KO 2.11.18

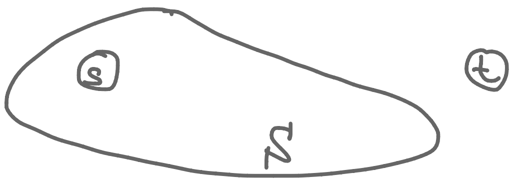
f s-t-Fluss:

$$\forall v \in V \setminus \{s,t\} : \quad f(\delta^{ein}(v)) = f(\delta^{aus}(v))$$

$$val(f) := \underbrace{f(\delta^{aus}(s)) - f(\delta^{ein}(s))}_{\parallel} \geq 0$$

$$f(\delta^{ein}(t)) - f(\delta^{aus}(t))$$

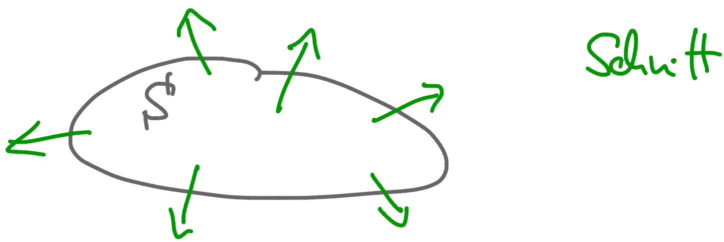
Lem. 2.8:



$$f(\delta^{aus}(S')) - f(\delta^{ein}(S')) = val(f)$$

$$\forall S' \subseteq V : s \in S', t \notin S'$$

<u>Def. 2.9:</u> Sei $D = (V, A)$ Digraph. Für $S \subseteq V$ heißt $\delta^{aus}(S) \subseteq A$ ein <u>Schnitt</u> in D. Gilt für $s, t \in V$ $s \in S$, $t \notin S$, so heißt $\delta^{aus}(S)$ ein <u>s-t-Schnitt</u>. Für $u \in \mathbb{R}_+^A$ heißt $u(\delta^{aus}(S))$ die <u>u-Kapazität</u> des Schnitts.



<u>Lemma 2.10:</u> In einem Netzwerk $(D = (V, A), u)$ und $s, t \in V$ gilt für jeden s-t-Fluss $f \in \mathbb{R}_+^A$ und für jeden s-t-Schnitt $C \subseteq A$:

$$\mathrm{val}(f) \leq u(C)$$

<u>Bew.:</u> Sei $C' = \delta^{aus}(S')$, $s \in S'$, $t \notin S'$.

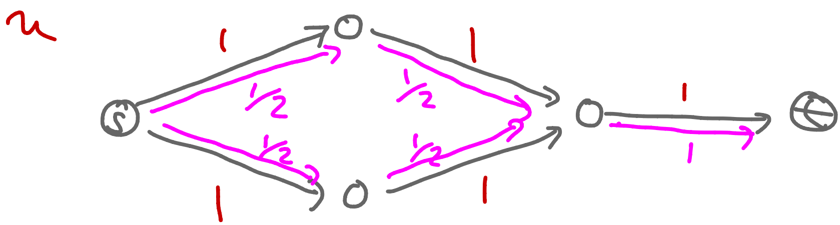
Lem. 2.8 $\Longrightarrow$

$$\mathrm{val}(f) = \underbrace{f(\delta^{aus}(S'))}_{\leq u(\delta^{aus}(S'))} - \underbrace{f(\delta^{ein}(S'))}_{\geq 0} \qquad \square$$

<u>Bem. 2.15</u>: Das Problem in einem Digraphen mit <u>beliebigen</u> Bogengewichten einen s-t-Schnitt minimalen/maximalen Gewichts zu finden, ist NP-schwer; das gilt sogar schon für das Problem, einen s-t-Schnitt mit maximal vielen Bögen zu finden.

Satz 2.16 [MAX-FLOW-MIN-CUT THEOREM]

Der maximale Wert eines s-t-Flusses in einem Netzwerk (D, u) $(u \geq 0)$ ist gleich der minimalen u-Kapazität eines s-t-Schnitts in D.



Satz 2.17: In einem Netzwerk $(D=(V,A), u)$ mit $u \in \mathbb{N}$ (ganzzahlig!) gibt es für alle $s, t \in V$ einen ganzzahligen maximalen s-t-Fluss $f \in \mathbb{N}^A$.

[Beweise zu beiden Sätzen: später]

Satz 2.18 [FLUSS-DEKOMPOSITIONS-THEOREM]

Ist $f \in \mathbb{R}_+^A$ ein s-t-Fluss in $(D=(V,A),u)$, so gibt es eine Menge $\mathcal{P}$ von s-t-Wegen und eine Menge $\mathcal{C}$ von Kreisen in D, sowie $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit:

- $\forall a \in A : f_a = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}: \\ a \in Q}} w(Q)$

- $\mathrm{val}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} w(P)$

- $|\mathcal{P} \cup \mathcal{C}| \leq |A|$

Beweis: Übung. $\boxed{2}$

Satz 2.19 [Satz von Menger, gerichtete bogendisjunkte Variante]

Sind $D=(V,A)$ ein Digraph und $s,t \in V$ und $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

Es gibt genau dann k bogendisjunkte s-t-Wege in D, wenn es für jede Teilmenge $R \subseteq A$ mit $|R| < k$ noch einen s-t-Weg in $A \setminus R$ gibt.

Beweis: Übung.

Alternative Formulierungen des Satzes 2.19

Die maximale Anzahl von bogen-disjunkten s-t-Wegen ist gleich der minimalen Kardinalität einer Bogenmenge, nach deren Entfernung kein s-t-Weg mehr existiert.

Entweder gibt es k bogendisjunkte s-t-Wege oder es gibt < k Bögen, nach deren Entfernung kein s-t-Weg mehr existiert (aber nicht beides).

("$A \Leftrightarrow B$" $\Leftrightarrow$ "A XOR NOT B")