KO 21.12.18

Beispiele für Unabhängigkeitssysteme

B_1: $G = (V, E)$ Graph

$\mathcal{I} = \{ F \subseteq E : F$ enthält keinen Kreis $\}$

B_2: $\mathbb{K}$ Körper, $E \subseteq \mathbb{K}^n$, $|E| < \infty$ (Spalten einer Matrix)

$\mathcal{I} = \{ F \subseteq E : F$ $\mathbb{K}$-linear unabhängig $\}$

B_3: E endlich, $r \in \mathbb{N}$

$\mathcal{I} = \{ F \subseteq E : |F| \leq r \}$

B_4: $G = (V, E)$ Graph

$\mathcal{I} = \{ F \subseteq E : F$ enthalten in einem Kreis in $G \}$

$\cup \{ \emptyset \}$

Zu den Beispielen (Matroide?)

$\mathcal{B}_2$: Matroid ("lineare Matroide über $\mathbb{K}$")

$\mathcal{B}_3$: Matroid ("uniforme Matroide")

$\mathcal{B}_4$: i.A. kein Matroid

Satz 4.3: Für jeden Graphen $G=(V,E)$ bilden die Wälder $F \subseteq E$ die unabhängigen Mengen eines Matroids ("graphisches Matroid").

Bew.: • Für jeden Wald $F \subseteq E$ sei $K(F)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von (V,F).

- Dann: $K(F) = |V| - |F|$
  [Sukzessives Hinzufügen aller Kanten aus F zu $(V, \emptyset)$.]

- Seien $X, Y \subseteq E$ Wälder, $|X| < |Y|$.

- Angenommen, für jedes $e \in Y \setminus X$ hätte $X \cup \{e\}$ einen Kreis, dann ändern sich die Zusammenhangskomponenten von (V, X) nicht, wenn wir $Y \setminus X$ hinzufügen.

- Also
$$\underbrace{K(X)}_{= |V| - |X|} = \underbrace{K(Y)}_{= |V| - |Y|}$$

$$\Rightarrow |X| = |Y| \quad \lightning$$

$\square$

Bemerkung

- Der Greedy-Algorithmus kann so implementiert werden, dass sich Laufzeit durch

$$\mathcal{O}\left(|E| \cdot \log |E| + |E| \cdot \alpha\right)$$

abgeschätzt werden kann, wenn man in $\mathcal{O}(\alpha)$ Schritten testen kann, ob eine Menge unabhängig ist.

- Die vom Greedy-Algorithmus berechneten Menge $S_0, S_1, \ldots$ haben die folgende Eigenschaft:
  - $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$ unabhängig
  - $|S_k| = k \quad \forall k$
  - $r = r_M(E(M)) =$ Rang von M

Beweis von Satz 4.7

- Für die Elemente $s_1, \dots, s_k \in E$ aus dem Greedy-Alg. gilt:
  - $w(s_1) \geq w(s_2) \geq \dots \geq w(s_r)$
  - $S_k = \{s_1, \dots, s_k\}$
- Angenommen, es gäbe $T \in \mathcal{I}(M)$ mit:
  - $T = \{t_1, \dots, t_k\}$
  - $w(t_1) \geq \dots \geq w(t_k)$
  - $w(T) > w(S_k)$
- Es gibt $1 \leq p \leq k$ mit $w(t_p) > w(s_p)$

- Es gilt:
  - $\{t_1, \dots, t_{p-1}, t_p\} \overset{\subseteq T}{} \in \mathcal{I}(M)$
  - $\{s_1, \dots, s_{p-1}\} \in \mathcal{I}(M)$
- Also gibt es nach (I_3) ein $1 \le i \le p$ mit $t_i \notin \{s_1, \dots, s_{p-1}\}$ und

$$\{s_1, \dots, s_{p-1}, t_i\} \in \mathcal{I}(M)$$

- Wegen $w(t_i) \geq w(t_p) > w(s_p)$ widerspricht das der Wahl von s_p.

$\boxtimes$