

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 1

Abgabe bis 18.10., Präsentation am 25.10.

Wichtige organisatorische Informationen

- Es gibt in jeder Woche donnerstags in der Übung ein Übungsblatt. Die Lösungen müssen in der darauffolgenden Übung abgegeben werden. Die bewerteten Lösungen werden eine Woche später zurückgegeben und die Aufgaben in der Übung besprochen, bzw. Lösungen präsentiert.
- Eines der Übungsblätter gegen Semesterende wird aus einer Programmieraufgabe bestehen, die in `Matlab` oder einer verwandten Sprache zu bearbeiten ist.
- Die Erarbeitung der Lösungen kann in Zweiergruppen erfolgen, wobei jeder in der Lage sein muss, die Tafelpräsentation zu übernehmen.
- Voraussetzungen für die Teilnahme an der Klausur zum Erwerb des Leistungsnachweises sind $\geq 50\%$ der Punkte aus den Übungen *und* das erfolgreiche Vorrechnen einer der Aufgaben.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und für alle $a \in A$ gilt: $\text{aff}(A) = a + \text{lin}(A - a)$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeige folgende Äquivalenz:

- $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ (mit $k \in \mathbb{N}$) sind affin unabhängig.
- Kein Punkt a_i lässt sich als affine Kombination der restlichen Punkte $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k$ darstellen.
- Die Punkte $(a_1, 1), \dots, (a_k, 1)$ aus \mathbb{R}^{n+1} sind linear unabhängig.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeige, dass eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann affin ist, wenn F als $F(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ dargestellt werden kann.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Parameter $k = k(n) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass es für jedes Gleichungssystem $\langle a_i, x \rangle = \beta_i$ ($i \in I$) im \mathbb{R}^n (mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ und $\beta_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in I$) eine höchstens k -elementige Teilmenge $J \subseteq I$ der Gleichungen gibt, sodass das Untersystem $\langle a_j, x \rangle = \beta_j$ ($j \in J$) äquivalent zum gegebenen System ist.