KO 13.12.18

- Sei $Q(G) \subseteq \mathbb{R}^E$ das vom System (1) definierte Polytop.

- Offenbar ist $P_{match}^{perf}(G) \subseteq Q(G)$.
[Alle Bedingungen in (1) gelten für die charakteristischen Vektoren von perfekten Matchings.]

- Falls $P_{match}^{perf}(G) \not\supseteq Q(G)$ für ein G, so wähle ein solches $G = (V, E)$ mit $|V| + |E|$ minimal.

- Sei x eine Ecke von $Q(G)$ mit $x \notin P_{match}^{perf}(G)$
[existiert, weil $Q(G)$ die konvexe Hülle seiner Ecken und $P_{match}^{perf}(G)$ konvex ist]

- Weil (i.) ein rationales System ist, ist $x \in \mathbb{Q}^E$.

- Wegen der Minimalität von G ist

$$0 < x_e < 1 \quad \text{für alle } e \in E$$

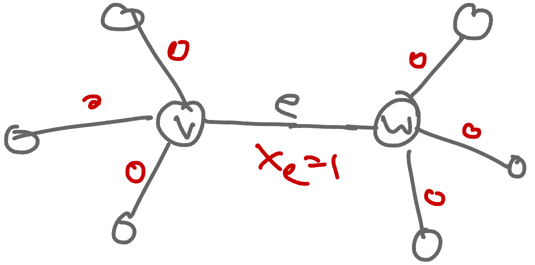
[Denn:

- Wenn $x_e = 0$, so gilt für $G' = (V, E')$ mit $E' = E \setminus \{e\}$:

$$x_{E'} \in Q(G') \setminus P^{perf}_{match}(G')$$

- Wenn $x_e = 1$, so gilt für (mit $e = \{v, w\}$) $G'' = (V'', E'')$ mit $V'' = V \setminus \{v, w\}$ und $E'' = E \setminus (\delta_G(v) \cup \delta_G(w))$

$$x_{E''} \in Q(G'') \setminus P^{perf}_{match}(G'')$$



$\rightsquigarrow x_{E''}$ erfüllt (1)

[Weil eine Konvexkombination von $x_{E'}$ bzw. $x_{E''}$ aus charakteristischen Vektoren von perfekten Matchings in G' bzw. G'' eine Konvexkombination von x aus charakteristischen Vektoren von perfekten Matchings in G liefern würde.]]

- Wegen $x(\delta(v)) = 1$ für alle v und $x_e < 1$ für alle $e \in E$ muss $|\delta(v)| \geq 2$ für alle $v \in V$ sein.

- Da $\sum_{v \in V} |\delta(v)| = 2|E|$ ist also
$$|E| \geq |V|.$$

- Wäre $|E| = |V|$, so $|\delta(v)| = 2$ für alle $v \in V$, also G disjunkte Vereinigung von Kreisen. Keiner dieser Kreise kann ungerade Länge haben (wegen $x(\delta(U)) \geq 1$ $\forall U$, $|U|$ ungerade), also ist G bipartit ↯

$\Rightarrow P_{\text{perf match}}(G) \neq Q(G)$ (Kor. 3.30)

- Folglich $|E| > |V|$.

- Da x Ecke von $Q(G) \subseteq \mathbb{R}^E$ ist, gibt es $|E| > |V|$ linear unabhängige Bedingungen in (1), die von x mit Gleichheit erfüllt werden; wegen $x_e > 0$ $\forall e \in E$ muss also

ein $U \subseteq V$ mit $|U| \in 2\mathbb{Z}+1$
und $|U| \geq 3$, $|V \setminus U| \geq 3$
(wegen der linearen Unabhängigkeit)
und

$$x'(\delta(U)) = 1$$

existieren.

- Definiere (durch "Kontraktion" von U bzw. $V \setminus U$) Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit

$$V_1 = U \cup \{w_1\} \qquad V_2 = V \setminus U \cup \{w_2\}$$

und

$$E_1 = E(\mathcal{U}) \cup \{\{u, w_1\} : u \in \mathcal{U},\ \delta(u) \cap \delta(\mathcal{U}) \neq \emptyset\}$$

$$E_2 = E(V \setminus \mathcal{U}) \cup \{\{v, w_2\} : v \in V \setminus \mathcal{U},\ \delta(v) \cap \delta(\mathcal{U}) \neq \emptyset\}$$

und $x^1 \in \mathbb{R}^{E_1}$, $x^2 \in \mathbb{R}^{E_2}$ mit:

$$x^1_{E(\mathcal{U})} := x_{E(\mathcal{U})},\quad x^1_{\{u,w_1\}} := x(\delta(u) \cap \delta(\mathcal{U}))\ \forall \{u, w_1\} \in E_1$$

$$x^2_{E(V \setminus \mathcal{U})} := x_{E(V \setminus \mathcal{U})},\quad x^2_{\{v,w_2\}} := x(\delta(v) \cap \delta(\mathcal{U}))\ \forall \{v, w_2\} \in E_2$$

- Wegen $Q(G) \neq \emptyset$ ist $|V| \in 2\mathbb{Z}$,
  (sonst $x(\underbrace{\delta(V)}_{\emptyset}) \geq 1$ ↯)

also ist mit $|\mathcal{U}|$ und $|V \setminus \mathcal{U}|$ ungerade.

- Daraus und aus

$$x^1(\delta(w_1)) = \underbrace{x(\delta(u))}_{1} = x^2(\delta(w_2))$$

folgt
$$x^1 \in Q(G_1)$$
$$x^2 \in Q(G_2).$$