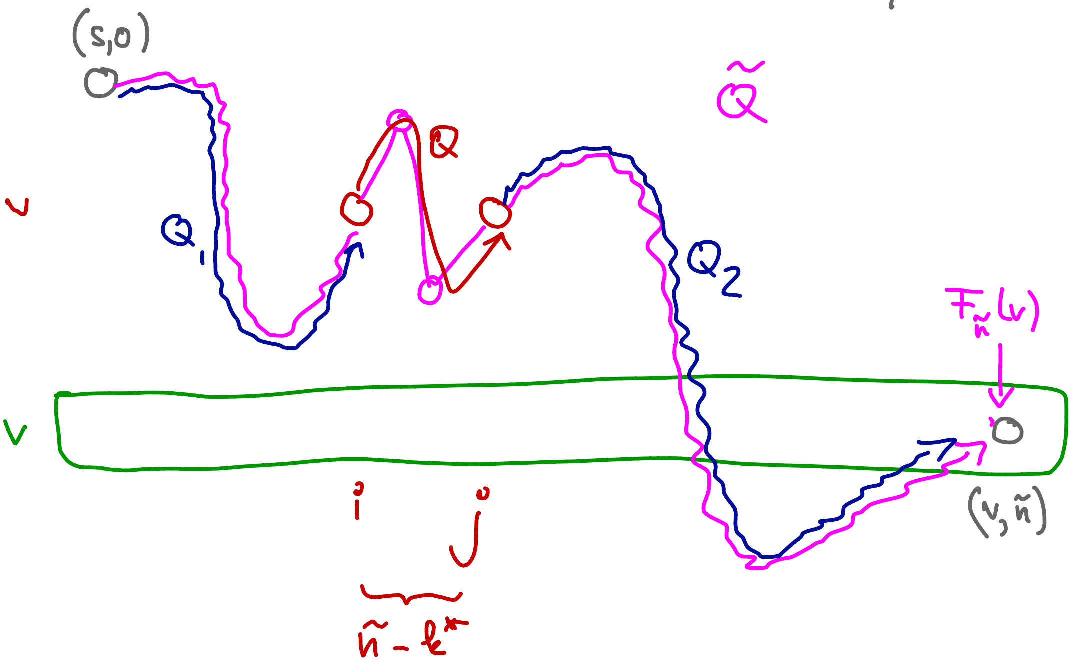
26.10.18

Zum Finden eines Minimum Mean Cycle



Beweis zu Satz 1.59

- Beide Seiten der Gleichung ändern sich um α, wenn man zu allen Längen von Bögen in $\tilde{A}$ die Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ addiert. Also können wir

$$\mu_{\tilde{c}}(\tilde{D}) = 0$$

annehmen (da $\tilde{D}$ nicht azyklisch ist).

- Insbesondere ist $\tilde{c}$ konservativ und wir haben:

$$\forall v \in V: \operatorname{dist}_{\tilde{c}}(s,v) = \min\{F_k(v) : 0 \leq k \leq \tilde{n}-1\}$$

und

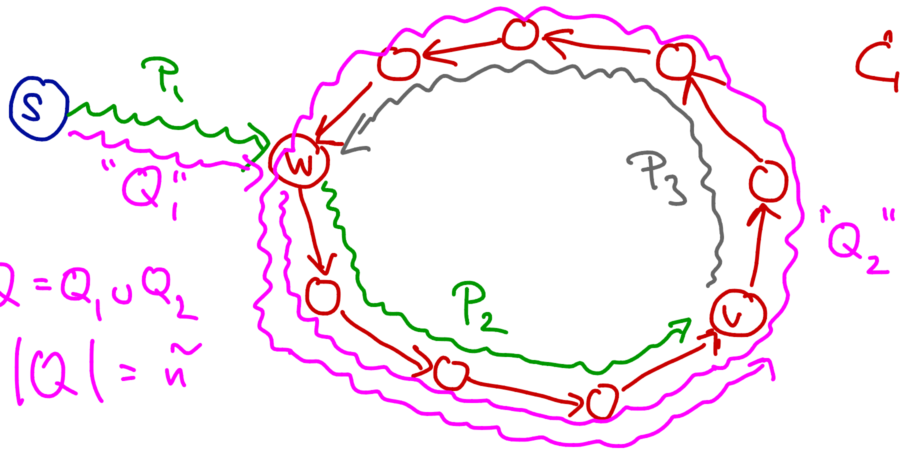
$$F_{\tilde{n}}(v) \geq \operatorname{dist}_{\tilde{c}}(s,v)$$

- Also ist die rechte Seite von (2) mindestens 0.

- Verbleibendes Ziel: Finde ein $v \in V$, so dass

$$F_{\tilde n}(v) \leq F_k(v) \quad \forall k = 0, .., \tilde n - 1 .$$

- Sei $C \subseteq \tilde A$ ein Kreis mit $\tilde c(C) = 0$ [existiert wegen $\mu_{\tilde c}(\tilde D) = 0$].



- Wähle irgendeinen Knoten w auf dem Kreis; sei $P_1 \subseteq \tilde{A}$ ein $\tilde{c}$-kürzester s-w-Weg.

- Sei $Q = Q_1 \cup Q_2 \subseteq A'$ der $(s,0)$-$(v,\tilde{n})$-Weg in $k(D)$, für den Q_1 den Weg P_1 in $\tilde{D}$ und Q_2 einen Pfad mit lauter Bögen in C induziert.

- v liegt auf dem Kreis wegen $|P_1| \leq \tilde{n}-1$.

- Sei $P_2 \subseteq \tilde{A}$ der w-v-Weg in C.

- Sei $P \subseteq \hat{A}$ der s-v-Pfad, der durch Anhängen von P_2 an P_1 entsteht.

- $$c'(Q) = \tilde{c}(P) \quad [\text{wegen } \tilde{c}(C) = 0]$$
$$= \mathrm{dist}_{\tilde{c}}(s,w) + \tilde{c}(P_2)$$

- Sei P_3 der v-w-Weg in C; es gilt $\tilde{c}(P_3) = -\tilde{c}(P_2)$ [wegen $\tilde{c}(C) = 0$].

- Also $\mathrm{dist}_{\tilde{c}}(s,w) = c'(Q) + \tilde{c}(P_3)$ (*)

- Andererseits ist $\tilde{c}$ konservativ:

$$\mathrm{dist}_{\tilde{c}}(s,w) \le F_k(v) + \tilde{c}(P_3) \quad \forall k$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{c'(Q)}_{\ge F_{\tilde{n}}(v)} \le F_k(v) \quad \forall k$$

$\blacksquare$