Gennadiy Averkov und Maximilian Merkert
Wintersemester 2018/2019

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 2

Abgabe bis 25.10., Präsentation am 01.11.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen und seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ affine Abbildungen. Zeige, dass dann $F(A)$, $G^{-1}(A)$ und $A + B$ konvexe Mengen sind.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zeige, dass $[0,1]^n$, $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ konvexe Mengen sind.

Aufgabe 3 (2+2+2+1 Punkte)

Beweise folgende Aussagen aus der Vorlesung über Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$:

(a) A ist genau dann konvex, wenn $A = \operatorname{conv}(A)$ gilt.

(b) $\operatorname{conv}(A)$ ist Durchschnitt aller konvexer Mengen, die A als Teilmengen enthalten.

(c) Es gilt $\operatorname{conv}(A + B) = \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B)$.

(d) Es gilt $\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(A)) = \operatorname{conv}(A)$.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

Beschreibe ein Verfahren, welches für gegebenes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ und einen Punkt $y^* \in \mathbb{R}^n$ den Punkt $x^* \in \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ findet, der minimalen euklidischen Abstand zu y^* hat. Beweise auch, dass das berechnete x^* tatsächlich den Abstand minimiert.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von kompakten konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$ gilt.

Hinweis: Benutze den Satz von Helly (aus der Vorlesung).