für jedes $\epsilon > 0$ die Ungleichung $\beta \geq \alpha - \epsilon$ her. Nach der Wahl von α hat das System

$$Ax = b, \qquad \langle c, x\rangle = \alpha - \epsilon, \qquad x \geq 0$$

in den Unbekannten $x \in \mathbb{R}^n$ keine Lösung. Wir formulieren dieses System als

$$\begin{pmatrix} A \\ -c \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ \epsilon - \alpha \end{pmatrix},\ x \geq 0$$

und verwenden zu dieser Formulierung das Farkas-Lemma (Theorem 5.1). Es folgt, dass das System

$$\begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ -c \end{pmatrix} \leq 0,\ \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \epsilon - \alpha \end{pmatrix} > 0$$

eine Lösung $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ hat. Mit anderen Worten gelten y und z die Ungleichungen

$$yA - zc \leq 0, \qquad yb + z(\epsilon - \alpha) > 0. \tag{4}$$

Wir zeigen nun, dass $z > 0$ gilt. Für eine optimale Lösung x^* von (std-LP) gilt:

$$z\alpha = \underbrace{zc}_{\geq yA} \underbrace{x^*}_{\geq 0} \geq y \underbrace{Ax^*}_{=b} = yb > z(\alpha - \epsilon).$$

Also gilt $z\epsilon > 0$, woraus $z > 0$ folgt.

Wir ersetzen y durch y/z und z durch 1 und erhalten dadurch eine Lösung von (4) mit $z = 1$, d.h., es gilt

$$yA - c \leq 0, \qquad yb + \epsilon - \alpha > 0.$$

Wir haben eine Lösung y von (std-LP-dual) konstruiert, für die $g(y) = yb > \alpha - \epsilon$ gilt. Daher gilt $\beta \geq \alpha - \epsilon$. Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\beta \geq \alpha$.

(b) und (c) folgen direkt aus dem Beweis von (a), vgl. (2).

(d): Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus (a). Wir zeigen die Äquivalenz von (ii) und (iii). Es gilt

$$g(y^*) = y^* b = \underbrace{y^* A}_{\leq c} \underbrace{x^*}_{\geq 0} \leq cx^* = f(x^*),$$

D.h. $f(x^*) = g(y^*)$ gilt genau dann wenn die Gleichung

$$0 = cx^* - y^* A x^* = (c - y^* A) x^*$$

erfüllt ist. Hierbei sind $c - y^* A$ und x^* nichtnegative Vektoren. Es folgt, dass der Wert $(c - y^* A)x^* = 0$ genau dann gilt, wenn die Bedingung (iii) erfüllt ist. $\square$

Die Probleme (std-LP) und (std-LP-dual) heißen zueinander *dual*. Die Bedingung (iii) in (d) heißt die *komplementäre Schlupfbedingung* (engl. *complementary slackness*).

Korollar 5.5. *Wenn im vorigen Theorem (std-LP) oder (std-LP-dual) zLen besitzt, so gilt $\alpha = \beta$.*

Beweis. Theorem 5.4(a) gilt die Gleichheit $\alpha = \beta$, wenn die beiden Aufgaben beschränkt sind und wenn einer der Aufgaben unbeschränkt ist. Es bleibt also zu zeigen, dass es nicht möglich ist, dass eine der beiden Aufgaben beschränkt und die andere unzulässig ist.

Im Fall, dass (std-LP) beschränkt und zulässig ist, haben wir im Beweis von (a) eine zulässige Lösung für (std-LP-dual) konstruiert.

Im Fall, dass (std-LP-dual) beschränkt und zulässig ist, können wir das folgende Widerspruchsargument verwenden. Angenommen, (std-LP) wäre unzulässig. Dann gäbe es nach dem Farkas lemma ein y^* mit $y^* A \leq 0$ und $y^* b > 0$. Sei y^0 beliebige zulässige Lösung von (std-LP-dual). Dann ist die Lösung $y^0 + \lambda y^*$ für jedes $\lambda \geq 0$ für das Problem (std-LP-dual) zulässige, und der Wert der Zielfunktion g an dieser Lösung geht gegen $+\infty$, für $\lambda \to +\infty$, was der Voraussetzung, dass (std-LP-dual) beschränkt ist, widerspricht. $\square$

Beispiel 5.6. *Wir illustrieren durch ein Beispiel die geometrische Bedeutung der Dualität. Man betrachte*

$$\beta = \max \{y_2 \,:\, y_1 + y_2 \leq 1, -y_1 + y_2 \leq 1, y_1 \leq 1, -y_1 - y_2 \leq 2\}.$$

Das ist das Problem der Bestimmung des höchsten Punkts in einem Polygon

$$Q = \{y \,:\, y a_i \leq c_i \text{ für } i = 1,2,3,4\},$$

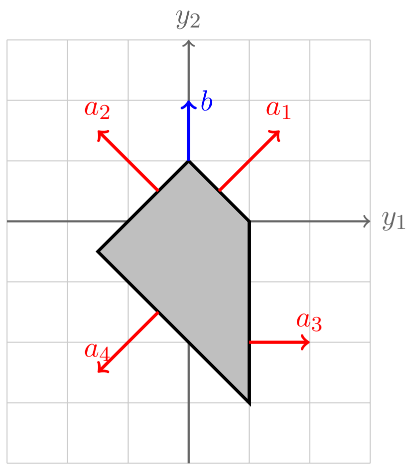
mit

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad a_4 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

und

$$c = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Aus Ungleichungen des Systems $yA \leq c$ in einem unbekannten Vektor y kann mit Hilfe eines $x \geq 0$ die Ungleichung $y(Ax) \leq cx$ mit der linken Seite (Ax) und der rechten Seite cx hergeleitet werden. Geometrisch gesehen liegt Q im Halbraum $H := H^{\leq}_{Ax,cx}$ für jede Wahl von $x \geq 0$. Ist $x \geq 0$ so gewählt, dass wir $Ax = b$ haben, so hat man $H^{\leq}_{Ax,cx} = H^{\leq}_{b,cx}$, sodass durch den Halbraum H die Werte der Zielfunktion by von (std-LP-dual) kontrolliert werden, und zwar ist der Wert cx eine obere Schranke an die Werte der Zielfunktion.



In unserem konkreten Fall hat man für $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ die Beschreibung

$$\begin{aligned} H = \{&(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,: \\ &x_1(y_1 + y_2) + x_2(-y_1 + y_2) + x_3 y_1 + x_4(-y_1 - y_2) \leq x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 2\} \\ = \{&(y_1, y_2) \,:\, (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) y_1 + (x_1 + x_2 + -x_4) y_2 \leq x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4\} \end{aligned}$$

Wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

erfüllt sind, so lässt sich der Halbraum als

$$H = \{(y_1, y_2) \,:\, y_2 \le x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4\}\,.$$

darstellen. Das ist ein Halbraum mit einem äußeren Normalenvektor $(0,1)$. *Mit dieser Wahl von* $x_1, \ldots, x_4$ *ist für jeden Punkt* $(y_1, y_2) \in Q$ *der Wert* y_2 *höchstens* $x_1 + x_2 + x_4$. *Das Dualitätstheorem besagt, dass man eine Wahl von* x_1, x_2, x_3, x_4 *hat, bei der der höchsten Punkt im Rand eines solchen Halbraums* H *liegt. (Die geometrische Bedeutung der Dualität ist im Sinne dieses Beispiels in [Sch86, §7.5] beschrieben.) Da* $(y_1, y_2) = (0,1)$ *die optimale Lösung des Problems auf* Q *ist, sagt uns die komplementäre Schlupfbedingung, dass beim kleinstmöglichen* $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$ *man* $x_3 = x_4 = 0$ *haben muss (denn für* $(y_1, y_2) = (0,1)$ *ist die dritte und die vierte Nebenbedingung in* $yA \le c$ *strikt.)*

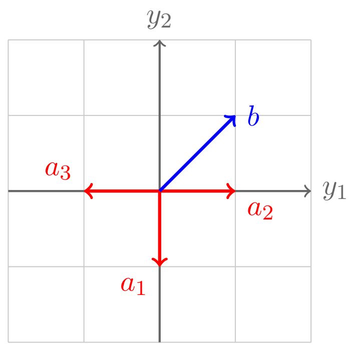
Bemerkung 5.7. *Die Situation, dass weder (std-LP) noch (std-LP-dual) keine zLen besitzt, ist möglich, bereits für* $m = n = 1$. *Man findet aber auch Beispiele in höheren Dimensionen. (Finden Sie Beispiele dazu.) Man betrachte* $y = (y_1, y_2)$ *und das System* $y_2 \ge 0, 1 \le y_1 \le -1$ *und die Zielfunktion* $g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$. *Man hat keine zulässige Lösungen. In der Matrixform:*

$$\max\left\{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Die Aufgabe ist unzulässig, weil die letzten zwei Ungleichungen inkompatibel sind. Diese Aufgabe ist dual zur Aufgabe

$$\max\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,:\, x_1, x_2, x_3 \ge 0,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Das System ist durch zwei Gleichungen definiert: $x_2 - x_3 = 1$ *und* $-x_1 = 1$. *Die Gleichung* $-x_1 = 1$ *kann nicht erfüllt sein, da* x_1 *nichtnegativ ist. Die Unzulässigkeit kann man auch an dem folgenden Bild erkennen:*



5.3 Basis-Darstellung von (std-LP-dual)

Wir werden eine Variante der Simplex-Methode zur Lösung von (std-LP-dual) und (std-LP) herleiten, die aus der Dualitätsrelation der Aufgaben (std-LP-dual) und (std-LP) hervorgeht. Dafür werden wir eine Basisdarstellung für (std-LP-dual) herleiten, die der Basisdarstellung für (std-LP) aus dem Abschnitt 3.4 entspricht.

Wir benutzen in diesem Abschnitt die Bezeichnungen aus dem Abschnitt 3.4, in dem wir das Problem (std-LP) bzgl. einer Basis dargestellt haben. Insbesondere setzen wir in diesem Abschnitt voraus, dass die Matrix A aus (std-LP) vollen Zeilenrang hat. Wir bemerken, dass die Herleitung der Basisdarstellung (std-LP-B) des Problems (std-LP) im Abschnitt 3.4 auf den Fall einer beliebigen Basis $\mathcal{B}$ direkt verallgemeinert werden kann, d.h., die Basisdarstellung gilt auch, wenn die Lösung x^* zur Basis $\mathcal{B}$ für das Problem (std-LP) unzulässig ist.

Für eine Basis $\mathcal{B} = (a_i)_{\in B}$ aus Spalten von A nennen wir den Vektor

$$y^* = c_B A_{*,B}^{-1} \tag{5}$$

eine Basislösung für (std-LP-dual) zur Basis $\mathcal{B}$. Mit Spalten von $a_1, \ldots, a_n$ lässt sich die vorige Definition als

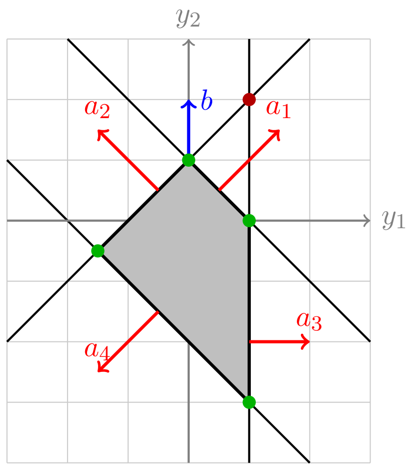
$$\langle y^*, a_i \rangle = c_i \qquad \forall i \in B$$

darstellen (d.h., für m linear unabhängige linke Seiten erfüllt y^* die entsprechenden Ungleichungen mit Gleichheit). Wenn y^* für (std-LP-dual) zulässig ist, so nennen wir sie eine zBL von (std-LP-dual). Geometrisch entspricht die eine zBL einer Ecke des Polyeders $\{y \in \mathbb{R}^m : yA \leq c\}$. Die Ecken werden formal etwas später eingeführt.

Beispiel 5.8. *Die Aufgabe (std-LP) aus Beispiel 5.6 hat 4 zulässige und eine unzulässige Basislösung. Die zulässigen Lösungen sind Lösungen zu den vier Basen*

$$(a_1, a_2), \ (a_2, a_4), \ (a_4, a_3), \ (a_3, a_1)$$

und die einzige unzulässige Lösung ist die Lösung zur Basis (a_2, a_3).



Wir leiten nun eine Darstellung von (std-LP-dual) bzgl. einer beliebigen Basis $\mathcal{B}$ her (d.h., die Lösung y^* zur Basis $\mathcal{B}$ muss nicht zulässig sein). Man hat

$$yA \leq c \qquad \Leftrightarrow \qquad yA_{*,B} \leq c_B, \ yA_{*,N} \leq c_N$$

Wegen (5) hat man für $yA_{*,B} \leq c_B$ die Äquivalenz

$$yA_{*,B} \leq c_B \qquad \Leftrightarrow \qquad (y^* - y)A_{*,B} \geq 0$$

und für $yA_{*,N} \leq c_N$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
yA_{*,N} \le c_N \quad &\Leftrightarrow \quad (y-y^*)A_{*,N} \le c_N - \underbrace{y^*}_{=A_{*,B}^{-1}b} A_{*,N} \\
&\Leftrightarrow \quad (y-y^*)A_{*,N} \le c_N - c_B \underbrace{A_{*,B}^{-1}A_{*,N}}_{=\overline{A}} \\
&\Leftrightarrow \quad (y-y^*)A_{*,N} \le \underbrace{c_N - c_B\overline{A}}_{=\overline{c}} \\
&\Leftrightarrow \quad (y-y^*)A_{*,N} \le \overline{c} \\
&\Leftrightarrow \quad (y^*-y)A_{*,N} + \overline{c} \ge 0
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion $g(y) = yb$ von (std-LP-dual) wird ebenfalls entsprechend umformuliert:

$$g(y) = yb = y^*b + (y-y^*)b = g(y^*) + (y-y^*)b = g(y^*) - (y^*-y)b.$$

Das Problem (std-LP-dual) kann also als das Problem

$$\max\{g(y^*) - (y^*-y)b \,:\, (y^*-y)A_{*,B} \ge 0,\; (y^*-y)A_{*,N} + \overline{c} \ge 0\} \qquad \text{(std-LP-dual-B)}$$

umformuliert werden. Die vorige Beschreibung nennen wir die Darstellung von (std-LP-dual) bzgl. der Basis $\mathcal{B}$. Diese Darstellung können wir kompakt in den Variablen

$$z = (y^*-y)A_{*,B} \in \mathbb{R}^B.$$

formulieren. Die Zielfunktion kann nun mit Hilfe der Variablen z dargestellt werden:

$$g(y^*) - (y^*-y)b = g(y^*) - z\underbrace{A_{*,B}^{-1}b}_{=x_B^*} = g(y^*) - zx_B^*.$$

Wir erhalten also die Darstellung

$$\max\left\{g(y^*) - zx_B^* \,:\, z \in \mathbb{R}^B, z \ge 0,\; z\overline{A} + \overline{c} \ge 0\right\} \qquad \text{(std-LP-dual-B')}$$

von (std-LP-dual-B) in den Variablen z. In dieser Formulierung sehen wir also die selben Daten $x_B^*, \overline{A}$, $\overline{c}$, die wir auch in der Formulierung (std-LP-B) von (std-LP) in Kapitel 3 benutzt haben. Diese Daten bekommen also eine weitere Interpretation für (std-LP-dual).

Proposition 5.9. *Man betrachte das Problem (std-LP) und das zugehörige duale Problem (std-LP-dual) wie in Theorem 5.4 für eine Matrix A mit vollem Zeilenrang. Sei $\mathcal{B} = (a_i)_{i\in B}$ eine Basis aus Spalten von A. Sei x^* die Basislösung von (std-LP) zur Basis $\mathcal{B}$ und y^* die Basislösung von (std-LP-dual) zur Basis $\mathcal{B}$. Dann gilt:*

(a) $\omega := f(x^*) = g(y^*)$.

(b) Wenn $\overline{c} \ge 0$ erfüllt ist, dann ist

(b1) die Basislösung y^* von (std-LP-dual) ist zulässig,

(b2) der Wert ω eine untere Schranke an (std-LP-dual),

(b3) *der Wert ω eine untere Schranke an (std-LP).*

(c) *Wenn $x_B^* \geq 0$ erfüllst ist, dann ist*

(c1) *die Basislösung x^* von (std-LP) ist zulässig,*

(c2) *der Wert ω eine obere Schranke an (std-LP),*

(c3) *der Wert ω eine obere Schranke an (std-LP-dual).*

(d) *Wenn $\overline{c} \geq 0$ und $x_B^* \geq 0$ erfüllt ist, so ist x^* eine optimale Lösung von (std-LP) und y^* eine optimale Lösung von (std-LP-dual).*

Beweis. (a): Man hat

$$f(x^*) = c_B x_B^* = c_B A_{*,B}^{-1} b = y^* b = g(y^*).$$

(b): Sei $\overline{c} \geq 0$. Dass y^* für (std-LP-dual) zulässig ist, folgt offensichtlich aus (std-LP-dual-B). Dann ist auch der Wert $\omega = g(y^*)$ eine untere Schranke für (std-LP-dual). Der Wert $\omega = f(x^*)$ ist eine untere Schranke an (std-LP): dies folgt direkt aus der Darstellung

$$f(x) = f(x^*) + \overline{c} x_N$$

der Zielfunktion von (std-LP) in der Formulierung (std-LP-B).

(c): Aus $x_B^* \geq 0$ folgt, dass die Lösung x^* von (std-LP) zulässig ist. Somit ist $\omega = f(x^*)$ eine obere Schranke an (std-LP). Der Wert ω ist eine obere Schranke an (std-LP-dual). Um das zu zeigen, benutzen wir die Formulierung (std-LP-dual-B') von (std-LP-dual) zur Basis $\mathcal{B}$ mit Hilfe von Variablen z. Für jede zL z von (std-LP-dual-B') gilt:

$$g(y^*) - z A_{*,B}^{-1} b = g(y^*) - \underbrace{z}_{\geq 0} \underbrace{x_B^*}_{\geq 0} \leq g(y^*) = \omega.$$

Die Behauptung (d) folgt nun direkt aus (a), (b) und (c), da im Fall $\overline{c} \geq 0, x_B^* \geq 0$, die beiden Lösungen x^* und y^* für ihre Probleme zulässig sind, und der Wert $\omega = f(x^*) = g(y^*)$ eine obere sowie eine untere Schranke für die beiden Probleme ist. □

5.4 Primale und duale Simplex-Methoden

Die in (std-LP-dual-B') verwendete Matrix $\overline{A}$, die Vektoren $\overline{c}$ und x_B^* sowie der Wert $g(y^*) = f(x^*)$ sind im Simplex-Tableau für (std-LP) zur Basis $\mathcal{B}$ vorhanden.

Wegen der Dualität sieht man, dass die im Kapitel 3 eingeführte Simplex-Methode zur Lösung von (std-LP) auch das Problem (std-LP-dual) lösen kann. Dabei konstruiert die Simplex-Methode iterativ eine Folge von oberen Schranken an (std-LP), die man auch als obere Schranken an (std-LP-dual) interpretieren kann.

Eine Simplex-Methode, die für ein Minimierungsproblem eine Folge von unteren Schranken konstruiert, nennen wir *dual*. Eine Simplex-Methode, die für ein Minimierungsproblem eine Folge von oberen Schranken konstruiert (durch die Angabe der zugehörigen zBLen) nennen wir *primal*. Analog wird eine Simplex-Methode, die für ein Maximierungsproblem ein Folge von oberen Schranken konstruiert *dual* genannt und eine Simplex-Methode, die für ein Maximierungsproblem eine Folge von unteren Schranken konstruiert, *primal* genannt. Laut den vorigen Definitionen ist die Simplex-Methode aus dem Kapitel 3 für (std-LP) primal und für (std-LP-dual) dual. Man redet auch oft von primalen ('was geht') und dualen ('was geht nicht') Schranken.

Nun beschreiben wir eine Simplex-Methode, welche für (std-LP) dual und für (std-LP-dual) primal ist. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis, für die $\overline{c} \geq 0$ gilt, sodass die BL y^* von (std-LP-dual) zur Basis $\mathcal{B}$ zulässig ist. In (std-LP-dual-B') ist die Zielfunktion durch $g(y^*) - zx_B^*$ beschrieben. Gilt $x_B^* \geq 0$, so ist y^* für (std-LP-dual) optimal und x^* für (std-LP) optimal. Ansonsten, existiert ein $\ell \in B$ mit $x_\ell^* < 0$. Pivoting-Schritte in dieser Situation werden durch die folgende Proposition festgelegt.

Proposition 5.10. *Man betrachte das Problem (std-LP-dual) für eine Matrix A mit vollem Zeilenrang, deren Spalten wir als $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen. Für eine Basis $\mathcal{B} = (a_i)_{i \in B}$ aus Spalten von A betrachte die zugehörigen Darstellungen (std-LP-dual-B) und (std-LP-dual-B') von (std-LP-dual). Sei $\overline{c} \geq 0$ erfüllt, sodass die BL y^* von (std-LP-dual) zur Basis $\mathcal{B}$ zulässig ist. Sei $\ell \in B$ ein Index mit $x_\ell^* < 0$. Für ein $\theta \geq 0$ betrachte den Vektor y', der durch die Gleichung $z = (y^* - y')A_{*,B}$ gegeben ist, wobei der Vektor $z = (z_i)_{i \in B}$ komponentenweise durch die Gleichungen*

$$z_i = \begin{cases} \theta, & i = \ell, \\ 0, & i \in B \setminus \{\ell\}. \end{cases}$$

beschrieben ist. Dann gilt:

(a) $g(y') \geq g(y^*)$, wobei diese Ungleichung bei $\theta > 0$ strikt ist.

(b) y' ist für (std-LP-dual) genau dann zulässig, wenn $\theta \leq \theta_0$ gilt, mit

$$\theta_0 := \min \{ -\overline{c}_\ell / \overline{a}_{\ell j} \; : \; j \in J \},$$
$$J := \{ j \in N \; : \; \overline{a}_{\ell j} < 0 \}$$

und $N := [n] \setminus B$.

(c) Ist die Menge J aus (b) leer, so ist (std-LP-dual) unbeschränkt.

(d) Wenn $\theta = \theta_0$ gilt und $k \in J$ ein Index mit $-\overline{c}_\ell / \overline{a}_{\ell k} = \theta_0$ ist, so ist y' eine zBL von (std-LP-dual) zur Basis $(a_i)_{i \in B \setminus \{\ell\} \cup \{k\}}$.

Beweis. *(a)* folgt sofort aus (std-LP-dual-B'), denn nach der Wahl von y' und wegen $x_\ell^* < 0$ gilt $g(y') = g(y^*) - \theta x_\ell^* \geq g(y^*)$, wobei die letzte Ungleichung im Fall $\theta > 0$ strikt ist.

(b) Wegen (std-LP-dual-B') ist y' genau dann für (std-LP-dual) zulässig, wenn $z\overline{A} + \overline{c} \geq 0$ erfüllt ist. Komponentenweise lässt sich die vorige Bedingung als

$$\sum_{i \in B} z_i \overline{a}_{ij} + \overline{c}_j \geq 0 \qquad \forall j \in N$$

darstellen. Wegen der Wahl von z ist das vorige System äquivalent zu

$$\theta \overline{a}_{\ell j} + \overline{c}_j \geq 0 \qquad \forall j \in N.$$

Wenn $\overline{a}_{\ell j} \geq 0$ so gilt wegen $\overline{c}_\ell \geq 0$ die vorige Bedingung für jedes $\theta \geq 0$. Das zeigt, dass die vorige Bedingung genau dann erfüllt ist, wenn die Bedingung $\theta \leq \theta_0$ aus (b) gilt.

(c): Wenn $J = \emptyset$ ist, dann ist y' für jedes $\theta \geq 0$ zulässig. Des Weiteren hat man $g(y') = g(y^*) - \theta x_\ell^* \to +\infty$ für $\theta \to +\infty$.

(d): In Abschnitt 5.3 haben wir die Äquivalenz

$$y' A_{*,N} \leq c_N \qquad \Leftrightarrow \qquad (y^* - y')A_{*,N} + \bar{c} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z\overline{A} + \bar{c} \geq 0$$

von Ungleichungssystemen benutzt. Es ist klar, dass die folgende analoge Äquivalenz

$$\langle y', a_j \rangle \leq c_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle y^* - y', a_j \rangle + \bar{c}_j \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i \in B} z_i \bar{a}_{ij} + \bar{c}_j \geq 0$$

auch für einzelne Ungleichungen mit $j \in N$ gilt. Darüber hinaus gelten analoge Äquivalenzen gelten für den Gleichheitsfall in diesen Ungleichungen. Nach unserer Wahl von z ist die letzte Ungleichung äquivalent zu

$$\theta \bar{a}_{\ell j} + \bar{c}_j \geq 0.$$

Wenn wir also ein k wie in *(d)* fixieren, haben wir den Gleichheitsfall für $j = k$. Das impliziert die Gleichheit $\langle y', a_k \rangle = c_k$. Anderseits impliziert die Gleichung $z = (y^* - y')A_{*,B}$, die man als $z_i = \langle y^* - y', a_i \rangle \ \forall i \in B$ schreiben kann, für jedes $i \in B \setminus \{\ell\}$, die Gleichheit $\langle y^* - y', a_i \rangle = 0$. D.h., $\langle y', a_i \rangle = \langle y^*, a_i \rangle = c_i$ für alle $i \in B \setminus \{\ell\}$. Zusammenfassend gilt:

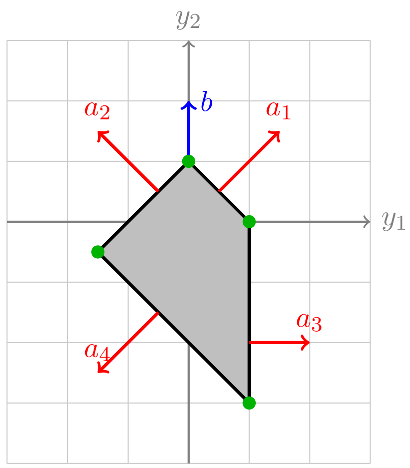
$$\langle y', a_i \rangle = c_i \qquad \forall i \in B \setminus \{\ell\} \cup \{k\}.$$

Es bleibt zu verifizieren, dass $(a_i)_{i \in B \setminus \{\ell\} \cup \{k\}}$ eine Basis ist. Wir benutzen das selbe Argument wie in Proposition 3.8 über das Pivoting für (std-LP):

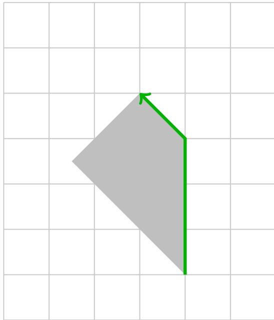
$$\overline{A} = A_{*,B}^{-1} A_{*,N} \qquad \Leftrightarrow \qquad A_{*,N} = A_{*,B}\overline{A} \qquad \Leftrightarrow a_j = \sum_{i \in B} a_i \bar{a}_{ij} \ \forall j \in N.$$

Insbesondere ist $a_k = \sum_{i \in B} a_i \bar{a}_{ik}$ mit $\bar{a}_{\ell k} \neq 0$. Nach dem Basisaustauschlemma aus der linearen Algebra ist das System $(a_i)_{i \in B \setminus \{\ell\} \cup \{k\}}$ eine Basis. $\square$

Beispiel 5.11. *Wir betrachten (std-LP-dual) aus Beispielen 5.6 und 5.8.*



Für diese Aufgaben werden wir zwei Pivoting-Schritte machen, die geometrischen dem folgenden Pfad entsprechen.



Die Berechnung einer Startlösung und Test auf Zulässigkeit für (std-LP-dual) werden etwas später diskutiert. Für diese Beispiel setzen wir als bekannt voraus, dass die BL zur Basis (a_3, a_4) für (std-LP-dual) zulässig ist.

Als Erstes konvertieren wir das Simplex-Tableau der Originalformulierung zum Tableau zur Basis (a_3, a_4):

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	−1	1	−1	0
1	1	0	−1	1
1	1	1	2	0

$$\begin{aligned} \max\ y_2 \ &: \ y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ y_1 + y_2 &\le 1 \quad (1) \\ -y_1 + y_2 &\le 1 \quad (2) \\ y_1 &\le 1 \quad (3) \\ -y_1 - y_2 &\le 2 \quad (4) \end{aligned}$$

Transformationen:
$(2) := -(2)$
$(1) := (1) + (2)$
$(z) := (z) - (1) - 2 \cdot (2)$

Tableau zur Basis (a_3, a_4) :

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	−2	1	0	−1
−1	−1	0	1	−1
3	5	0	0	3

(std-LP-dual-B') für dieses Tableau:

$$\begin{aligned} \max\ -3 + z_3 + z_4 \ &: \\ -z_4 + 3 &\ge 0 \\ -2z_3 - z_4 + 5 &\ge 0 \\ z_3 &\ge 0 \\ z_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Da man $x_3^* < 0$ und $x_4^* < 0$ hat, können wir a_3 oder a_4 aus der Basis ausführen. Wir führen a_4 raus. Es muss entschieden werden, ob nun a_1 oder a_2 die Basis betritt. Der Vergleich der Quotienten $3/1$ und $5/1$ zeigt, dass a_1 die Basis betritt. Der Basiswechsel erfolgt durch die Operationen:

$(2) := -(2)$
$(z) := (z) - 3(2)$:

Tableau zur Basis (a_1, a_3):

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	−2	1	0	−1
1	1	0	−1	1
0	2	0	3	0

(std-LP-dual-B') für dieses Tableau

$$\begin{aligned} \max\ 0 - z_1 + z_3 \ &: \\ z_1 &\ge 0 \\ -2z_3 + z_1 + 2 &\ge 0 \\ z_3 &\ge 0 \\ -z_1 + 3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Da hier nur x_3^* negative ist, muss a_3 die Basis verlassen. Der Vektor a_2 muss die Basis betreten, da unter die Komponente $\overline{a}_{3j}$ von $\overline{A}$ nur für $j = 2$ negativ ist. Durch Transformationen

$$\begin{aligned}(1) &:= -\tfrac{1}{2}(1)\\ (2) &:= (2) - (1)\\ (z) &:= (z) - 2(1)\end{aligned}$$

erreichen wir

Tableau zur Basis (a_1, a_2):

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	1	$-1/2$	0	$1/2$
1	0	$1/2$	-1	$1/2$
0	0	1	3	-1

(std-LP-dual-B') für dieses Tableau

$$\begin{aligned}\max 1 - \tfrac{1}{2}z_1 - \tfrac{1}{2}z_2 &\ :\\ z_2 &\geq 0\\ z_1 &\geq 0\\ -\tfrac{1}{2}z_2 + \tfrac{1}{2}z_3 + 1 &\geq 0\\ -z_1 + 3 &\geq 0\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass diese Lösung zur Basis (a_1, a_2) optimal ist, da für diese Basis $x_B^* \geq 0$ gilt.

Im letzten Tableau kann man die optimale Lösung von (std-LP-dual) zur Basis (a_1, a_2) noch nicht direkt ablesen. Diese Lösung kann etwa mit Hilfe des Gauß-Verfahrens ausgerechnet werden. Wir losen das lineare Gleichungssystem $yA_{*,B} = c_B$ für $B = \{1, 2\}$. Das System ist

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als optimale Lösung von (std-LP-dual) erhalten wir das y mit $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$.

Bemerkung 5.12. *Hier mehrere Beschreibungen der Arbeitsweise der Simplex-Methoden.*

- *Die primale Simplex-Methode entspricht einer Wanderung von Ecke zu Ecke entlang der Kanten eines Polyeders. Das illustrieren Beispiele 5.11 und 3.9 bzgl. (std-LP-dual) und (std-LP).*
- *Die primale Simplex-Methode iteriert über zBLen, bis eine optimale zBL erreicht wird bzw. Unbeschränktheit nachgewiesen wird.*
- *Die duale Simplex-Methode iteriert über unzulässige BLen, bis eine optimale zBL erreicht wird.*

Es sei nochmals daran hingewiesen: die Simplex-Methode dieses Kapitels ist primal für (std-LP-dual) und dual für (std-LP). Die Simplex-Methode aus Kapitel 3 ist primal für (std-LP) und dual für (std-LP-dual).

Bemerkung 5.13 (Wahl der Simplex-Methode)**.** *Wir vergleichen kurz die primale und duale Simplex-Methode:*

- *Die primale Simplex-Methode für (std-LP) entspricht der Wanderung auf einem Polyeder mit der Dimension höchstens $n - m$ mit höchstens n Facetten.*

Die duale Simplex-Methode für (std-LP) entspricht einer Wanderung auf einem Polyeder der Dimension höchstens m mit höchstens n Facetten. In der Regel ist die Dimension der kritische Parameter (es sei denn, die Anzahl der Ungleichungen ist extrem groß). Man hat $m \leq n - m$ bei $n \geq 2m$. Also müsste die duale Simplex-Methode für (std-LP) für $n \geq 2m$ eigentlich schneller sein.

- *Bei sehr großen LPs hat man in jeder Iteration der primalen Simplex-Methode eine zL. Wenn man die Methode nach einem vorgegebenen Zeitlimit abbricht, kann diese (nicht-optimale) zL benutzt werden. Bei der dualen Simplex-Methode kriegt man erst nach der Terminierung eine zL.*

- *Ändert man nach dem Lösen eines LPs die Zielfunktion, so bleibt die primale (aber nicht notwendigerweise die duale) Zulässigkeit einer Lösung erhalten und man kann das abgeänderte Problem unter Beibehaltung der aktuellen Basis mit der primalen Simplex-Methode lösen.*

- *Ändert man nach dem Lösen eines LPs die rechte Seite der Nebenbedingungsmatrix oder fügt Nebenbedingungen hinzu, so bleibt die duale (aber nicht notwendigerweise die primale) Zulässigkeit einer Lösung erhalten und für die duale Simplex-Methode ist somit ein 'Warmstart' möglich.*

Bemerkung 5.14. *Die duale Simplex-Methode im Rahmen der sogenannten Schnittebenen-Methoden zur Lösung verschiedener Aufgaben aus der kontinuierlichen, diskreten und gemischt-ganzzahligen Optimierung benutzt.*

Wir nennen eine BL $y^* = c_B(A_{*,B})^{-1}$ zur Basis $(a_i)_{i \in B}$ *entartet* falls $\langle y^*, a_j \rangle = c_j$ für ein $j \in N := [n] \setminus B$ gilt.

Bemerkung 5.15. *Komplett analog zur Simplex-Methode aus Kapitel 3 hat man auch für die oben präsentierte Simplex-Methode Anticycling-Regeln, wie etwa die* Bland-Regel, *bei der der kleinste Index $\ell \in B$ mit $x_\ell^* < 0$ und anschließend der kleinste Index $k \in J$ mit $-\overline{c}_k / \overline{a}_{\ell k} = \theta_0$ gewählt werden. Diese Regel garantiert die Terminierung unabhängig davon, ob ein generischer oder ein entarteter Fall vorliegt.*

Bemerkung 5.16. *Für einen Zulässigkeitstest von (std-LP-dual) und Bestimmung einer Startlösung kann (std-LP-dual) in Standardform gebracht und wie in Abschnitt 3.9 beschrieben eine Startlösung gefunden werden.*

Alternativ kann aber auch ein Hilfsproblem ähnlich zu dem in Kapitel 3 formuliert werden, das direkt auf die duale Simplex-Methode zugeschnitten ist:

Sei eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ gegeben, die wir als dual unzulässig annehmen (sonst ist nichts zu tun). Wir fügen die Nebenbedingung

$$\sum_{i \in N} x_i \leq M$$

zu (std-LP) hinzu, wobei die symbolische Größe M eine reelle Zahl repräsentiert, die größer als alle während der folgenden Rechnung auftretenden Werte ist. Die zugehörigen Slackvariable bezeichnen wir mit x_{n+1} und fügen sie zu $\mathcal{B}$ hin. Die wesentlich Idee der Konstruktion besteht darin, dass der Zielfunktionswert von (std-LP) nun für alle Werte von M offensichtlich beschränkt ist und mithilfe der obigen Nebenbedingung direkt eine zulässige Lösung für (std-LP) konstruiert werden kann.

Dazu führen wir einen Pivot-Schritt durch, bei dem x_{n+1} die Basis verlässt und die Variable mit den kleinsten reduzierten Kosten die Basis betritt. Danach ist die neue Basis dual zulässig und es kann mit der dualen Simplex-Methode fortgesetzt werden, wobei M symbolisch beibehalten wird (siehe nachfolgend Beispiel 5.17).

Ist (std-LP-dual) zulässig, so finden wir nach endlich vielen dualen Simplex-Schritten eine dual zulässige Basis $\mathcal{B}'$ mit $x_{n+1} \in \mathcal{B}'$. In diesem Fall ist $\mathcal{B}' \backslash \{x_{n+1}\}$ eine dual zulässige Basis für das ursprünglichen Problem (std-LP). Auch der Wert der zugehörigen Lösung hängt dann im finalen Tableaus nicht mehr von M ab.

Gelangen wir hingegen zu einem optimalen Tableau zur Basis $c\mathcal{B}''$ mit $x_{n+1} \notin \mathcal{B}''$, so lässt sich nach Konstruktion keine Schranke von (std-LP) konstruieren ohne die Nebenbedingung $\sum_{i \in N} x_i \leq M$ zu verwenden; somit existiert keine dual zulässige Basislösung für (std-LP).

Beispiel 5.17. *Wir betrachten die lineare Aufgabe*

$$\begin{aligned} \min\{ \quad & -x_2 - 5x_3 + x_4 : \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ & 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0\}, \end{aligned}$$

zu der wir eine dual zulässige Basislösung bestimmen möchten. Wir betrachten das folgende Tableau zur willkürlich gewählten Basis $B = \{1, 5\}$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	2	−1	1	0	4
0	3	4	−1	1	3
0	−1	−5	1	0	0

Wie wir sehen, ist B dual unzulässig. Gemäß der vorigen Bemerkung fügen wir die Nebenbedingung

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq M$$

hinzu, bezeichnen die zugehörige Slackvariable als x_6 und fügen sie zur Basis hinzu. Wir erhalten das folgende Tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	1	1	0	1	M
1	2	−1	1	0	0	4
0	3	4	−1	1	0	3
0	−1	−5	1	0	0	0

Nun führen wir einen speziellen Pivot-Schritt durch, in dem x_6 die Basis verlässt und die Variable mit den kleinsten reduzierten Kosten, in unserem Beispiel also x_3, die Basis betritt.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	1	1	0	1	M
1	3	0	2	0	1	$4 + M$
0	−1	0	−5	1	−4	$3 - 4M$
0	4	0	6	0	5	$5M$

Wir erhalten ein dual zulässiges Tableau. Es ist allerdings primal unzulässig, da $3 - 4M < 0$ für große M. Nun können wir mit der dualen Simplex-Methode weiter rechnen: x_5 verlässt die Basis und x_4 tritt in die Basis ein.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5} + \frac{1}{5}M$
1	$\frac{13}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{26}{5} - \frac{3}{5}M$
0	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}M$
0	$\frac{14}{5}$	0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5} + \frac{1}{5}M$

Nun verlässt x_1 die Basis und x_6 tritt in die Basis ein.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{7}{3}$
$-\frac{5}{3}$	$-\frac{13}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{26}{3} + M$
$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{19}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{16}{3}$

Da x_6 die Basis wieder betreten hat, wissen wir, dass das ursprüngliche Problem dual zulässig ist und können mit $\mathcal{B}' = \{x_3, x_4\}$ eine dual zulässige Basis angeben. Die zugehörige Basislösung $x = (0, 0, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}, 0)$ ist außerdem primal zulässig und somit optimal.

5.5 Varianten des Farkas-Lemmas

Aufgabe 5.18 (Varianten des Farkas-Lemmas)**.** *Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Dann gelten die Äquivalenzen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) für die folgenden Paare von Bedingungen.*

(a) *(i)* $\exists x(x \geq 0, Ax = b)$

(ii) $\forall y((yA \geq 0) \Rightarrow (yb \geq 0))$.

(b) *(i)* $\exists x(x \geq 0, Ax \leq b)$

(ii) $\forall y((y \geq 0, yA \geq 0) \Rightarrow (yb \geq 0)$.

(c) *(i)* $\exists x(Ax \leq b)$

(ii) $\forall y((y \geq 0, yA = 0) \Rightarrow (yb \geq 0))$.

Noch etwas allgemeiner kann man das folgende zusammenfassende Farkas-Lemma formulieren.

Aufgabe 5.19 (Farkas-Lemma in einer zusammenfassenden Form)**.** *Seien A, B, F, G Matrizen und b, g Vektoren mit Komponenten aus $\mathbb{R}$ deren Größen so gewählt sind, dass das System $x \geq 0, Ax + By = b, Fx + Gy \leq g$ in unbekannten Vektoren x und y wohldefiniert ist. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $\exists x \exists y(x \geq 0, Ax + By = b, Fx + Gy \leq g)$.

(ii) $\forall u \forall v((v \geq 0, uA + vF \geq 0, uB + vG = 0) \Rightarrow (ub + vg \geq 0))$

5.6 Varianten der Dualität von linearen Aufgaben

Analog lassen sich den linearen Aufgaben in unterschiedlichen Formen duale Aufgaben zuordnen, für welche die Aussagen wie die für (std-LP) und (std-LP-dual) aus Abschnitt 5.2 gezeigt werden können.

Aufgabe 5.20 (Varianten der Dualität von linearen Aufgaben)**.** *Seien* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ *mit* $m, n \in \mathbb{N}$. *Dann gelten für die folgenden Paaren von linearen Aufgaben die Aussagen (a) – (c), welche im Theorem 5.4 für das Paar (std-LP) und (std-LP-dual) formuliert wurden:*

(a) *1.* $\min\{cx : x \geq 0, Ax = b\}$
  2. $\max\{yb : yA \leq c\}$

(b) *1.* $\max\{cx : x \geq 0, Ax \leq b\}$.
  2. $\min\{yb : y \geq 0, yA \geq c\}$.

(c) *1.* $\max\{cx : x \geq 0, Ax = b\}$
  2. $\min\{yb : yA \geq c\}$.

Aufgabe 5.21 (Dualität von Linearen Aufgaben in einer zusammengefassten Form)**.** *Seien* A, B, F, G *Matrizen und* b, g *und* c, d *Vektoren mit Komponenten aus* $\mathbb{R}$ *deren Größen so gewählt sind, dass die lineare Aufgabe*

$$\min\{cx + dy : x \geq 0, Ax + By = b, Fx + Gy \geq g\}$$

mit Variablen (x, y) *wohldefiniert ist. Man betrachte die Aufgaben*

$$\max\{ub + vg : v \geq 0, uA + vF \leq c, uB + vG = d\}$$

mit Variablen (u, v). *Dann gelten für das vorige Paar von linearen Aufgaben die Aussagen (a) – (c), welche im Theorem 5.2 für das Paar (std-LP) und (std-LP-dual) formuliert wurden.*

Bemerkung 5.22. *Aus der vorigen Aufgabe lässt sich das folgende Prinzip bei der Erstellung von dualen Problemen erkennen:*

Maximieren	$\leftrightsquigarrow$	*Minimieren*
rechte Seiten der Nebenbedingungen	$\leftrightsquigarrow$	*Koeffizienten der Zielfunktion*
Variablen aus $\mathbb{R}$	$\leftrightsquigarrow$	*Gleichungsbedingungen*
Variablen aus $\mathbb{R}_+$	$\leftrightsquigarrow$	*Ungleichungsbedingungen*

Trotzdem muss man aufpassen, wenn man diese Merkhilfe benutzt. Wir weisen z.B. kurz darauf hin, dass wir in Aufgabe 5.21 im Minimierungsproblem die Ungleichungsbedingungen als Ungleichungen vom Typ '$\geq$*' formuliert haben, während im Maximiximierungsproblem die Ungleichungsbedingungen als Ungleichungen vom Typ '*$\leq$*' formuliert sind.*

Bemerkung 5.23. *Völlig analog kann man auch für allgemeine Optimierungsaufgaben die komplementären Schlupfbedingungen formulieren.*

Aufgabe 5.24. *Formulieren Sie komplementäre Schlupfbedingungen für die Paare von Problemen aus Teilen (b) und (c) von Aufgabe 5.20.*

5.7 Eine Anwendung: Maximale Flüsse und minimale Schnitte

Ist A endliche Menge und $x = (x_i)_{i \in A} \in \mathbb{R}^A$, so benutzen wir die Bezeichnung

$$x(I) := \sum_{i \in I} x_i$$

für Teilmengen I von A.

Ein *Digraph* $G = (V, A)$ ist als ein Paar aus einer endlichen Menge V (*Knotenmenge*) und einer Menge $A \subseteq V^2$ (Menge *gerichteter Kanten*) definiert. Für $u \in V$ und $S \subseteq V$ führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
\delta^+(u) &:= \{(u, v) \, : \, v \in V \setminus \{u\}, \ (u, v) \in A\}\,, \\
\delta^-(u) &:= \{(v, u) \, : \, v \in V \setminus \{v\}, \ (v, u) \in A\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta^+(S) &:= \{(u, v) \, : \, u \in S, \ v \notin S, \ (u, v) \in A\}\,, \\
\delta^-(S) &:= \{(u, v) \, : \, u \notin S, \ v \in S, \ (u, v) \in A\}\,.
\end{aligned}$$

Für $s, t \in V$ mit $s \neq t$ und $c \in \mathbb{R}^A_+$ heißt $N = (G, c, s, t)$ *Flussnetzwerk* auf dem Digraphen G mit *Quelle* s, *Senke* t und dem Vektor c der Kantenkapazitäten. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^A_+$ heißt ein *s-t-Fluss* in N, wenn für alle $u \in V \setminus \{s, t\}$ die Gleichung $x(\delta^-(u)) = x(\delta^+(u))$ (kein Überschuss in Knoten von $V \setminus \{s, t\}$) sowie die Ungleichung $x \leq c$ (vorgegebene Kantenkapazitäten nicht überschritten) erfüllt sind. Der Wert $x(\delta^-(t)) - x(\delta^+(t))$ (Überschuss in t) heißt der Flusswert des Flusses x. Ein Paar (S, T) mit $S, T \subseteq V$ heißt *s-t-Schnitt* von N (bzw. G), wenn $s \in S$, $t \in T$ gilt und V disjunkte Vereinigung von S und T ist. Der Wert $c(\delta^+(S))$ heißt die *Kapazität* des Schnittes (S, T). Die Aufgabe der Bestimmung eines s-t-Flusses in N mit dem maximalen Wert heißt das Problem der maximalen Flüsse.

Wir verwenden die Dualität der linearen Optimierung um die folgende Aussage zu beweisen: in einem Netzwerk kann von der Quelle zur Senke genau so viel transportiert werden, wie es die engste Stelle des Netzwerks zulässt (Etwa beim Berufsverkehr vom Wohnviertel zum Büroviertel.) Hier die formale Formulierung.

Theorem 5.25 (Max-Flow-Min-Cut-Theorem)**.** *Sei $G = (V, A)$ Digraph, seien $s, t \in V$, $s \neq t$. Man betrachte ein Flussnetzwerk $N = (G, c, s, t)$ auf G mit Quelle s, Senke t und einem Vektor $c \in \mathbb{R}^A_+$ der Kantenkapazitäten. Dann gilt: In N ist der maximale Wert eines s-t-Flusses gleich der minimalen Kapazität eines s-t-Schnittes.*

Beweis. Wir formulieren das Problem der maximalen Flüsse in N auf die folgende Weise als ein lineares Problem. Zu jeder Nebenbedingung wird gleich in einem Kreis ein Name der entsprechenden dualen Variablen eingeführt.

$$\begin{aligned}
\max \ \alpha \ &: & \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^A_+, & & & \quad (6) \\
\alpha + x(\delta^+(t)) - x(\delta^-(t)) &= 0, & & & z_t & \quad (7) \\
\beta + x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s)) &= 0, & & & z_s & \quad (8) \\
x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) &= 0 & \forall u \in V \setminus \{s, t\}, & & z_u & \quad (9) \\
x_a &\leq c_a & \forall a \in A. & & y_a & \quad (10)
\end{aligned}$$

Die eigentlich redundante Nebenbedingung (8) und die darin vorkommende redundante Variable β haben wir eingeführt, um die Herleitung des dualen Problems zu vereinfachen. Wir stellen nun die duale Aufgabe auf.

Wir formulieren nun das duale Problem. In einem Kreis notieren wir dabei für jede Nebenbedingung den Namen der primalen Variablen, zu der diese Nebenbedingung entspricht.

$$\min \sum_{a \in A} c_a y_a \ : \qquad y \in \mathbb{R}^A_+,\ z \in \mathbb{R}^V, \tag{11}$$

$$z_t = 1, \qquad \alpha \tag{12}$$

$$z_s = 0, \qquad \beta \tag{13}$$

$$y_a + z_v - z_w \geq 0 \qquad \forall a = (v, w) \in A. \qquad x_a \tag{14}$$

Die Kapazität eines jeden (S, T)-Schnitts ist mindestens so groß wie der maximale Flusswert. Das folgt aus der schwachen Dualität. Denn jeder s-t-Schnitt (S, T) entspricht einer zulässigen Lösung $y \in \mathbb{R}^A_+, z \in \mathbb{R}^V$ von (11)–(14) mit

$$y_{(v,w)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in S, w \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad z_u = \begin{cases} 1 & \text{falls } u \in T \\ 0 & \text{falls } u \in S \end{cases}.$$

Für diese Lösung y, z ist der Wert der Zielfunktion (11) gleich der Kapazität des Schnitts (S, T).

Es bleibt zu zeigen, dass ein Schnitt existiert, dessen Kapazität mit dem maximalen Wert eines s-t-Flusses übereinstimmt. Wir fixieren eine optimale Lösung α^*, β^*, x^* der primalen Aufgabe und eine optimale Lösung y^*, z^* der dualen Aufgabe. Hierbei sei bemerkt, dass die primale sowie duale Aufgabe eine optimale Lösung besitzt (es gibt mehrere Weisen das zu sehen; man kann etwa zeigen, dass die primale Aufgabe zulässig und beschränkt ist).

Mit Hilfe von z^* führen wir den s-t-Schnitt (S, T) mit $T = \{u \in V : z^*_u \geq 1\}$ und $S = V \setminus T$ ein. Nun zeigen wir, dass die Kapazität $c(\delta^+(S))$ dieses Schnitts mit dem dem optimalen Wert α^* der primalen Aufgabe übereinstimmt.

Ist $a = (v, w) \in A$ ein Bogen mit $v \in S$ und $w \in T$ so gilt $z^*_w \geq 1$ und $z^*_v < 1$. Somit ist $y^*_a \geq z^*_w - z^*_v > 0$. Da $y^*_a > 0$ folgt aus der komplementären Schlupfbedingung die Gleichheit $x^*_a = c_a$. Gilt $v \in T$ und $w \in S$, so gilt $z^*_v - z^*_w + y^*_a \geq z^*_v - z^*_w > 0$. Somit folgt aus den komplementären Schlupfbedingungen die Gleichheit $x^*_a = 0$. Wir sehen also, dass $x^*(\delta^+(S)) - x^*(\delta^-(S)) = c(\delta^+(S))$ gilt. Mit anderen Worten transportiert der Fluss x^* von S nach T netto so viele Einheiten wie die Kapazität des Schnitts (S, T). Es ist bekannt und nicht schwer zu zeigen, dass $x^*(\delta^+(S)) - x^*(\delta^-(S))$ mit dem Wert des Flusses x^* übereinstimmt. Somit folgt die Behauptung. □

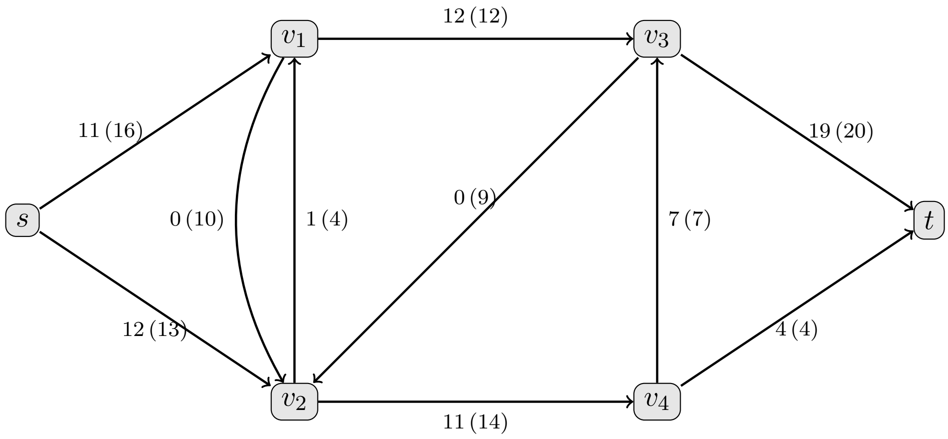
Aufgabe 5.26. *Sei x ein s-t-Fluss auf $N = (G, s, t, c)$. Zeigen Sie dass für jeden Schnitt (S, T) der Wert $x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S))$ mit dem Wert des s-t-Flusses x übereinstimmt.*

Beispiel 5.27. *Die folgende Abbildung präsentiert einen Fluss $x \in \mathbb{R}^A_+$ in einem Flussnetzwerk $N = (G, c, s, t)$ auf einem Digraphen $G = (V, A)$. Die Kanten $a \in A$*

sind durch die Werte x_a *sowie* c_a *(in Klammern markiert). Der Wert des angegebenen Flusses ist* 23*. Man betrachte dafür den Schnitt* (S, T) *mit*

$$S = \{s, v_1, v_2, v_4\} \qquad \text{und} \qquad T = \{v_3, t\}$$

Die Kapazität von (s, t) *ist die Summe der Kapazitäten der Kante* $(v_1, v_3), (v_4, v_3)$ *und* (v_4, t) *und somit gleich* $12 + 7 + 4 = 23$ *(d.h., gleich dem Wert des angegebenen Flusses). Aus dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem folgt nun, dass der angegebene s-t-Fluss den maximalen Wert erreicht.*



5.8 Literaturhinweise

Die primale Simplex-Methode für (std-LP-dual) findet man mehr oder minder in dieser Form in [Sch86]. Auch die Dualität mit der geometrischen Interpretation ist in [Sch86] beschrieben. Die Methode zum Finden einer dual zulässigen Startlösung, einschließlich Beispiel 5.17, ist [BJS90] entnommen.

Zum Max-Flow-Min-Cut-Theorem in § 5.7 stammen Orinalbeiträge von Ford & Fulkerson 1956, Dantzig & Fulkerson 1956, Elias & Feinstein & Shanon 1956. Die präsentierte Darstellung ist eine etwas modifizierte Darstellung aus [Sch86, §7.10] (im Gegensatz zu [Sch86, § 7.10] wird die primale Aufgabe gleich in eine Form gebracht, welche der gewünschten Formulierung der dualen Aufgabe entspricht). Mehr Information zu Flüssen findet man z.B. in [KV12, Kapitel 8] und [CLR04, Kapitel 26]. Das Beispiel in § 5.7 ist aus [CLR04, Kapitel 26, Abbildung 26.5].

6 Seiten konvexer Mengen

6.1 Seiten und verwandte Begriffe

Für eine abgeschlossene konvexe Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ führen wir die folgenden Begriffe und Bezeichnungen ein. Eine konvexe Menge $F \subseteq A$ heißt *Seite* von A, falls für alle $x, y \in A$ die Implikation

$$F \cap \operatorname{relint}([x, y]) \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad [x, y] \subseteq F$$

gilt. Die leere Menge und das gesamte A sind trivialerweise Seiten von A. Die Seiten von A, die weder mit $\emptyset$ noch mit A übereinstimmen, heißen *eigentliche Seiten*. Seiten der Dimension $\dim(A) - 1$ heißen *Facetten* von A. Ein Punkt $a \in A$ heißt *Extremalpunkt* von A, falls $\{a\}$ eine Seite von A ist, d.h., $a \notin \operatorname{relint}([x, y])$ für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Durch $\operatorname{ext}(A)$ wird die Menge aller Extremalpunkte von A bezeichnet. Ist A ein Polyeder, so heißen Extremalpunkte von A Ecken und man verwendet die Bezeichnung $\operatorname{vert}(A) := \operatorname{ext}(A)$.

Aufgabe 6.1. *Zeigen Sie, dass alle Seiten einer abgeschlossenen konvexer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossene konvexe Mengen sind.*

Beispiel 6.2. *Als Beispiel zu Seiten betrachte ein Quadrat und die Minkowski-Summe einer Kreisscheibe und einer Strecke: Diese Mengen kann man analytisch als $[0, 1]^2$ und $\mathbb{B}^2(0, 1) + [-e_1, e_1]$ beschreiben.*

Ist H eine Stützhyperebene von A, so heißt $H \cap A$ eine *exponierte Seite* bzw. eine *Stützmenge* von A. Jede exponierte Seite kann als

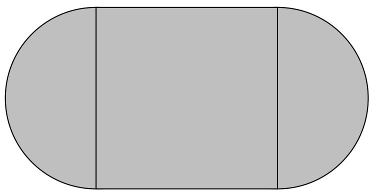
$$F(A, u) = \{a \in A \,:\, \langle u, x\rangle \leq \langle u, a\rangle \;\; \forall x \in A\}$$

mit $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dargestellt werden. Wir nennen $F(A, u)$ die Stützmenge von A in Richtung u. Ein Punkt $a \in A$ heißt *exponierter Punkt*, falls $\{a\}$ eine Stützmenge von A ist, d.h., $F(A, u) = \{a\}$ für ein $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir bezeichnen als $\exp(A)$ die Menge aller exponierten Punkte von A.

Aufgabe 6.3. *Zeigen Sie, dass jede Stützmenge einer abgeschlossenen konvexen Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ eine Seite von A ist.*

Jeder Exponierter Punkt ist ein Extremalpunkt; die Umkehrung gilt im allgemeinen Fall nicht:

Beispiel 6.4. *Man betrachte die Menge $\mathbb{B}^2(0, 1) + [-e_1, e_1]$. Die 0-dimensionalen Seiten $(\pm 1, \pm 1)$ dieser Menge sind keine Stützmengen.*



Ein Strahl $S \subseteq A$ heißt *Extremalstrahl* von A, falls S eine Seite von A ist. Durch $\operatorname{extr}(A)$ bezeichnen wir die Vereinigung aller Extremalstrahlen von A.

6.2 Ecken als zulässige Basislösungen von linearen Problemen

Die folgende Proposition erstellen den Bezug zur linearen Optimierung:

Aufgabe 6.5. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang, seien $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Man betrachte die Polyeder*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b,\; x \geq 0\} \qquad \text{und} \qquad Q = \{y \in \mathbb{R}^m \,:\, yA \leq c\}\,,$$

welche die Mengen der zulässigen Lösungen von (std-LP) bzw. (std-LP-dual) bilden. Zeigen Sie Folgendes:

(a) $\operatorname{vert}(P)$ *ist die Menge aller zulässigen Basislösungen von (std-LP).*

(b) $\operatorname{vert}(Q)$ *ist die Menge aller zulässigen Basislösungen von (std-LP-dual).*

6.3 Eigenschaften des Seitenverbands

Die Menge aller Seiten einer gegeben abgeschlossenen konvexen Menge K nennt man *Seitenverband* von K. Der Seitenverband besitzt die folgenden besonderen Eigenschaften:

Theorem 6.6. *Sei K nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(a) Ist F eine Seite von K und G eine Seite von F, so ist G eine Seite von K. Mit anderen Worten ist "Seite von" eine transitive Relation.

(b) Ist $(F_i)_{i \in I}$ eine Schar aus Seiten von K, so ist $\bigcap_{i \in I} F_i$ eine Seite von K.

(c) K ist disjunkte Vereinigung von $\{\operatorname{relint}(F) : F$ Seite von $K\}$.

Beweis. (a): Seien $x, y \in K$ und $S := [x, y]$. Wenn $\operatorname{relint}(S) \cap G \neq \emptyset$ gilt, so gilt auch $\operatorname{relint}(S) \cap F \neq \emptyset$, da G Teilmenge von F ist. Da F eine Seite von K ist, folgt $S \subseteq F$. Nun, folgt aus $\operatorname{relint}(S) \cap G \neq \emptyset$ und $S \subseteq F$ und der Voraussetzung, dass G eine Seite von F ist die Relation $S \subseteq G$. Wir haben verifiziert, dass G Seite von K ist.

(b): Sei S wie in (a). Angenommen, $\operatorname{relint}(S) \cap \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Dann gilt $\operatorname{relint}(S) \cap F_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Da jedes F_i eine Seiten von K ist, folgt $S \subseteq F_i$. Es folgt $S \subseteq \bigcap_{i \in I} F_i$.

(c): Wir zeigen, dass die relativen Inneren der Seiten von K paarweise disjunkt sind. Seien F_1 und F_2 zwei verschiedene Seiten von K. Angenommen, $\operatorname{relint}(F_1) \cap \operatorname{relint}(F_2)$ wäre nicht leer. Dann existiert ein Punkt $z \in \operatorname{relint}(F_1) \cap \operatorname{relint}(F_2)$. Da $F_1 \neq F_2$, findet man einen Punkt in $F_1 \setminus F_2$ oder $F_2 \setminus F_1$. Wir nehmen OBdA, dass man einen Punkt x in $F_1 \setminus F_2$ findet. Da $x \in F_1$ und $z \in \operatorname{relint}(F_1)$ gilt, existiert ein Punkt $y \in F_1$ mit $z \in \operatorname{relint}([x, y])$. Aus $z \in \operatorname{relint}(F_2) \subseteq F_2$ und $x, y \in K$ folgt nun, da F_2 eine Seite von K ist, dass $[x, y] \subseteq F_2$ gilt. Somit ist x ein Punkt aus F_2, was der Wahl von x widerspricht.

Es bleibt zu zeigen, dass K als Vereinigung der relativen Inneren der Seiten von K darstellbar ist. OBdA nehmen wir an, dass K n-dimensional ist. Wir zeigen die Aussage nach Induktion über n, wobei die Aussage für $n = 0$ trivial ist. Sei $x \in K$ beliebig. Ist $x \in \operatorname{int}(K)$, so liegt $x \in \operatorname{int}(K) = \operatorname{relint}(K)$, wobei K eine Seite von K ist. Ansonsten ist x ein Randpunkt von K und x liegt in einer Stützhyperebene H von K. Es gilt $x \in H \cap K$, wobei $H \cap K$ eine Seite von K ist, deren Dimension höchstens $n - 1$ ist. Nach der Induktionsvoraussetzung, gilt $x \in \operatorname{relint}(F)$, wobei $\operatorname{relint}(F)$ eine Seite von $H \cap K$ ist. Wegen (a) ist F Seite von K. □

6.4 Rezessionskegel

Für eine abgeschlossene konvexe Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$\operatorname{rec}(A) = \{u \in \mathbb{R}^n : A + u \subseteq A\}$$

der *Rezessionskegel* von A.

Proposition 6.7. *Sei A eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{rec}(A)$ *ist ein abgeschlossener konvexer Kegel.*

(b) Für jedes $u \in \mathbb{R}^n$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $u \in \operatorname{rec}(A)$ *(d.h.,* $A + u \subseteq A$*)*

(ii) $x + \lambda u \in A$ *gilt für alle* $x \in A$ *und alle* $\lambda \geq 0$*.*

(iii) $x + \lambda u \in A$ *gilt für ein* $x \in A$ *und alle* $\lambda \geq 0$*.*

(c) Die Menge A *ist genau dann beschränkt, wenn* $\operatorname{rec}(A) = \{0\}$ *gilt.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von (b).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Aus $A+u \subseteq A$ folgt $A+ku \subseteq A$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion über k. Wenn wir nun $\lambda \in [0,1]$ betrachten hat man für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes solche λ

$$A + k\lambda u = (1-\lambda)A + \lambda A + k\lambda u = (1-\lambda)A + \lambda(A+ku) \subseteq (1-\lambda)A + \lambda A = A.$$

Das zeigt, dass man auch $A + \lambda u \subseteq A$ für alle $\lambda \geq 0$ hat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $x \in A$ wie (iii). Wir betrachten ein beliebiges $a \in A$ und zeigen $a + u \in A$. Für jedes $\lambda \geq 0$ hat man $x + \lambda u \in A$. Ist $\lambda > 1$ so gilt wegen der Konvexität von A

$$(1 - \frac{1}{\lambda})a + \frac{1}{\lambda}(x + \lambda u) \in A$$

d.h.,

$$(1 - \frac{1}{\lambda})a + \frac{1}{\lambda}x + u \in A$$

Für $\lambda \to \infty$ erhält man mit der Berücksichtigung der Abgeschlossenheit von A, dass $a + u \in A$ gilt.

(a): Die Abgeschlossenheit von $\operatorname{rec}(A)$ lässt sich direkt aus der Definition herleiten. Wir zeigen, dass $\operatorname{rec}(A)$ ein Kegel ist. Seien $u, v \in \operatorname{rec}(A)$ und $\alpha, \beta \geq 0$ beliebig. Aus (b) folgt, dass $\alpha u, \beta v \in \operatorname{rec}(A)$, das heißt $A + \alpha u \subseteq A$ und $A + \beta v \subseteq A$. Es folgt $A + \alpha u + \beta v \subseteq A + \beta v \subseteq A$. Also gilt $\alpha u + \beta v \in \operatorname{rec}(A)$.

(c): Ist die Menge A beschränkt, so ist $\operatorname{rec}(A)$ offensichtlich gleich $\{0\}$. Ist A unbeschränkt, so existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus Punkten von A mit $|x_n| \to \infty$ für $n \to \infty$. OBdA sei $x_0 \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir betrachten die Einheitsvektoren $u_n = (x_n - x_0)/|x_n - x_0|$. Die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Einfachheit halber nehmen wir an, dass u_n gegen u konvergiert. Nun zeigen wir, dass für jedes $\lambda \geq 0$ man $x_0 + \lambda u \in A$ hat. Daraus folgt $u \in \operatorname{rec}(A)$. Ist n groß genug, so hat man $|x_n - x_0| \geq \lambda$. Da $x_0, x_n \in A$ gilt, folgt $x_0 + \lambda u_n \in A$. Der Grenzwertübergang für $n \to \infty$ ergibt $x_0 + \lambda u \in A$. $\square$

6.5 Linealitätsraum

Die Menge $\operatorname{lineal}(A) := \operatorname{rec}(A) \cap (-\operatorname{rec}(A))$ heißt der Linealitätsraum von A. Angesichts der vorigen Proposition lässt sich der Linealitätsraum auf folgende Weise charakterisieren.

Für Teilmengen A, B, C von $\mathbb{R}^n$ schreiben wir $A = B \oplus C$ und sagen, dass A direkte Summe von B und C ist, wenn $A = B + C$ gilt und jedes $a \in A$ eindeutig als die Summe $a = b + c$ mit $b \in B$ und $c \in C$ darstellbar ist.

Wir nennen eine konvexe Menge *geradenfrei*, falls diese Menge keine Geraden enthält.

Proposition 6.8. *Sei A nichtleere abgeschlossene, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{lineal}(A)$ *ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.*

(b) Für jedes $u \in \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- *(i)* $u \in \operatorname{lineal}(A)$
- *(ii)* $x + \lambda u$ *gilt für alle $x \in A$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *(iii)* $x + \lambda u$ *gilt für ein $x \in A$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(c) Man hat $A = B \oplus \operatorname{lineal}(A)$ für eine abgeschlossene geradenfreie konvexe Menge B.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von (b).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, (i) ist erfüllt. Sei $u \in \operatorname{lineal}(A)$. Dann gilt $u, -u \in \operatorname{rec}(A)$. Dann gilt $u, -u \in \operatorname{rec}(A)$. Nun folgt (ii) aus der vorigen Proposition.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i): folgt direkt aus der vorigen Proposition (Implikation von (iii) nach (i)).

Nun können wir (a) verifizieren. Seien $u, v \in \operatorname{lineal}(A)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt aus (b), dass $\alpha u, \beta v \in \operatorname{lineal}(A)$ gilt. Das heißt $\pm\alpha u, \pm\beta v \in \operatorname{rec}(A)$. Da $\operatorname{rec}(A)$ ein konvexer Kegel ist, folgt $\alpha u + \beta v \in \operatorname{rec}(A)$ und $-(\alpha u + \beta v) \in \operatorname{rec}(A)$. Das ergibt $\alpha u + \beta v \in \operatorname{lineal}(A)$.

(c): Wenn A keine Geraden enthält, so hat man $\operatorname{lineal}(A) = \{0\}$ und $B = A$. Also nehmen wir an, A enthält Geraden, sodass $\operatorname{lineal}(A) \neq \{0\}$ gilt. Wir wählen einen Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n = U \oplus \operatorname{lineal}(A)$ und setzen $B := U \cap A$. Die Inklusion $B \oplus \operatorname{lineal}(A) \subseteq A$ ist klar. Sei $a \in A$. Dann besitzt a eine eindeutige Darstellung $a = b + c$ mit $b \in U$ und $c \in \operatorname{lineal}(A)$. Man hat $b = a - c$ mit $a \in A$ und $-c \in \operatorname{lineal}(A)$. Das heißt $b \in A$ und somit $b \in U \cap A = B$. Das zeigt, $A = B \oplus \operatorname{lineal}(A)$. Es bleibt zu verifizieren, dass B keine Gerade enthält. Wenn B eine Gerade G enthalten würde, so hätte man $G \oplus \operatorname{lineal}(A) \subseteq A$. Da die Summe $G \oplus \operatorname{lineal}(A)$ direkt ist, ist die Richtung $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der Geraden G nicht in $\operatorname{lineal}(A)$. Anderseits gilt $G \subseteq A$ und somit liegt die Richtung u der Geraden G in $\operatorname{lineal}(A)$. Das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung 6.9. *Ist P ein nichtleeres Polyeder in $\mathbb{R}^n$, das als $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben ist, so gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{rec}(P) &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le 0\}, \\ \operatorname{lineal}(P) &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}. \end{aligned}$$

6.6 Extremaldarstellungen konvexer Mengen

Lemma 6.10. *Sei $n \ge 2$ und sei A eine nichtleere abgeschlossene geradenfreie konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $A = \operatorname{conv}(\operatorname{relbd}(A))$.*

Beweis. OBdA sei $\dim(A) = n$. Wir zeigen $A = \operatorname{conv}(\operatorname{bd}(A))$. Es reicht die Inklusion $A \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{bd}(A))$ zu verifizieren, weil die Inklusion $\operatorname{conv}(\operatorname{bd}(A)) \subseteq A$ offensichtlich erfüllt ist. Man hat $A = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{bd}(A)$. Es reicht also die Inklusion $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{bd}(A))$ zu verifizieren.

Angenommen, die vorige Inklusion wäre nicht erfüllt. Dann existiert ein $x \in \operatorname{int}(A)$ mit $x \notin \operatorname{conv}(\operatorname{bd}(A))$. Nach dem Trennsatz für eine konvexe Menge und einen Punkt existieren Halbräume $H^- := H^{\leq}_{u,\alpha}$ und $H^+ := H^{\geq}_{u,\alpha}$ mit $x \in H^-$ und $\operatorname{conv}(\operatorname{bd}(A)) \subseteq H^+$. Somit gilt für jeden Punkt $y \in \operatorname{int}(H^-)$ die Bedingung $[x, y] \cap \operatorname{bd}(A) = \emptyset$, da man $\operatorname{bd}(A) \subseteq H^+$ hat. Daraus folgt, dass ein solches y in A liegen muss, da man sonst auf der Strecke von $[x, y]$ einen Punkt y' finden würde, der in $\operatorname{bd}(A)$ liegt. Also ist $\operatorname{int}(H^-)$ Teilmenge von A. Das widerspricht der Voraussetzung, dass A geradenfrei ist. □

Theorem 6.11. *Sei A eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die keine Geraden enthält. Dann gilt:*

(a) $A = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A) \cup \operatorname{extr}(A))$

(b) $A = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A)) + \operatorname{rec}(A)$.

(c) Ist A beschränkt, so gilt $A = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A))$.

Beweis. (a): OBdA sei $\dim(A) = n$. Wir zeigen (a) durch Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Sei $n \geq 2$ und wir nehmen an, dass die Formel in den Dimensionen 1 bis $n - 1$ gilt. Nach Lemma 6.10 ist $A = \operatorname{conv}(\operatorname{bd}(A))$. Sei $x \in \operatorname{bd}(A)$ beliebig. Dann existiert eine Stützhyperebene H von A mit $x \in A$. Wir betrachten die Seite $F := H \cap A$. Man hat $\dim(F) \leq n - 1$. Nach der Indukstionsvoraussetzung gilt $x \in F = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(F) \cup \operatorname{extr}(F))$, wobei $\operatorname{ext}(F) \subseteq \operatorname{ext}(A)$ und $\operatorname{extr}(F) \subseteq \operatorname{extr}(A)$ erfüllt ist. Es folgt $\operatorname{bd}(A) \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A) \cup \operatorname{extr}(A))$. Also gilt $\operatorname{conv}(\operatorname{bd}(A)) \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A) \cup \operatorname{extr}(A))$. Die Inklusion $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A) \cup \operatorname{extr}(A)) \subseteq A$ ist trivial.

(b): Man hat $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A)) + \operatorname{rec}(A) \subseteq \operatorname{conv}(A) + \operatorname{rec}(A) \subseteq A + \operatorname{rec}(A) \subseteq A$. Wir verizieren die Inklusion $A \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A)) + \operatorname{rec}(A)$ mit Hilfe von (a). Wegen A reicht es $\operatorname{ext}(A) \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A)) + \operatorname{rec}(A)$ und $\operatorname{extr}(A) \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A)) + \operatorname{rec}(A)$ zu verifizeren. Das Erste ist rivial. Um das zweite zu zeigen, betrachten wir einen Beliebigen Extremalstrahl S von A mit $S = \{p + \lambda u : \lambda \geq 0\}$ mit $p \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Der Endpunkt p dieses Strahls ist Extremalpunkt von S. Da S Seite von A ist, ist p auch ein Extremalpunkt von A. Es gilt also $p \in \operatorname{ext}(A)$. Da S Teilmenge von A ist, folgt $u \in \operatorname{rec}(A)$ und somit auch $\lambda u \in \operatorname{rec}(A)$ für alle $\lambda \geq 0$. Das zeigt $S \subseteq \operatorname{ext}(A) + \operatorname{rec}(A)$.

Man hat $\operatorname{extr}(A) \subseteq \operatorname{ext}(A) + \operatorname{rec}(A)$ und somit folgt die Behauptung aus (a).

(c) folgt direkt aus (b) zusammen mit Teil c) aus Proposition 6.7 □

6.7 Seiten von Polytopen

Proposition 6.12. *Sei P ein Polytop, welches als $P = \operatorname{conv}(X)$ durch eine endliche Teilmenge X von $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{vert}(P) \subseteq X$.

(b) Ist H eine Stützhyperebene von P, so ist die exponierte Seite $F = P \cap H$ ein Polytop, das man als $F = \operatorname{conv}(H \cap X)$ darstellen kann.

(c) Ist F exponierte Seite von P und G exponierte Seite von F, so ist G exponierte Seite von P.

Beweis. (a): Man betrachte eine beliebige Ecke $v \in \text{vert}(P)$. Nach dem Satz von Carathéodory existieren affin unabhängige Punkte $x_1, \ldots, x_k$ mit $v \in \text{conv}(x_1, \ldots, x_k)$. Sei k kleinstmögliche Zahl mit der vorigen Eigenschaft. Dann gilt $v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ und $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Es gilt $k = 1$. Denn sonst wäre $k \geq 2$. Dann ist $v = \lambda p + (1-\lambda) q$ mit $0 < \lambda < 1$, $p = x_1$ und $q = \sum_{i=2}^k \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i$. Da $x_1, \ldots, x_k$ affin unabhängig sind, gilt $p \neq q$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass v eine Ecke ist.

(b): Die Inklusion $\text{conv}(H \cap X) \subseteq H \cap \text{conv}(X)$ ist trivial. Wir zeigen $H \cap \text{conv}(X) \subseteq \text{conv}(H \cap X)$. Wir können H als $H = H(u, \alpha)$ mit $P \subseteq H^{\leq}(u, \alpha)$ formulieren. Das heißt $\langle u, p \rangle \leq \alpha$ und für alle $p \in P$. Sei nun $p \in H \cap \text{conv}(X)$. Dann gilt $\langle p, u \rangle = \alpha$ und $p = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ mit $x_1, \ldots, x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ und $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$. Man hat $\langle u, x_i \rangle = \alpha$ für alle $i \in [k]$. Man hat

$$0 = \alpha - \langle p, u \rangle = \alpha - \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, u \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\alpha - \langle x_i, u \rangle).$$

Wegen der Ungleichung $\alpha - \langle x_i, u \rangle \geq 0$ und $\lambda_i > 0$ für alle $i \in [k]$, folgt nun aus der vorigen Gleichung, dass $\langle x_i, u \rangle = \alpha_i$ für alle $i \in [k]$ gilt. Somit haben wir $x_i \in H$ für alle $i \in [k]$, und folglich $p \in \text{conv}(H \cap X)$.

(c): Wir betrachten Stützhalbräume $H^{\leq}(u, \alpha)$ und $H^{\leq}(v, \beta)$ von P, für welche die entsprechenden Stützhyperebenen $H(u, \alpha)$ und $H(v, \beta)$ die exponierte Seiten F von P und die exponierte Seite G von F durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} F &= H(u, \alpha) \cap P, \\ G &= H(v, \beta) \cap F \end{aligned}$$

bestimmen. Die Behauptung (b) für die Seite F von P ergibt $F = \text{conv}(X \cap H(u, \alpha))$. Nun ergibt die Behauptung (b) für die Seite G des Polytops F die Gleichheit $G = \text{conv}(X \cap H(u, \alpha) \cap H(v, \beta))$.

Um zu zeigen, dass G eine exponierte Seite von P ist, bestimmen wir nun einen Stützhalbraum der Form $H^{\leq}(u + \varepsilon v, \alpha + \varepsilon \beta)$ von P mit $\varepsilon > 0$, für welchen die entsprechende Stützhyperebene $H(u + \varepsilon v, \alpha + \varepsilon \beta)$ von P, die Seite G durch die Gleichung

$$G = H(u + \varepsilon v, \alpha + \varepsilon \beta) \cap P$$

bestimmt.

Wir zeigen, dass für eine geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$, der Halbraum $H^{\leq}(u + \varepsilon v, \alpha + \varepsilon \beta)$ das Polytop P stützt. Sei $x \in X$ beliebig.

Im Fall $x \notin H(u, \alpha)$ gilt

$$\langle x, u \rangle < \alpha,$$

da $H^{\leq}(u, \alpha)$ ein Stützhalbraum von P ist. Da X endlich ist, kann man nun ein genügend kleines und von x unabhängiges $\varepsilon > 0$ wählen, für welches die Ungleichung

$$\langle x, u + \varepsilon v \rangle < \alpha + \varepsilon \beta$$

erfüllt ist.

Im Fall $x \in H(u, \alpha) \setminus H(v, \beta)$ gilt $\langle x, u \rangle = \alpha$ wegen $x \in H(u, \alpha)$ und

$$\langle x, u + \varepsilon v \rangle = \alpha + \varepsilon \langle x, v \rangle < \alpha + \varepsilon \beta,$$

da G eine Seite von F ist, welche durch den Stützhalbraum $H^{\leq}(v, \beta)$ gegeben wurde.

Im Fall $x \in H(u, \alpha) \cap H(v, \beta)$ gilt offensichtlich die Gleichheit

$$\langle x, u + \varepsilon v \rangle = \alpha + \varepsilon \beta.$$

(Wir bemerken, dass dieser Fall auftritt, da nach der Voraussetzung $G \neq \emptyset$ und somit $X \cap H(u, \alpha) \cap H(v, \beta) \neq \emptyset$ erfüllt ist).

Die vorigen Ungleichungen für $x \in X$ zeigen, dass $H^{\leq}(u + \varepsilon v, \alpha + \varepsilon \beta)$ ein Stützhalbraum von P ist und dass $G = P \cap H(u + \varepsilon v, \alpha + \varepsilon \beta)$ gilt. □

Theorem 6.13. *Sei P ein Polytop in $\mathbb{R}^n$. Dann ist jede eigentliche Seite von P stets eine exponierte Seite von P.*

Beweis. OBdA sei $\dim(P) = n$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei $n \geq 2$ und sei die Behauptung für Polytope der Dimensionen $1, \ldots, n-1$ bereits verifiziert. Sei F eigentliche Seite von P. Dann ist $\operatorname{relint}(F) \cap \operatorname{int}(P) = \emptyset$. Somit ist $\operatorname{relint}(F) \subseteq \operatorname{bd}(P)$. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $p \in \operatorname{relint}(F)$. Der Punkt p liegt in einer Stützhyperebene $H(u, \alpha)$ von P für einen Stützhalbraum $H^{\leq}(u, \alpha)$ von P. Wir zeigen, $F \subseteq H(u, \alpha)$. Sei $x \in F \setminus \{p\}$ beliebig. Wegen $p \in \operatorname{relint}(F)$ existiert ein $y \in F$ mit $p = (1-\lambda)x + \lambda y$ und $0 < \lambda < 1$. Wegen $P \subseteq H^{\leq}(u, \alpha)$ gilt $\langle x, u \rangle \leq \alpha$ und $\langle y, u \rangle \leq \alpha$. Wegen $p \in H(u, \alpha)$ gilt

$$\alpha = \langle p, u \rangle = (1 - \lambda) \langle x, u \rangle + \lambda \langle y, u \rangle .$$

Es folgt nun, dass $\langle x, u \rangle = \langle y, u \rangle = \alpha$ gilt. Also ist $x \in H(u, \alpha)$. Dies zeigt, dass F eine Seite der exponierten Seite $G := H(u, \alpha) \cap P$ von P ist, mit $\dim(G) \leq n - 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist F eine exponierte Seite des Polytopes G. Nach der vorigen Proposition ist nun F eine exponierte Seite von P. □

Bemerkung 6.14. *Unter anderem zeigen die Resultate dieses Abschnitts, dass ein Polytop nur endlich viele Seiten besitzt.*

6.8 Polytope als beschränkte Polyeder

Theorem 6.15. *Für eine Teilmenge P von $\mathbb{R}^n$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) P ist Polytop.

(ii) P ist beschränktes Polyeder.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei P Polytop. Da man $\operatorname{aff}(P)$ durch ein endliches System von linearen Gleichungen und somit durch ein endliches System von linearen Ungleichung beschreiben kann, nehmen wir OBdA an, dass $\operatorname{aff}(P)$ mit $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt, d.h. $\dim(P) = n$. Wir bestimmen nun ein System von linearen Ungleichungen, das auf jedem Punkt von P erfüllt und auf Punkten außerhalb von P nicht erfüllt ist. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus P$.

Wir zeigen, dass man eine Facette F von P findet mit der Eigenschaft, dass P und x auf unterschiedlichen Seiten der Hyperebene $H(u, \alpha) = \operatorname{aff}(F)$ liegen. Sei V die Vereinigung aller affinen Räume $\operatorname{aff}(\{x\} \cup Y)$ mit $Y \subseteq \operatorname{vert}(P)$ und $\dim(\operatorname{aff}(\{x\} \cup Y)) < n$. Wegen $\dim(P) = n$ findet man einen Punkt $y \in \operatorname{int}(P) \setminus V$. Die Strecke $[x, y]$ schneidet den Rand von P in einem Punkt z. Der Punkt z liegt im relativen

Inneren einer eigentlichen Seite F von P. Wir behaupten $\dim(F) = n-1$. Sonst wäre $\dim(F) < n-1$. Daraus folgt

$$y \in \operatorname{aff}(x,z) \in \operatorname{aff}(\{x\} \cup F) = \operatorname{aff}(\{x\} \cup \operatorname{conv}(\operatorname{vert}(F)) = \operatorname{aff}(\{x\} \cup \operatorname{vert}(F)),$$

da $\dim(F) < n-1$ folgt daraus $\dim(\operatorname{aff}(\{x\} \cup \operatorname{vert}(F))) \leq n-1$. Also gilt $y \in V$, was der Wahl von y widerspricht.

Nach der Konstruktion gilt $\langle y, u\rangle < \alpha$ und $\langle z, u\rangle = \alpha$. Da $z \in \operatorname{relint}([x,y])$ gilt, folgt daraus $\langle x, u\rangle > \alpha$.

Seien nun $F_1, \ldots, F_k$ alle Facetten von P und wir betrachten die entsprechenden Stützhalbräume $H^{\leq}(u_i, \alpha_i)$ mit $i \in [k]$. Wir haben oben die Inklusion $\bigcap_{i=1}^k H^{\leq}(u_i,\alpha_i) \subseteq P$ verifiziert. Die umgekehrte Inklusion ist trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wieder kann man OBdA voraussetzen, dass $\dim(P) = n$ erfüllt ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Angenommen, $n \geq 2$ und die Behauptung ist in den Dimensionen $1, \ldots, n-1$ bereits bewiesen. Wir betrachten die Darstellung $P = \bigcap_{i=1}^k H^{\leq}(u_i, \alpha_i)$ von P als Durchschnitt endlich vieler Halbräume. Für jedes $i \in [k]$ führen wir das Polytop $P_i = P \cap H(u_i, \alpha_i)$ ein.

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $P_i = \operatorname{conv}(X_i)$ für eine endliche Menge X_i (im Fall $P_i = \emptyset$ wählt man $X_i = \emptyset$). Sei $x \in P$ beliebig. Wir betrachten eine beliebige Gerade G durch x. Da P beschränkt ist, ist $P \cap G$ eine Strecke mit Endpunkten a und b. Man hat

$$a, b \in \operatorname{bd}(P) \subseteq \bigcup_{i=1}^k P_i = \bigcup_{i=1}^k \operatorname{conv}(X_i) \subseteq \operatorname{conv}(\bigcup_{i=1}^k X_i)$$

Es folgt $x \in \operatorname{conv}(\bigcup_{i=1}^k X_i)$. Also gilt $P \subseteq \operatorname{conv}(\bigcup_{i=1}^k X_i)$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial, da jedes X_i Teilmenge von P ist. □

6.9 Minkowski-Weyl-Theorem

Theorem 6.16 (Minkowski-Weyl)**.** *Für eine Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) C ist ein polyedrischer Kegel, d.h., $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_1, x\rangle \geq 0, \ldots, \langle a_m, x\rangle \geq 0\}$ für gewisse $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ mit $m \in \mathbb{N}_0$.

(ii) C ist ein endlich erzeugter Kegel, d.h., $C = \operatorname{cone}(u_1, \ldots, u_k)$ für gewisse Vektoren $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei C ein Kegel wie in (i). OBdA wird angenommen, dass $\operatorname{lineal}(C) = \{0\}$. Ansonsten reicht es, einen Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n = \operatorname{lineal}(C) \oplus U$ zu betrachten und die Behauptung für den Kegel $C \cap U$ im Raum U zu beweisen. Wir nehmen also an, dass $\operatorname{lineal}(C) = \{0\}$ gilt. Man hat

$$\operatorname{lineal}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle = 0 \ \forall i \in [m]\} = \{0\}.$$

Es folgt, dass die Menge

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_1 + \cdots + a_m, x\rangle = 1, \ \langle a_i, x\rangle \geq 0 \ \forall i \in [m]\}$$

ein beschränktes Polyeder ist (da der Rezessionskegel dieser Menge gleich $\{0\}$ ist). Nach Theorem 6.8 hat man $P = \mathrm{conv}(u_1, \ldots, u_k)$ für gewisse $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Nun sieht man direkt, dass $C = \mathrm{cone}(u_1, \ldots, u_k)$ gilt.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Aus der oben verifizierten Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt, dass

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \langle u_i, y\rangle \geq 0 \ \forall i \in [k]\} = \mathrm{cone}(a_1, \ldots, a_m) \qquad (*)$$

für gewisse $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Nun zeigen wir

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle \geq 0 \ \forall i \in [m]\}.$$

Ist $x \in C$, so gilt $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$. Daraus folgt mit der Berücksichtigung von (*) die Ungleichung

$$\langle a_j, x\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle u_i, a_j\rangle \geq 0.$$

Ist $x \notin C$, so existiert nach dem Trennsatz für abgeschlossene konvexe Kegel ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle y, u_i\rangle \geq 0$ für alle $i \in [k]$ und $\langle x, y\rangle < 0$. Aus (*) folgt nun, dass $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ gilt. Somit kann der negative Wert $\langle x, y\rangle < 0$ als

$$\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle a_i, x\rangle$$

dargestellt werden. Da $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nicht negativ sind, gilt $\langle a_i, x\rangle < 0$ für mindestens ein $i \in [m]$. $\square$

6.10 Literaturhinweise

Alle Abschnitte bis auf Abschnitt 6.2 basieren auf [Sch93]. Fast alle Beweise dieses Kapitels stammen ebenfalls aus [Sch93].

7 Konvexe Funktionen und konvexe Optimierung

7.1 Begriffe, Beispiele und Grundeigenschaften

Sei A Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$. Die Menge

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x,t) \in A \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$$

heißt der *Epigraph* der Funktion f. Die Funktion f heißt *konvex*, wenn der Definitionsbereich A konvex ist und $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn der Epigraph von f eine konvexe Menge ist. Die Funktion f heißt konkav, wenn die Funktion $-f$ konvex ist, d.h., der Definitionsbereich A ist konvex und es gilt $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in [0,1]$.

Affine Funktionen sind gleichzeitig konvex und konkav. Die Normen sind konvexe Funktionen. Die Exponentialfunktion ist eine konvexe Funktion in einer Variablen. Positiv definite quadratische Formen sind konvexe Funktionen. Die konische Kombination endlich vieler konvexer Funktionen sowie das Maximum endlich vieler konvexer Funktionen sind konvexe Funktionen.

Für konvexe Funktionen gilt die sogenannte Jensen'sche Ungleichung:

Aufgabe 7.1 (Jensensch'sche Ungleichung)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) \le \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_k f(x_k)$$

für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \ge 0$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$.

Ist $f : A \to \mathbb{R}$ konvex, so heißt die Aufgabe der Form

$$\inf \{f(x) : x \in A\}$$

Aufgabe der konvexen Optimierung. Für die algorithmische Analyse der Aufgabe ist natürlich wichtig wie f und die zugrundeliegende Menge A gegeben sind. Sehr oft ist A durch eine System $g_1 \le 0, \ldots, g_k \le 0$ für gewisse konvexe Funktionen $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert. Ist $A = \mathbb{R}^n$ so spricht man von einer unrestringierten Aufgabe der konvexen Optimierung.

Die Aufgabe der linearen Optimierung ist natürlich eine spezielle Aufgabe der konvexen Optimierung. Neben der linearen Optimierung bildet die (restringierte und unrestringierte) konvexe Optimierung den Kern der klassischen Optimierung. Das heißt, Methoden zur (globalen) Lösung weiterer Klassen von Optimierungsaufgaben bestehen in der Regel aus der Reduktion zu Problemen der linearen bzw. konvexen Optimierung. Des weiteren sind viele Aufgaben aus den Anwendungen direkt konvex, wie z.B. die Minimierung von $f(x) = \sum_{i=1}^k w_i |a_i - x|$ über alle $x \in \mathbb{R}^n$ für gegebenen 'Standorte' $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^d$ und Gewichte $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}_+$ $(k \in \mathbb{N})$ oder die Aufgabe der Minimierung von ρ über alle $(x, \rho) \in \mathbb{R}^n$ unter den Nebenbedingungen $|x - a_i| \le \rho$ für $i \in [k]$. Die Aufgabe $Ax = b$ der linearen Algebra kann als unrestringierte konvexe Optimierungsaufgabe der Minimierung von $|Ax - b|^2$ über $x \in \mathbb{R}^n$ interpretiert werden. Einige wichtige Ansätze zur numerischen Lösung von $Ax = b$ basieren auf dieser Interpretation. In unterschiedlichen Anwendungsbereichen führen Ansätze zur Lösung von randomisierten linearen Aufgaben zu konvexen Problemen.

Das besondere an der konvexen Optimierung ist die Tatsache, dass die lokale Optimierung äquivalent zur globalen Optimierung ist:

Aufgabe 7.2. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvex. Für jedes $a \in A$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) Die Funktion f erreicht ihr lokales Minimum an der Stelle a, d.h., für ein $\varepsilon > 0$ gilt $f(a) \le f(x)$ für alle $x \in A \cap \mathbb{B}^n(a, \varepsilon)$.

(ii) Die Funktion f erreicht ihr globales Minimum an der Stelle a, d.h., $f(a) \le f(x)$ für alle $x \in A$.

7.2 Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Die meisten Ansätze zur Lösung von konvexen Aufgaben basieren auf den notwendigen Bedingungen der Optimalität mit Hilfe von Ableitungen. Zwar ist eine beliebige konvexe Funktion im allgemeinen Fall nicht überall differenzierbar, sie ist aus der Sicht der Analysis aber durchaus 'freundlich'. Im folgenden Theorem wird gezeigt, dass eine beliebige Funktion 'sehr nah dran ist', differenzierbar zu sein.

Theorem 7.3. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion auf einer nichtleeren offenen konvexen Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(a) Die Funktion f ist stetig.

(b) Die Einschränkung von f auf jede kompakte Teilmenge ist Lipschitz-stetig, d.h., für jede kompakte Teilmenge K von f existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$$

für alle $x, y \in K$.

Beweis. (a): Sei $a \in A$. Wir fixieren ein Polytop $P = \operatorname{conv}(p_1, \ldots, p_k)$ mit $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ derart, dass a im Inneren von P liegt. Z.B. können wir als P einen n-dimensionalen Würfel oder etwa ein n-dimensionales Simplex wählen.

Jedes $x \in P$ kann als Konvexkombination

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \qquad \text{mit} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \ge 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

dargestellt werden. Also folgt aus der Jensen'schen Ungleichung die Abschätzung

$$f(x) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(p_i) \le M := \max\{f(p_1), \ldots, f(p_k)\}.$$

Mit anderen Worten erreicht die Funktion f auf dem Polytop P ihr Maximum in einem der Punkte $p_1, \ldots, p_k$. Sei nun $\rho > 0$ ein Wert mit $\mathbb{B}^n(a, \rho) \subseteq P$. Jeder Punkt y aus $\mathbb{B}^n(a, \rho)$ kann als $y = a + \alpha u$ mit $|u| = \rho$ und $\alpha \in [0, 1]$ dargestellt werden. Der Punkt y liegt auf der Strecke $[a, a + u]$ und kann somit als Konvexkombination der Endpunkte dieser Strecke dargestellt werden:

$$y = a + \alpha u \qquad \Leftrightarrow \qquad y = (1 - \alpha)a + \alpha(a + u).$$

Aus der Konvexität von f folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} f(y) &= f((1 - \alpha)a + \alpha(a + u)) \\ &\le (1 - \alpha)f(a) + \alpha f(a + u) \\ &\le (1 - \alpha)f(a) + \alpha M \end{aligned}$$

Das ergibt $f(y) - f(a) \le \alpha(M - f(a))$. Wir haben gezeigt, dass $f(y)$ nicht viel höher als $f(a)$ sein kann. Anderseits liegt der Punkt a auf der Strecke $[a - u, y]$, sodass man a als Konvexkombination der Endpunkte dieser Strecke darstellen kann:

$$\begin{aligned} y = a + \alpha u \qquad &\Leftrightarrow \qquad a = y + \alpha(-u) \\ &\Leftrightarrow \qquad (1 + \alpha)a = y + \alpha(a - u) \\ &\Leftrightarrow \qquad a = \frac{1}{1 + \alpha} y + \frac{\alpha}{1 + \alpha}(a - u). \end{aligned}$$

Die Konvexität von f ergibt

$$\begin{aligned} f(a) &\le \frac{1}{1 + \alpha} f(y) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} f(a - u) \\ &\le \frac{1}{1 + \alpha} f(y) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} M. \\ \Rightarrow \qquad f(a) - f(y) &\le \alpha(M - f(a)). \end{aligned}$$

Die Schranken an $f(y) - f(a)$ und $f(a) - f(y)$ können nun als

$$|f(y) - f(a)| \leq \alpha(M - f(a))$$

zusammengefasst werden. Nach der Wahl von α und u gilt $\alpha = \frac{|y-a|}{\rho}$. Das zeigt

$$|f(y) - f(a)| \leq \frac{M - f(a)}{\rho}|y - a|.$$

für alle $y \in \mathbb{B}^n(a, \rho)$. Es folgt, dass $f(y) \to f(a)$ für $y \to a$ gilt.

(b): Sei K kompakte Teilmenge von A. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$K_\varepsilon := K + \mathbb{B}^n(0, \varepsilon) \subseteq A.$$

Wenn das nicht der Fall wäre, so könnte man Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_n \in K, y_n \in \mathbb{R}^n \setminus A$ und $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von K besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_n)_{n\in N}$, deren Grenzwert x in K liegt. Es folgt, dass der Punkt $x \in K \subseteq A$ ein Randpunkt von A ist, da einerseits $x \in K$ und somit in A liegt und andererseits die Ungleichung $|x - y_n| \leq |x - x_n| + |x_n - y_n| < |x - x_n| + \frac{1}{n}$ für alle $n \in N$ gilt, wobei der Punkt y_n für alle n außerhalb von A liegt und die rechte Seite für $n \in N$ und $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Seien $x, y \in K$ mit $x \neq y$ beliebig. Man betrachte den Punkt

$$z := y + \frac{\varepsilon}{|y - x|}(y - x) \in K_\varepsilon.$$

Wir können den Punkt y als Konvexkombination von x und z darstellen:

$$y = (1 - \lambda)x + \lambda z,$$

wobei man $\lambda \in [0, 1]$ folgendermaßen berechnen kann:

$$\begin{aligned}
& & y - x &= \lambda(z - x) \\
&\Rightarrow & |y - x| &= \lambda|z - x| \\
&\Rightarrow & |y - x| &= \lambda(1 + \frac{\varepsilon}{|y - x|})|y - x| \\
&\Rightarrow & \lambda &= \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|}.
\end{aligned}$$

Die Konvexität von f ergibt $f(y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(z)$, woraus man

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(f(z) - f(x))$$

folgert. Da f wegen (a) stetig ist und die Menge K_ε kompakt ist, folgt, dass die Funktion f auf K_ε das Maximum und das Minimum erreicht. Es folgt

$$f(z) - f(x) \leq \max_{K_\varepsilon} f - \min_{K_\varepsilon} f =: c.$$

Also gilt

$$f(y) - f(x) \leq \lambda c = \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|}c \leq \frac{c}{\varepsilon}|y - x|.$$

Da die Ungleichung $f(y)-f(x) \leq \frac{c}{\varepsilon}|y-x|$ für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gezeigt wurde, folgt durch Vertauschen von x und y auch $f(x)-f(y) \leq \frac{c}{\varepsilon}|y-x|$ und somit

$$|f(y)-f(x)| \leq \frac{c}{\varepsilon}|y-x| \qquad \forall x, y \in K.$$

Wir haben nachgewiesen, dass f auf K Lipschitz-stetig ist. □

Aufgabe 7.4. *eine konvexe Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten konvexen Menge ist nicht unbedingt Lipschitz-stetig. Betrachte etwa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ auf $[-1,1]$ und zeige, dass f nicht Lipschitz-stetig ist.*

7.3 Differenzierbarkeit konvexer Funktionen einer Variablen

Theorem 7.5. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres, offenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt:*

(a) Die Funktion f besitzt in jedem Punkt $x \in I$ die linke sowie rechte Ableitung, d.h., die Grenzwerte

$$f'_r(x) := \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$f'_\ell(x) := \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existieren und sind endlich.

(b) Für alle $x, y \in I$ gilt

$$x < y \qquad \Rightarrow \qquad f'_\ell(x) \leq f'_r(x) \leq f'_\ell(y) \leq f'_r(y).$$

Insbesondere sind die Funktionen f'_ℓ und f'_r auf I monoton steigend (im nichtstrikten Sinne).

(c) Die Menge $S := \{x \in I : f'_\ell(x) < f'_r(x)\}$ ist höchstens abzählbar und f ist in jedem Punkt von $I \setminus S$ differenzierbar.

(d) Die Funktion $f'_r : I \to \mathbb{R}$ bzw. $f'_\ell : I \to \mathbb{R}$ ist linksseitig bzw. rechtsseitig stetig, d.h., man hat

$$f'_r(x) := \lim_{h\downarrow 0} f'_r(x+h),$$
$$f'_\ell(x) := \lim_{h\uparrow 0} f'_\ell(x+h)$$

für alle $x \in I$.

(e) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f sogar stetig differenzierbar.

Beweis. (a): Seien $0 < \lambda < \mu$ und sei $x \in I$. Der Punkt $x+\lambda$ liegt auf der Strecke $[x, x+\mu]$, sodass wir diesen Punkt als Konvexkombination der Endpunkte dieser Strecke darstellen können:

$$x+\lambda = x + \frac{\lambda}{\mu}\lambda = x + \frac{\lambda}{\mu}(x+\mu-x) = \frac{\mu-\lambda}{\mu}x + \frac{\lambda}{\mu}(x+\mu).$$

Die Konvexität von f ergibt

$$\begin{aligned} && f(x+\lambda) &\leq \frac{\mu-\lambda}{\mu} f(x) + \frac{\lambda}{\mu} f(x+\mu) \\ \Leftrightarrow && f(x+\lambda) - f(x) &\leq \frac{\lambda}{\mu}(f(x+\mu) - f(x)) \\ \Leftrightarrow && \frac{f(x+\lambda) - f(x)}{\lambda} &\leq \frac{f(x+\mu) - f(x)}{\mu}. \end{aligned} \tag{15}$$

Dies zeigt, dass der Quotient aus der Definition der ersten Ableitung in der 'Schrittweite' λ steigt.

Analog lässt sich auch der Punkt $x-\lambda$ auf der Strecke $[x-\mu, x]$ als Konvexkombination der Endpunkte der Strecke darstellen:

$$x - \lambda = x + \frac{\lambda}{\mu}(-\mu) = x + \frac{\lambda}{\mu}(x-\mu-x) = \frac{\mu-\lambda}{\mu} x + \frac{\lambda}{\mu}(x-\mu).$$

Aus der Konvexität von f folgt

$$\begin{aligned} && f(x-\lambda) &\leq \frac{\mu-\lambda}{\mu} f(x) + \frac{\lambda}{\mu} f(x-\mu) \\ \Leftrightarrow && f(x-\lambda) - f(x) &\leq \frac{\lambda}{\mu}(f(x-\mu) - f(x)) \\ \Leftrightarrow && \frac{f(x-\lambda) - f(x)}{\lambda} &\leq \frac{f(x-\mu) - f(x)}{\mu} \\ \Leftrightarrow && \frac{f(x) - f(x-\mu)}{\mu} &\leq \frac{f(x) - f(x-\lambda)}{\lambda}. \end{aligned} \tag{16}$$

Für beliebige $\lambda, \mu > 0$ lässt sich der Punkt x als Konvexkombination von $x-\mu$ und $x+\lambda$ darstellen:

$$\begin{aligned} x &= x - \mu + \mu = x - \mu + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(\lambda+\mu) = x - \mu + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(\lambda + x - x + \mu) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(x-\mu) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(x+\lambda). \end{aligned}$$

Aus der Konvexität von f folgt:

$$\begin{aligned} && f(x) &\leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} f(x-\mu) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} f(x+\lambda) \\ \Leftrightarrow && 0 &\leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(f(x-\mu) - f(x)) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(f(x+\lambda) - f(x)) \\ \Leftrightarrow && 0 &\leq \lambda(f(x-\mu) - f(x)) + \mu(f(x+\lambda) - f(x)) \\ \Leftrightarrow && \frac{f(x) - f(x-\mu)}{\mu} &\leq \frac{f(x+\lambda) - f(x)}{\lambda}. \end{aligned} \tag{17}$$

Es folgt aus (15) und (17), dass für jedes $x \in I$ der Quotient in der Definition von $f_r'(x)$ monoton fallend und nach unten beschränkt in h ist, sodass der Grenzwert existiert und endlich ist. Des Weiteren folgt aus (15) und (17), dass der Quotient in der Definition von $f_\ell'(x)$ monoton steigend und nach oben beschränkt in h ist, sodass der Grenzwert existiert und endlich ist. Das ergibt die Behauptung (a).

(b): Durch die Verwendung von (17) hat man für $x, y \in I$ mit $x < y$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x-h)}{h} &\le \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \frac{f(y-h)-f(x+h)}{(y-h)-(x+h)} \\ &\le \frac{f(y)-f(y-h)}{h} \le \frac{f(y+h)-f(y)}{h}\end{aligned}$$

für alle genügend kleinen $h > 0$. Durch den Grenzwertübergang für $h \downarrow 0$ erhält man

$$f'_\ell(x) \le f'_r(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'_\ell(y) \le f'_r(y).$$

(c): Da I als Vereinigung von abzählbar vielen Segmenten $[a,b]$ mit $a < b$ dargestellt werden kann, reicht es zu zeigen, dass auf einem solchen Segment $[a,b] \subseteq I$ die Menge $S \cap [a,b]$ höchstens abzählbar ist. Seien $x, y \in S \cap [a,b]$ mit $x < y$. Aus (b) folgt $f'_\ell(a) \le f'_\ell(x) < f'_r(x) \le f'_\ell(y) < f'_r(y) \le f'_r(b)$. Das heißt, $W(x) := [f'_\ell(x), f'_r(x)]$ und $W(y) := [f'_\ell(y), f'_r(y)]$ sind Teilstrecken von $W := [f'_\ell(a), f'_r(b)]$, die sich nicht überlappen. Sei α die Länge von F. Es gibt nur endlich viele $x \in [a,b] \cap S$ derart, dass die Länge von $W(x)$ mindestens $\alpha/2 \ge 0$ ist, es gibt auch endlich viele $x \in [a,b] \cap S$ derart, dass die Länge von $W(x)$ mindestens $\alpha/4$ und kleiner als $\alpha/2$ ist usw. Die vorige Prozedur zeigt, dass man die Mengen $W(x)$ mit $x \in [a,b] \cap S$ als Vereinigung von abzählbar vielen endlichen Mengen darstellen kann. Somit ist $[a,b] \cap S$ höchstens abzählbar.

(d): Wir verifizieren die Behauptung für $f'_r(x)$, die Aussage für $f'_\ell(x)$ ist analog. Wegen (b) gilt $f'_r(x) \le f'_r(x+h)$. Grenzwertübergang in (15) für $\lambda \downarrow 0$ ergibt $f'_r(x) \le (f(x+\mu) - f(x)))/\mu$ für alle $\mu > 0$. Somit gilt

$$f'_r(x+h) \le \frac{f(x+h+t)-f(x+h)}{t}$$

für alle $t > 0$. Wir setzen in der rechten Seite $t = h$ ein und erhalten

$$f'_r(x) \le f'_r(x+h) \le \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} = 2\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Der Grenzwertübergang für $h \downarrow 0$ ergibt

$$f'_r(x) \le \lim_{h\downarrow 0} f'_r(x+h) \le 2f'_r(x) - f'_r(x) = f'_r(x).$$

Das verifiziert die Behauptung für $f'_r(x)$.

(e) folgt direkt aus (d). □

Korollar 7.6. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, sei $x \in \operatorname{int}(A)$ und $u \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: der Grenzwert*

$$f'(x; u) := \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{f(x+\lambda u)-f(x)}{\lambda}$$

existiert und ist endlich.

Der vorige Wert heißt die Ableitung von f in Richtung u. Laut dieser Definition müssen die Ableitungen $f'(x;u)$ und $f'(x;-u)$ nicht gleich sein.

Nun können wir auch Kriterien der Konvexität mit Hilfe der Ableitungen formulieren.

Proposition 7.7. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) Ist f differenzierbar, so hat man die Äquivalenz:

$$f \text{ ist konvex} \qquad \Leftrightarrow \qquad f' \text{ ist monoton steigend}$$

(b) Ist f zweimal differenzierbar, so hat man die Äquivalenz:

$$f \text{ ist konvex} \qquad \Leftrightarrow \qquad f'' \geq 0 \text{ auf } I$$

Beweis. (a): Ist f konvex, so ist f' monoton steigend nach Theorem 7.3. Angenommen, f' ist monoton steigend. Wir betrachten $x, y \in I$ mit $x < y$ und $\lambda \in (0,1)$. Sei $a = (1-\lambda)x + \lambda y$. Das Segment $[x, y]$ kann in zwei Segmente $[x, a]$ und $[a, y]$ zerlegt werden. Wir verwenden den Zwischenwertsatz der Differentialrechnung auf den beiden Segmenten und erhalten

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \\ f'(\beta) &= \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \end{aligned}$$

für gewisse $\alpha \in (x, a)$ und $\beta \in (a, y)$. Aus der Monotonie von f' folgt nun $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ und somit

$$\begin{aligned} & & \frac{f(a) - f(x)}{a - x} &\leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \\ &\Leftrightarrow & \frac{f(a) - f(x)}{\lambda(y - x)} &\leq \frac{f(y) - f(a)}{(1-\lambda)(y - x)} \\ &\Leftrightarrow & \frac{f(a) - f(x)}{\lambda} &\leq \frac{f(y) - f(a)}{1 - \lambda} \\ &\Leftrightarrow & (1-\lambda)(f(a) - f(x)) &\leq \lambda(f(y) - f(a)) \\ &\Leftrightarrow & f(a) &\leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \end{aligned}$$

was die Konvexität von f verifiziert.

(b) folgt nun aus (a) und den Resultaten aus der Analysis über monotone Funktionen. □

7.4 Einseitige Richtungsableitungen multivariater konvexer Funktionen

Eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt sublinear, falls g positiv homogen und subadditiv ist, d.h.,

$$g(\lambda x) = \lambda g(x) \qquad \forall \lambda \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und

$$g(x + y) \leq g(x) + g(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Jede sublineare Funktion ist konvex. Jede lineare Funktion ist sublinear. Das Maximum sowie jede konische Kombination einer endlichen Anzahl sublinearer Funktionen sind sublinear. Die Euklidische Norm ist sublinear.

Theorem 7.8. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $a \in \operatorname{int}(A)$. Dann gilt:*

(a) Die Funktion $u \mapsto f'(a; u)$ ist sublinear.

(b) Die Menge $L := \{u : f'(a; u) = -f'(a, -u)\}$ ist eine Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $g(u) := f'(a, u)$.

(a): Die Gleichheit $g(\lambda u) = \lambda g(u)$ für $\lambda > 0$ ist laut der Definition der Richtungsableitung äquivalent zu der Gleichheit

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{t} = \lambda \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a + tu)}{t}.$$

Dass die beiden Grenzwerte gleich sind, sieht man, indem man etwa das t auf der rechten Seite durch $t\lambda$ ersetzt.

Die Subadditivität wird mit der Verwendung der Konvexität von f hergeleitet. Für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ und jedes $t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a + t(u + v)) - f(a)}{t} &= \frac{f(\frac{1}{2}(a + 2tu) + \frac{1}{2}(a + 2tv)) - f(a)}{t} \\
&\leq \frac{\frac{1}{2} f(a + 2tu) + \frac{1}{2} f(a + 2tv) - f(a)}{t} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(f(a + 2tu) - f(a)) + \frac{1}{2}(f(a + 2tv) - f(a))}{t} \\
&= \frac{f(a + 2tu) - f(a)}{2t} + \frac{f(a + 2tv) - f(a)}{2t}
\end{aligned}$$

Der Grenzwertübergang für $t \downarrow 0$ ergibt $g(u + v) \leq g(u) + g(v)$.

(b): Angenommen $g(u) = -g(-u)$ und $g(v) = -g(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g(u + v) \leq g(u) + g(v) &= -(g(-u) + g(-v)) \\
&= g(u + v) - (g(-u) + g(-v) + g(u + v)) \\
&\leq g(u + v) - g(-u - v + u + v) \\
&= g(u + v) - g(0) = g(u + v).
\end{aligned}$$

□

7.5 Differenzierbarkeitskriterium für konvexe Funktionen

Theorem 7.9. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $a \in \operatorname{int}(A)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) Die Funktion f ist im Punkt a differenzierbar.

(ii) Die Funktion f besitzt im Punkt a die partiellen Ableitungen nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Beweis. Es reicht die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) zu verifizieren. Angenommen, (ii) ist erfüllt, sodass $\nabla f(a)$ existiert. Wir zeigen,

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{|h|} = 0$$

für

$$g(h) := f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h \rangle .$$

Die Funktion $g : A \to \mathbb{R}$ ist konvex. Sei $h = (h_1, \ldots, h_n)$ mit $h \neq 0$. Für h hat man die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
g(h) &= g(\frac{1}{n} nh) = g(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} nh_i e_i) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(nh_i e_i) \qquad \text{(Jensen'sche Ungleichung)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]: h_i \neq 0} nh_i \frac{g(nh_i e_i)}{nh_i} \\
&\leq \frac{1}{n} |nh| \sqrt{\sum_{i \in [n]: h_i \neq 0} \left(\frac{g(nh_i e_i)}{nh_i} \right)^2} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq |h| \sum_{i \in [n]: h_i \neq 0} \frac{|g(nh_i e_i)|}{|nh_i|}
\end{aligned}$$

Das ergibt:

$$\frac{g(h)}{|h|} \leq \sum_{i \in [n]: h_i \neq 0} \frac{|g(nh_i e_i)|}{|nh_i|}$$

Das Einsetzen von $-h$ an der Stelle von h ergibt

$$\frac{g(-h)}{|h|} \leq \sum_{i \in [n]: h_i \neq 0} \frac{|g(-nh_i e_i)|}{|nh_i|}.$$

Außerdem gilt wegen der Konvexität von g die Ungleichung $\frac{1}{2}(g(h) + g(-h)) \geq g(\frac{1}{2}(h + (-h))) = g(0) = 0$, d.h. $-g(-h) \leq g(h)$, sodass man unter Berücksichtigung der vorigen Ungleichung die für $g(-h)/|h|$ und $g(h)/|h|$ die folgende Kette von Ungleichungen erhält:

$$-\sum_{i \in [n]: h_i \neq 0} \frac{|g(-nh_i e_i)|}{|nh_i|} \leq \frac{-g(-h)}{|h|} \leq \frac{g(h)}{|h|} \leq \sum_{i \in [n]: h_i \neq 0} \frac{|g(nh_i e_i)|}{|nh_i|}$$

Da g an der Stelle a stetig ist, gilt

$$g(\pm nh_i e_i) = f(a \pm nh_i e_i) - f(a) + nh_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \to 0 \qquad \text{für } h \to 0.$$

Für den rechten Term dieser Kette von Ungleichungen lässt sich das Folgende verwenden:

$$\frac{g(nh_i e_i)}{nh_i} = \frac{f(a \pm nh_i e_i) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) nh_i}{nh_i} \to 0 \qquad \text{für } h_i \to 0.$$

Das heißt, der rechte Term geht gegen 0, für $h \to 0$. Analog geht auch der linke Term gegen 0 für $h \to 0$. Somit geht $\frac{g(h)}{|h|}$ gegen 0 für $h \to 0$. $\square$

7.6 Kriterien für die Konvexität einer Funktion

Theorem 7.10. *Sei A eine nichtleere offene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) Ist f differenzierbar so gelten die Äquivalenzen:

$$\begin{array}{lll} & f \text{ ist konvex} & \\ \Leftrightarrow & f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle & \forall x, y \in A \\ \Leftrightarrow & \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 & \forall x, y \in A. \end{array}$$

(b) Ist f zweimal differenzierbar, so gelten die Äquivalenzen:

$$\begin{array}{lll} & f \text{ ist konvex} & \\ \Leftrightarrow & H(x) := \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j \in [n]} \text{ ist positiv semidefinit} & \forall x \in A. \end{array}$$

Beweis. (a): Ist f konvex, so gilt für alle $0 < \lambda < 1$ und alle $x, y \in A$:

$$\begin{array}{ll} & f(x + \lambda(y - x)) = f((1 - \lambda 0x + \lambda y) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y) \\ \Rightarrow & f(x + \lambda(y - x)) - f(x) \leq \lambda(f(y) - f(x)) \\ \Rightarrow & \dfrac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x). \end{array}$$

Der Grenzwertübergang für $\lambda \downarrow 0$ ergibt

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

Nun nehmen wir an, die vorige Ungleichung gilt für alle $x, y \in A$. So erhalten wir durch Vertauschen von x und y auch

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq f(x) - f(y).$$

Die Summe der vorigen beiden Ungleichungen ist

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), x - y \rangle \leq 0.$$

Nun nehmen wir an, dass die vorige Ungleichung für alle $x, y \in A$ gilt, und zeigen, dass in diesem Fall f konvex sein muss. Seien $x, y \in A$ beliebig. Es reicht zu zeigen, dass die Funktion

$$g(\lambda) := f(x + \lambda(y - x))$$

auf $[0, 1]$ konvex ist. Dafür reicht es laut Proposition 7.3 zu verifizieren, dass g' steigend ist. Nach der Kettenregel hat man

$$g'(\lambda) = \langle \nabla f(x + \lambda(y - x)), y - x \rangle$$

Für $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$ hat man nach der Voraussetzung

$$\langle \nabla f(x + \lambda_2(y - x)) + \nabla f(x + \lambda_1(y - x)), (\lambda_2 - \lambda_1)(y - x) \rangle \geq 0,$$

was sich als die Ungleichung $g'(\lambda_2) \geq g'(\lambda_1)$ hinschreiben lässt. Also ist g konvex und somit auch die Funktion f konvex.

(b): Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in A$ mit $x \neq 0$ die Funktion $g(\lambda) := f(x + \lambda(x - y))$ auf $(0, 1)$ konvex ist. Letzteres ist laut der Proposition 7.3 äquivalent zu $g''(\lambda) \geq 0$ für alle $0 \leq \lambda \leq 1$. Man hat nach der Kettenregel

$$g'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \lambda(x - y))(x_i - y_i)$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$, und nochmals nach der Kettenregel

$$g''(\lambda) = \sum_{i,j \in [n]} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \lambda(x - y))(x_i - y_i)(x_j - y_j).$$

Das heißt

$$g''(\lambda) = \langle H(x + \lambda(x - y))(x - y), x - y \rangle .$$

Wenn also die Hessematrix auf allen Punkten von A positiv semidefinit ist, so ist $g'' \geq 0$. Also ist g konvex und somit f auch konvex. Ist f konvex so fixieren wir einen beliebigen Punkt $a \in A$ und eine beliebige Richtung v. Wir können Punkte $x, y \in A$ mit $x \neq y$ fixieren derart, dass $a = \frac{1}{2}(x + y)$ gilt und $y - x$ parallel zu v ist. Da f konvex ist, ist g wie oben auch konvex und somit $g''(\frac{1}{2}) \geq 0$. Das ergibt $\langle H(a)v, v \rangle \geq 0$. Wir haben also für jedes $a \in A$ verifiziert, dass $H(a)$ positiv semidefinit ist. □

Bemerkung 7.11. *Das vorige Theorem ergibt unter anderem, dass die quadratische Funktion $\alpha + \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$ (A symmetrische Matrix) genau dann konvex ist, wenn A positiv semidefinit ist.*

7.7 Verallgemeinerungen des Gradientenbegriffs

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion, seien $a \in \operatorname{int}(A)$ und $u \in \mathbb{R}^n$. Der Vektor u heißt ein *Subgradient* von f im Punkt a, falls $f(x) \geq f(a) + \langle u, x - a \rangle$ für alle $x \in A$ gilt. Die Menge aller Subgradienten von f im Punkt a heißt das *Subdifferential* von f im Punkt a und wird als $\partial f(a)$ bezeichnet.

Theorem 7.12. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion und sei $a \in \operatorname{int}(A)$. Dann gilt:*

(a) $\partial f(a)$ ist die Menge aller Vektoren $u \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $(u, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein äußerer Normalenvektor von $\operatorname{epi}(f)$ im Punkt $(a, f(a))$ ist.

(b) $\partial f(a)$ ist eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge.

(c) Ist f im Punkt a differenzierbar, so ist $\partial f(a)$ eine einelementige Menge, deren eindeutiges Element der Gradient von f im Punkt a ist.

Beweis. (a): Man hat die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& (u,-1) \text{ ist ein äußerer Normalenvektor von } \operatorname{epi}(f) \text{ in } (a,f(a)) \\
\Leftrightarrow \quad & \langle (u,-1),(x,y)\rangle \le \langle (u,-1),(a,f(a))\rangle \ \forall\, x\in A\ \forall\, y\in\mathbb{R} \text{ mit } y\ge f(x) \\
\Leftrightarrow \quad & \langle u,x\rangle - y \le \langle u,a\rangle - f(a)\ \forall\, x\in A\ \forall\, y\in\mathbb{R} \text{ mit } y\ge f(x) \\
\Leftrightarrow \quad & y \ge f(a) + \langle u, x-a\rangle\ \ \forall\, x\in A\ \forall\, y\in\mathbb{R} \text{ mit } y\ge f(x) \\
\Leftrightarrow \quad & f(x) \ge f(a) + \langle u, x-a\rangle\ \ \forall\, x\in A \\
\Leftrightarrow \quad & u\in\partial f(a).
\end{aligned}
$$

(b): Wir zeigen, dass $\partial f(a)$ mindestens einen Vektor enthält. Da jeder Randpunkt einer konvexen Menge eine Stützhyperebene besitzt (vgl. den Paragraphen 4.3), hat die konvexe Menge $\operatorname{epi}(f)$ in ihrem Randpunkt $(a,f(a))$ einen äußeren Normalenvektor, den wir als $(v,\alpha)\in\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen. D.h.

$$\langle (v,\alpha),(x,y)\rangle \le \langle (v,\alpha),(a,f(a))\rangle$$

gilt für alle $x\in A$ und $y\in\mathbb{R}$ mit $y\ge f(x)$. Die vorige Ungleichung kann als

$$\langle v,x\rangle + \alpha y \le \langle v,a\rangle + \alpha f(a)$$

umformuliert werden. Das Einsetzen von $x=a$ und $y=f(a)+1$ ergibt $\alpha\le 0$. Des Weiteren gilt $\alpha\ne 0$, da sonst die Ungleichung $\langle v,x\rangle\le\langle v,a\rangle$ gelten würde, die der Voraussetzung $a\in\operatorname{int}(A)$ widerspricht. Also ist $\alpha<0$. Für $u=v/|\alpha|$ gilt somit

$$\langle u,x\rangle - y \le \langle u,a\rangle - f(a)$$

für alle $x\in A$ und $y\ge f(x)$. Wir setzen $y=f(x)$ ein und erhalten

$$f(x)\ge f(a)+\langle u,x-a\rangle\,.$$

D.h., u ist ein Subgradient. Dass die Menge $\partial f(a)$ aller Subgradienten konvex und abgeschlossen ist, folgt direkt aus der Definition des Subgradienten.

(c): Angenommen, f ist in a differenzierbar. Dann gilt für jeden Vektor $v\in\mathbb{R}^n$ die Gleichung $f'(a;v)=\langle\nabla f(a),v\rangle$. Daraus folgt $f'(a;v)=-f'(a;-v)$. Man betrachte einen beliebigen Subgradienten u von f in a. Aus der Definition des Subgradienten folgt, dass die Ungleichung

$$f(a+\lambda v)\ge f(a)+\lambda\,\langle v,u\rangle$$

für alle $\lambda>0$ mit $a+\lambda v\in A$ gilt. Da $a\in\operatorname{int}(A)$ gilt diese Ungleichung für alle genügend kleinen $\lambda>0$. Wir formulieren die vorige Ungleichung als

$$\frac{f(a+\lambda v)-f(a)}{\lambda}\ge\langle v,u\rangle$$

um. Der Grenzwertübergang für $\lambda\downarrow 0$ ergibt

$$f(a;v)\ge\langle v,u\rangle\,.$$

für alle $v\in\mathbb{R}^n$. Das Einsetzen von $-v$ an der Stelle von v ergibt $f(a;-v)\ge -\langle v,u\rangle$. Wir multiplizieren die vorige Ungleichung mit -1 und erhalten $f(a;v)=-f(a;-v)\le\langle v,u\rangle$. Also gilt $f(a;v)=\langle v,u\rangle$ für alle $v\in\mathbb{R}^n$. Durch Anwendung dieser Ungleichung für $v\in\{e_1,\dots,e_n\}$ erhalten wir

$$u=(f(a;e_1),\dots,f(a;e_n))=\nabla f(a).$$

□

7.8 Optimalitätskriterien in der konvexen Optimierung

Das folgende ist ein Kriterium für das globale Optimum in einem inneren Punkt des Definitionsbereichs.

Proposition 7.13. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $x^* \in \operatorname{int}(A)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) x^* ist eine optimale Lösung der Aufgabe $\inf_{x\in A} f(x)$.

(ii) $0 \in \partial f(x^*)$.

Beweis. Man hat die Äquivalenzen: x^* ist eine optimale Lösung von $\inf_{x\in A} f(x)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow && f(x^*) \le f(x) && \forall x \in A\\
&\Leftrightarrow && f(x) \ge f(x^*) + \langle 0, x - x^*\rangle && \forall x \in A\\
&\Leftrightarrow && 0 \in \partial f(x^*). &&
\end{aligned}$$

□

Theorem 7.14. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ konvexe Funktion, sei $B \subseteq \operatorname{int}(A)$ abgeschlossene konvexe Menge und $x^* \in B$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(i) x^* ist eine optimale Lösung von $\inf_{x\in B} f(x)$

(ii) x^* ist eine optimale Lösung des Problems $\inf_{x\in B} \langle u, x\rangle$ für ein $u \in \partial f(x^*)$.

(iii) Es gilt $0 \in \partial f(x^*)$ <u>oder</u> $x^* \in \operatorname{bd}(B)$ und, für ein $u \in \partial f(x^*) \setminus \{0\}$, ist $-u$ äußerer Normalenvektor von B im Punkt x^* (d.h., $x^* \in F(B, -u)$).

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, (i) ist erfüllt. Wir betrachten die konvexen Mengen

$$\begin{aligned}
K &:= \{(x, y) \,:\, x \in A, y > f(x)\},\\
L &:= \{(x, y) \,:\, x \in B, y \le f(x^*)\}.
\end{aligned}$$

Ist $(x, y) \in K \cap L$, so gilt $x \in B$ und $f(x^*) \ge y > f(x)$ und somit $f(x^*) > f(x)$, was der vorausgesetzten Optimalität von x^* widerspricht. Somit ist $K \cap L = \emptyset$. Nach den Trennsätzen (vgl. Abschnitt 4.5) existiert ein Vektor $(v, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit

$$\langle (v, \alpha), (x, y)\rangle \ge \left\langle (v, \alpha), (x', y')\right\rangle$$

für alle $(x, y) \in K$ und $(x', y') \in L$. Das heißt,

$$\langle v, x\rangle + \alpha y \ge \left\langle v, x'\right\rangle + \alpha y'$$

für alle $x \in A, y > f(x)$, $x' \in B$ und $y' \le f(x^*)$.

Wir setzen $x = x' = x^*$, $y = f(x^*) + 1$ und $y' = f(x^*)$ ein und erhalten $\alpha \ge 0$. Des Weiteren kann $\alpha = 0$ nicht gelten, da man sonst im Fall $x' = x^*$ die Ungleichung $\langle v, x\rangle \ge \langle v, x^*\rangle$ für alle $x \in A$ hätte. Das in Kombination mit $x^* \in B \subseteq \operatorname{int}(A)$ ergibt $v = 0$. D.h., $(v, \alpha) = (0, 0)$, ein Widerspruch. Wir haben also $\alpha > 0$ gezeigt. Wir zeigen, dass für $-u = v/\alpha$ die Bedingung (ii) erfüllt ist. Man hat

$$-\langle u, x\rangle + y \ge -\left\langle u, x'\right\rangle + y' \tag{18}$$

für alle $x \in A, y > f(x)$, $x' \in B$ und $y' \leq f(x^*)$. Wir setzen $x' = x^*$ und $y' = f(x^*)$ ein und erhalten

$$y \geq f(x^*) + \langle u, x - x^* \rangle \qquad \forall x \in A.$$

Für $y \downarrow f(x)$ erhält man

$$f(x) \leq f(x^*) + \langle u, x - x^* \rangle \qquad \forall x \in A.$$

Somit ist $u \in \partial f(x^*)$.

Nun setzen wir in (18), $x = x^*$ und $y' = f(x^*)$ ein und erhalten

$$\langle u, x^* \rangle \leq \langle u, x' \rangle + y - f(x^*)$$

für alle $y > f(x^*)$ und $x' \in B$ und $y' \leq f(x^*)$. Für $y \downarrow f(x^*)$ erhält man

$$\langle u, x^* \rangle \leq \langle u, x' \rangle \qquad \forall x' \in B.$$

Das heißt, u erfüllt die Bedingung aus (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen, (ii) ist erfüllt. Im Fall $0 \in \partial f(x^*)$ ist nach der Proposition 7.8 der Punkt x^* eine optimale Lösung von $\inf_{x \in A} f(x)$. Ansonsten gilt $0 \notin \partial f(x^*)$ und somit auch $u \neq 0$. Aus $u \neq 0$ und (ii) folgt nun, dass x^* ein Randpunkt von B und u ein äußerer Normalenvektor von B in x^* ist.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen, (iii) ist erfüllt. Wenn $0 \in \partial f(x^*)$ gilt, so ist nach Proposition 7.13 der Punkt x^* eine optimale Lösung von $\inf_{x \in A} f(x)$ und somit auch von $\inf_{x \in B} f(x)$. Sonst gilt die Ungleichung

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle u, x - x^* \rangle \qquad \forall x \in A,$$

wegen $u \in \partial f(x^*)$, sowie die Ungleichung

$$\langle u, x^* \rangle \leq \langle u, x \rangle \qquad \forall x \in B,$$

da $-u$ ein äußerer Normalenvektor von B in x^* ist. Durch Kombination der vorigen beiden Ungleichungen erhält man $f(x) \geq f(x^*)$ für alle $x \in B$, d.h., $f(x^*)$ ist das Minimum von f auf B. □

Das folgende Korollar ist eine Verallgemeinerung der in Abschnitt 5.2 präsentierten Dualität der linearen Aufgaben (std-LP) und (std-LP-dual).

Korollar 7.15 (Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen auf einem Polyeder)**.** *Sei* $f : K \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion auf einer konvexen Teilmenge* K *von* $\mathbb{R}^m$ *mit* $m \in \mathbb{N}$. *Man betrachte ein Polyeder* $P = \{y \in \mathbb{R}^m : yA \leq c\}$ *mit* $A = (a_1 \ \dots \ a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *und* $P \subseteq \operatorname{int}(K)$. *Sei* $y^* \in P$. *Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(i) y^* *ist eine optimale Lösung von* $\inf_{y \in P} f(y)$.

(ii) Für ein $u \in \partial f(x^*)$ *gilt*

$$-u \in \operatorname{cone}(\{a_i : i \in [n], \ c_i = \langle y^*, a_i \rangle\})$$

Hierbei setzen wir die konische Hülle der leeren Menge gleich $\{0\}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, (i) ist erfüllt. Dann existiert laut Theorem 7.14 $u \in \partial f(y^*)$ derart, dass y^* eine optimale Lösung der linearen Aufgabe $\inf_{y \in P} \langle y, u \rangle$ ist. Die vorige Ausgabe ist äquivalent zu Aufgabe (std-LP-dual) aus Kapitel 5 mit $b = -u$. Sei nun $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ eine optimale Lösung der Aufgabe (std-LP). Es sei daran erinnert, dass die Dualitätstheorie für lineare Aufgaben die Existenz einer optimalen Lösung von (std-LP) garantiert. Nach den komplementären Schlupfbedingungen (vgl. Theorem 5.2) hat man für jedes $i \in [n]$, dass die i-te Komponente von x_i^* oder der Wert $c_i - \langle a_i, y^* \rangle$ gleich 0 ist. Das heißt, für alle $i \in [n]$ mit $c_i - \langle a_i, y^* \rangle \neq 0$ gilt $x_i^* = 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned} b = Ax^* = \sum_{i \in [n]} a_i x_i^* &= \sum_{i \in [n] \,:\, c_i - \langle a_i, y^* \rangle = 0} a_i x_i^* \\ &\in \operatorname{cone}(\{a_i \,:\, i \in [n],\ c_i = y^* a_i\}). \end{aligned}$$

Das ergibt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen, (ii) ist erfüllt. Dann lässt sich $b = -u$ als $b = Ax^*$ darstellen, mit $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \geq 0$ und $x_i^* = 0$, wenn $c_i - \langle y^*, a_i \rangle \neq 0$ gilt. Das heißt, für alle $i \in [n]$, ist die i-te Komponente von x^* oder die i-te Komponente von $c - Ay^*$ gleich Null. Nach den komplementären Schlupfbedingungen ist x^* eine optimale Lösung von $\min \{\langle c, x \rangle \,:\, x \geq 0, Ax = b\}$ und y^* eine optimale Lösung von von $\max \{\langle y, b \rangle \,:\, yA \leq c\} = \max \{\langle y, b \rangle \,:\, y \in P\}$. Da wir $b = -u$ mit $u \in \partial f(x^*)$ gesetzt haben, folgt aus Theorem 7.14, dass y^* eine optimale Lösung von $\inf_{y \in P} f(y)$ ist. $\square$

7.9 Literaturhinweise und Abschlussbemerkungen

Das Kapitel basiert im Wesentlichen auf [Sch93]. Das Subdifferential besitzt eine Reihe von weiteren Eigenschaften, wie Additivität, die bei der Behandlung von Problemen aus der konvexen Optimierung (unter anderem, der Standortoptimierung) relevant sind, vgl. [Roc97].

Literatur

[BJS90] Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, and Hanif D. Sherali, *Linear programming and network flows (2nd ed.)*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1990.

[CLR04] Thomas H. Cormen, Charles Leiserson, and Clifford Rivest, Ronald L. Stein, *Algorithmen: Eine Einführung*, 2004.

[Gro04] Martin Groetschel, *Lineare optimierung (algorithmische diskrete mathematik ii)*, Skriptum zur Vorlesung im WS 2003/2004, 2004.

[KV12] Bernhard Korte and Jens Vygen, *Kombinatorische optimierung: Theorie und algorithmen*, Springer-Verlag, 2012.

[PS98] Christos H. Papadimitriou and Kenneth Steiglitz, *Combinatorial optimization: algorithms and complexity*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1998, Corrected reprint of the 1982 original. MR 1637890

[Roc97] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks. MR 1451876 (97m:49001)

[Sch86] Alexander Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986, A Wiley-Interscience Publication. MR 874114 (88m:90090)

[Sch93] Rolf Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 1216521 (94d:52007)

[Sch14] ———, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, expanded ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014. MR 3155183