Gennadiy Averkov und Maximilian Merkert
Wintersemester 2018/2019

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 6

Abgabe bis 22.11., Präsentation am 29.11.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Zeige, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ einen Punkt $p \in A$ mit $|p - x| = \operatorname{dist}(A, x)$ gibt und dass dieser Punkt eindeutig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $C \neq \varnothing$ ein abgeschlossener konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Zeige, dass es einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle u, c\rangle \geq 0$ für alle $c \in C$ und $\langle u, x\rangle < 0$ gibt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere, konvexe, abgeschlossene Mengen und sei A zudem beschränkt. Zeige, dass dann $A - B$ abgeschlossen und konvex ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeige, dass die konische Hülle $\operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_k\}$ endlich vieler Vektoren $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist.

Hinweis: Betrachte die Vereinigung der konischer Hüllen von linear unabhängigen Teilmengen der a_i und nutze den Satz von Carathéodory.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Menge, $x \in \operatorname{int}(A)$ und $y \in \operatorname{cl}(A)$. Zeige, dass dann $[x, y) \subseteq \operatorname{int}(A)$ gilt.

Hinweis: Betrachte dazu Verbindungsstrecken zwischen geeigneten Bällen um x und y.