$\boxed{\text{KO 14.12.18}}$

- Es gilt:

$$\underbrace{|V_1|}_{\substack{\le |V|-2 \\ [|V\setminus U| \ge 3]}} + \underbrace{|E_1|}_{\le |E|}\,,\quad \underbrace{|V_2|}_{\substack{\le |V|-2 \\ [|U| \ge 3]}} + \underbrace{|E_2|}_{\le |E|} < |V| + |E|$$

- Wegen der Minimalität von $|V|+|E|$ ist also $x^1 \in Q(G_1) = P^{\text{perf}}_{\text{match}}(G_1)$ und

$$x^2 \in Q(G_2) = P^{\text{perf}}_{\text{match}}(G_2),$$

also gibt es perfekte Matchings $\tilde{M}^1_j$ in G_1 und $\tilde{M}^2_j$ in G_2 und $\lambda^1_j, \lambda^2_j \ge 0$ und $\sum_j \lambda^1_j = 1$ und $\sum_j \lambda^2_j = 1$ und

$$x^1 = \sum_j \lambda_j^1 \cdot \chi(\tilde{M}_j^1),$$

$$x^2 = \sum_j \lambda_j^2 \cdot \chi(\tilde{M}_j^2).$$

- Wir können annehmen, dass alle λ_j^1, λ_j^2 rational sind; sei $k \in \mathbb{N}$ ihr Hauptnenner.

- Also gibt es perfekte Matchings
  $M_1^1, \dots, M_k^1$ in G_1 und
  $M_1^2, \dots, M_k^2$ in G_2 mit

$$k \cdot x^1 = \sum_{i=1}^{k} M_i^1, \quad k \cdot x^2 = \sum_{i=1}^{k} M_i^2.$$

- Für jedes $i \in [k]$ seien $u_i \in U$ und $v_i \in V \setminus U$ die mit w_1 in M_i^1 bzw. mit w_2 in M_i^2 gematchten Knoten.

- Für alle $u \in U$ gilt:

$$\left|\{i \in [k] : u_i = u\}\right| = k \cdot x^1_{uw_1} = k \cdot x(\delta(u) \cap \delta(W))$$

und für alle $v \in V \setminus U$:

$$\left|\{i \in [k] : v_i = v\}\right| = k \cdot x^2_{vw_2} = k \cdot x(\delta(v) \cap \delta(W))$$

- Also können wir annehmen, dass nach Umnummerierung gelten:

- $\{u_i, v_i\} \in E \quad \forall i \in [k]$

- $\left|\{i \in [k] : u_i = u, v_i = v\}\right| = k \cdot x_{uv}$

für alle $\{u, v\} \in \delta(U)$,
$u \in U, v \in V \setminus U$.

- Dann sind

$$M_i := M_i^1 \setminus \{u_i w_1\} \cup M_i^2 \setminus \{v_i w_1\} \cup \{u_i v_i\}$$

$(i \in [k])$ perfekte Matchings in G

mit $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \chi(M_i) = k \cdot x$,

also

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \cdot \chi(M_i) \quad \lightning$$

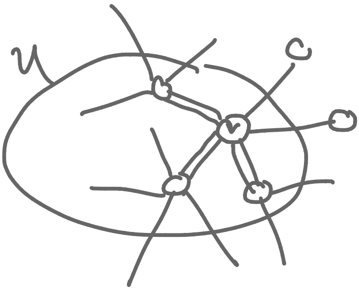
$x \notin P^{perf}_{match}(G)$

$\boxtimes$

Umformung der $x(\delta(U)) \geq 1$ Ungleichung

- Sei $U \subseteq V$, $|U|$ ungerade
- Summation von $x(\delta(v)) = 1 \ \forall v \in U$:

$$2x(E[U]) + x(\delta(U)) = \sum_{v \in U} x(\delta(v)) = |U|$$



- Subtrahiere diese Gleichung von der Ungleichung $x(\delta(U)) \geq 1$ ergibt:

$$-2x(E[U]) \geq 1 - |U|$$

$$\Longleftrightarrow \quad x(E[U]) \leq \frac{|U|-1}{2}$$

Im durch $x(\delta(v)) = 1 \ \forall v \in V$
definierten affinen Unterraum
von $\mathbb{R}^E$ haben

$$x(\delta(U)) \geq 1$$

"Blüten-Ungleichungen"

und

$$x(E(U)) \leq \frac{|U|-1}{2}$$

die gleiche Lösungsmenge.