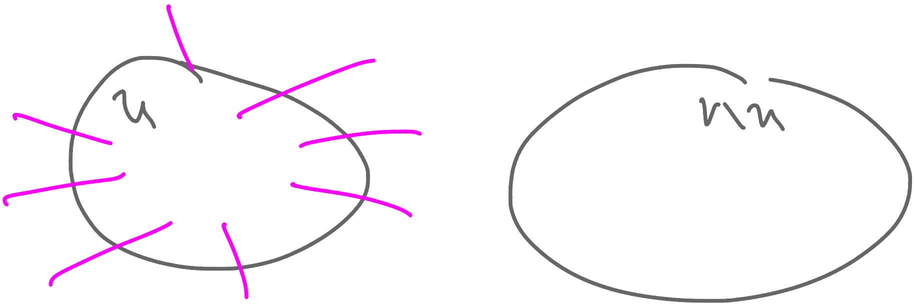
KO 20.12.18

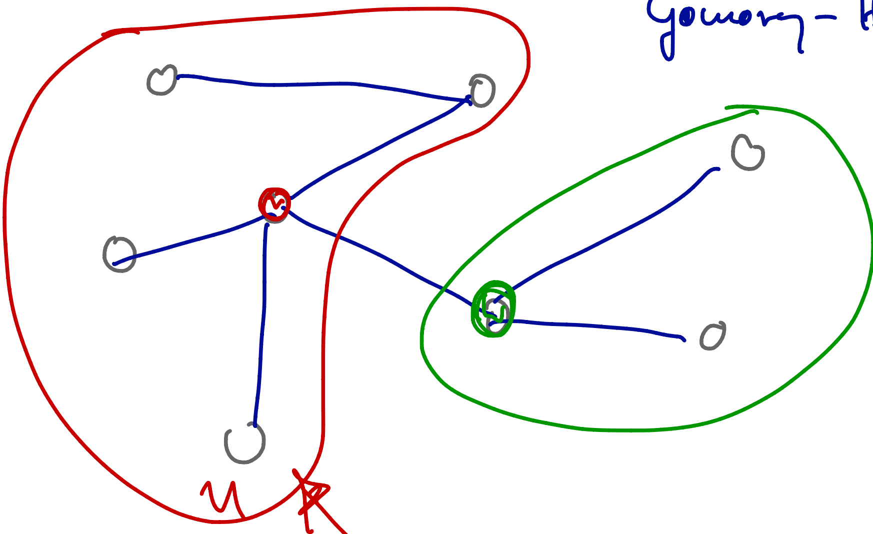
$|V| \in 2\mathbb{Z}$



$|U| \in 2\mathbb{Z}+1$ $\qquad$ $|V \setminus U| \in 2\mathbb{Z}+1$

ungerader Schnitt

Gomory-Hu-Baum



$\delta(U)$ e. minimaler v-w-Schnitt

Beweis zu Satz 3.39

- Sei $\delta_G(\mathcal{U})$ $(\mathcal{U} \subseteq V, |\mathcal{U}| \in 2\mathbb{Z}+1)$ ein c-minimaler ungerader Schnitt in G.

- Für jede $f \in F$ sei $W_f \subseteq V$ eine der beiden Komponenten von $B \setminus \{f\}$.

- Es genügt zu zeigen, dass es ein $f^* \in \delta_B(\mathcal{U})$ gibt mit $|W_{f^*}| \in 2\mathbb{Z}+1$

[Denn: - Sei $f^* = \{u^*, v^*\}$ mit $u^* \in \mathcal{U}$, $v^* \in V \setminus \mathcal{U}$

- Weil B Gomory-Hu-Baum ist, und $\delta_G(\mathcal{U})$ ein u^*-v^*-Schnitt in G ist, ist

$$c(\delta_G(W_{f^*})) \leq c(\delta_G(U))$$

also ist (weil $|W_{f^*}| \in 2\mathbb{Z}+1$)

$\delta_G(W_{f^*})$ ein c-minimaler ungerader

Schnitt in G.]

- Für alle $v \in V$ sei

$$\pi(v) := \left|\{ f \in \delta_B(U) : v \in W_f \}\right|$$

- $$\sum_{f \in \delta_B(U)} |W_f| = \left|\{ (f, v) : f \in \delta_B(U), v \in W_f \}\right|$$

$$= \sum_{v \in V} \pi(v) \qquad (*)$$

- Für $f = \{v, w\}$ gilt:

$$\pi(w) \overset{\text{mod } 2}{\equiv} \begin{cases} \pi(v) & \text{falls } f \notin \delta_B(u) \\ \pi(v)+1 & \text{falls } f \in \delta_B(u) \end{cases}$$

- Für $u, u' \in U$, $v, v' \in V \setminus U$ gelten:

$$\pi(u) \overset{\text{mod } 2}{\equiv} \pi(u')$$

$$\pi(v) \overset{\text{mod } 2}{\equiv} \pi(v')$$

$$\pi(u) \overset{\text{mod } 2}{\not\equiv} \pi(v)$$

[Denn: Auf dem u-u'-Weg und auf dem v-v'-Weg liegen gerade viele $\delta_B(u)$-Kanten, auf dem u-v-Weg ungerade viele.]

- Es gilt also $\beta \in \{0,1\}$ und

$$\sum_{v \in V} \pi(v) \overset{\text{mod } 2}{\equiv} \underbrace{|U|}_{\in 2\mathbb{Z}+1} \cdot \beta + \underbrace{|V \setminus U|}_{\in 2\mathbb{Z}+1} (1-\beta)$$

$$\overset{\text{mod } 2}{\equiv} 1$$

- Wegen (*) gilt es also $f^* \in \delta_g(U)$ und

$$|W_{f^*}| \in 2\mathbb{Z}+1 \qquad \blacksquare$$