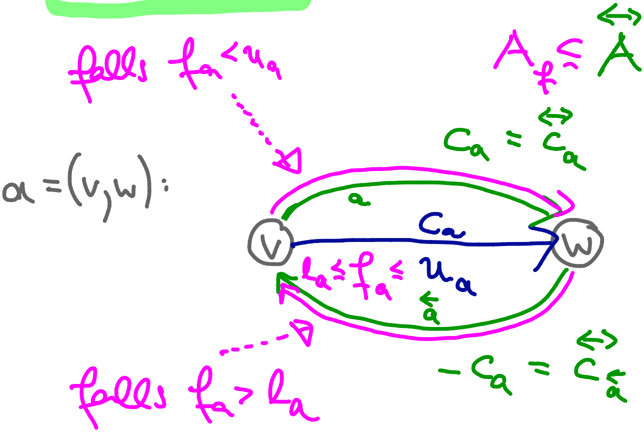
KO 16.11.18



$D = (V,A)$

$f \in \mathbb{R}^A_{\ge 0}$

<u>Satz 2.47</u>: Für $D = (V,A)$, $l,u \in \mathbb{R}^A$ $(l \le u)$, $c \in \mathbb{R}^A$ ist $f \in \mathrm{Circ}(D,l,u)$ genau dann Optimallösung von

$$\min\{\langle c,x\rangle : x \in \mathrm{Circ}(D,l,u)\},$$

wenn D_f keinen Kreis negativer $\overleftrightarrow{c}$-Länge hat.

Beweis:

- Ist $C \subseteq A_f$ ein Kreis, so ist

$$\tilde{f} := \operatorname{aug}(f, C, \operatorname{cap}_f(C))$$

$\tilde{f} \in \operatorname{Circ}(D, \ell, u)$ und

$$c(\tilde{f}) - c(f) = \operatorname{cap}_f(C) \cdot \overset{(\leftrightarrow)}{c}(C).$$

- Umgekehrt sei $\tilde{f} \in \operatorname{Circ}(D, \ell, u)$ eine Zirkulation mit $c(\tilde{f}) < c(f)$.

- $\tilde{f} - f$ ist eine Zirkulation in D mit $c(\tilde{f} - f) = c(\tilde{f}) - c(f) < 0$.

Definiere $\overleftrightarrow{f} \in \mathbb{R}_{>0}^{A_f}$ folgendermaßen:

Für alle $a \in A$ mit $\tilde{f}_a > f_a$ setze $\overleftrightarrow{f}_a := \tilde{f}_a - f_a$

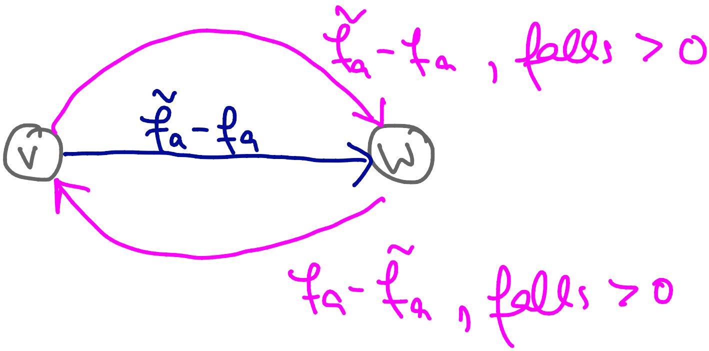
($a \in A_f$, da $f_a < \tilde{f}_a \leq u_a$)

und für alle $a \in A$ mit $\tilde{f}_a < f_a$ setze $\overleftrightarrow{f}_{\overleftarrow{a}} := f_a - \tilde{f}_a$.

($\overleftarrow{a} \in A_f$, da $f_a > \tilde{f}_a \geq l_a$)

Setze $\overleftrightarrow{f} = 0$ auf allen anderen Bögen in A_f.

$\overleftrightarrow{f}$ ist Zirkulation in D_f.



$$\overset{\leftrightarrow}{c}(\overset{\leftrightarrow}{f}) = c(\tilde{f} - f) < 0$$

Nach Flussdekompositionstheorem gibt es Kreise $C_1, \dots, C_r \subseteq A_f$ und Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\overset{\leftrightarrow}{f} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \chi(C_i)$$

Wegen $0 > \overset{\leftrightarrow}{c}(\overset{\leftrightarrow}{f}) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \overset{\leftrightarrow}{c}(C_i)$

existiert wenigstens ein i mit

$$\overset{\leftrightarrow}{c}(C_i) < 0. \qquad \square$$