Gennadiy Averkov und Maximilian Merkert
Wintersemester 2018/2019

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 3

Abgabe bis 1.11., Präsentation am 8.11.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder und $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ die Projektion mit $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Zeigen Sie, dass $\pi(P)$ ebenfalls ein Polyeder ist.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Zeige, dass die zusätzliche Kompaktheitsforderung im Satz von Helly für unendliche Mengenfamilien notwendig ist, d.h., konstruiere jeweils eine Folge von

(a) abgeschlossenen aber nicht beschränkten, bzw.

(b) beschränkten aber nicht abgeschlossenen

konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \dots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$, für die $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ gilt.

Hinweis: Man findet Beispiele bereits im $\mathbb{R}^1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge, sodass je $n+1$ Punkte aus S in einer abgeschlossenen Kugel mit Radius r enthalten sind. Zeige, dass S in einer abgeschlossenen Kugel mit Radius r enthalten ist.

Hinweis: Benutze den Satz von Helly.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wir betrachten zwei endliche Herden $B, R \subseteq \mathbb{R}^2$ von blauen bzw. roten Schafen auf einer ebenen Weide. Schäfer Ulf wollte um 12:34 eigentlich einen geradlinigen Zaun bauen, der die roten von den blauen Schafen strikt trennt (d.h. eine Gerade finden, sodass alle $b \in B$ auf der einen Seite und alle $r \in R$ auf der anderen Seite sind), stellt aber fest, dass dies nicht geht.
Zeige, dass er seine Frau Gertrud davon überzeugen kann, dass dies nicht seine Schuld ist, indem er ihr nur die Positionen von höchstens 4 Schafen mitteilt.

Hinweis: Beschreibe mögliche Zäune als Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und benutze den Satz von Helly.