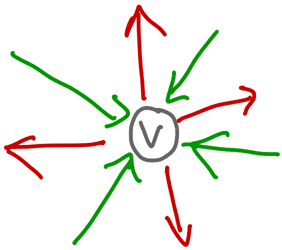
KO 1.11.18



$$ex_f(v) = \underbrace{\sum_{a\in\delta^{ein}(v)} f_a}_{f(\delta^{ein}(v))} - \underbrace{\sum_{a\in\delta^{aus}(v)} f_a}_{f(\delta^{aus}(v))}$$

Bem. 2.2: Für jeden s-t-Fluss $f \in \mathbb{R}_+^A$ in einem Netzwerk $(D=(V,A), u)$ mit $s,t \in V$ gilt: $-ex_f(s) = ex_f(t) =: \underbrace{val(f)}_{\text{"Flusswert von } f\text{"}}$

Beweis:

$$ex_f(s) + ex_f(t)$$

$$= \sum_{v \in V} ex_f(v)$$

$$= \sum_{v \in V} \Big(f(\delta^{ein}(v)) - f(\delta^{aus}(v)) \Big)$$

$$= \sum_{\substack{a \in A \\ \| \\ (u,w)}} \underbrace{(f_a - f_a)}_{0}$$

$$= 0$$

$\boxtimes$

Bem. 2.6: Für jedes Netzwerk $N = (D = (V, A), u)$ gilt:

1. Die Menge der Zirkulationen in N ist:

$$\{x \in \mathbb{R}^A : \mathrm{Inz}(D) \cdot x = \mathbb{0}_V,\ \mathbb{0}_A \leq x \leq u\}$$

2. Sind $s, t \in V$, so sind die Lösungen des Max-Flow-Problems genau die Optimallösungen des folgenden LP's:

$$\max \Big\{ x(\delta^{\mathrm{ein}}(t)) - x(\delta^{\mathrm{aus}}(t)) : \quad \mathrm{Inz}(D)_{V', *} \cdot x = \mathbb{0}_{V'}, \quad \mathbb{0}_A \leq x \leq u \Big\}$$

mit $V' = V \setminus \{s, t\}$

Das Max-Flow-Problem ist also ein lineares Optimierungsproblem (wie in EMO).

⇝ · Allgemeine theoretisch/praktisch effiziente LP-Algorithmen anwendbar

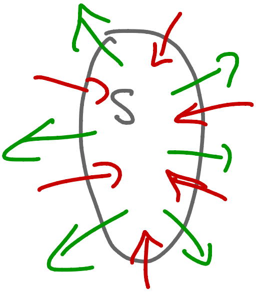
· Dualitätstheorie der LP.

ABER: Es gibt viel effizientere und speziellere kombinatorische Algorithmen.

<u>Def. 2.7:</u> Für einen Digraphen $D=(V,A)$ und $S \subseteq V$ sei:

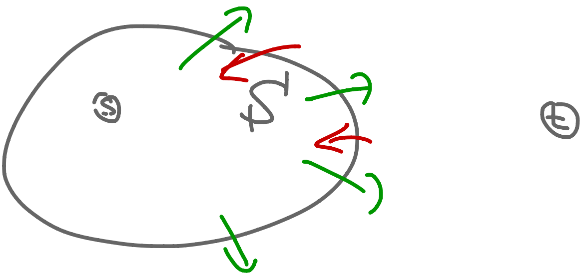
$$\boxed{\delta^{aus}(S)} := A \cap \left(S \times (V \setminus S)\right)$$

$$\boxed{\delta^{ein}(S)} := A \cap \left((V \setminus S) \times S\right)$$



Lemma 2.8: Sei $f \in \mathbb{R}_+^A$ ein s-t-Fluss in $(D=(V,A),u)$ und sei $S \subseteq V$ mit $s \in S$, $t \notin S$. Dann gilt:

$$\mathrm{val}(f) = f(\delta^{aus}(S)) - f(\delta^{ein}(S)).$$



Bew:

$$\mathrm{val}(f) = -\mathrm{ex}_f(s)$$

$$= -\sum_{v \in S} \mathrm{ex}_f(v)$$

$$= f(\delta^{aus}(S)) - f(\delta^{ein}(S))$$

$\square$