

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 9

Abgabe bis 13.12., Präsentation am 20.12. in Übung

Aufgabe 1

(3+3 Punkte)

Seien R und B endliche Teilmengen von \mathbb{R}^2 , für welche eine affine Funktion $f(x, y) = ax + by - c$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ die Ungleichungen $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in R$ und $f(x, y) < 0$ für alle $(x, y) \in B$ erfüllt.

- Beschreiben Sie, wie man für gegebene R und B die Koeffizienten a, b, c der Funktion f mit Hilfe der linearen Optimierung berechnen kann.
- Setzen Sie Ihren Ansatz in Octave um. Testen Sie Ihren Code auf Eingaben, die mit der folgenden Funktion generiert werden:

```
function [red, blue]=RedBluePoints(n)
points=rand(2,n);
p0=rand(2,1);
u=randn(1,2);
red=zeros(2,0);
blue=zeros(2,0);
for i=1:n
    p=points(:,i);
    if u*p > u*p0
        red=[red p];
    else
        blue=[blue p];
    end
end
end
```

Zur Visualisierung können Sie die folgende Funktion benutzen:

```
function ShowData(red, blue, a, b, c)
figure;
hold on;
[X,Y]=meshgrid(0:0.01:1,0:0.01:1);
Z=a*X+b*Y-c*ones(size(X));
contourf(X,Y,Z,'ShowText','on');
plot(red(1,:),red(2,:),'.r');
plot(blue(1,:),blue(2,:),'.b');
```

Die Lösungen dieses Teils der Aufgabe sollen per Email eingereicht werden.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Beweise: Seien A, B, C, D Matrizen und c, d Vektoren mit Komponenten in \mathbb{R} derart, dass das System $Ax + By = b$, $Cx + Dy \leq d$, $x \geq 0$ in unbekanntem Vektoren x und y wohldefiniert ist. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- Es gibt $x \geq 0$ und y , die $Ax + By = b$ und $Cx + Dy \leq d$ erfüllen.
- Für alle u und $v \geq 0$ gilt die Implikation $(uA + vC \geq 0, uB + vD = 0) \Rightarrow ub + vd \geq 0$.

Aufgabe 3

(1+4+3 Punkte)

Für Matrizen A, B, F, G und Vektoren b, g, c, d , betrachte die linearen Aufgaben

$$\min\{cx + dy : x \geq 0, Ax + By = b, Fx + Gy \geq g\}$$

und

$$\max\{ub + vg : v \geq 0, uA + vF \leq c, uB + vG = d\}.$$

Zeigen Sie Folgendes:

- (a) Ist eine der beiden Aufgaben unbeschränkt, so ist die andere unzulässig.
- (b) Sind die beiden Aufgaben zulässig, so sind die optimalen Werte der Aufgaben endlich und gleich.
- (c) Leiten Sie für dieses Paar komplementäre Schlupfbedingungen her.