# Vorlesung
# **Kombinatorische Optimierung**
(Wintersemester 2018/19)

Kapitel 3: Matchings

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 20. Dezember 2018)

# Matchings

## Definition 3.1

Ein **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$ (mit Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$) ist eine Kantenteilmenge $M \subseteq E$ mit

$$e \cap e' = \emptyset$$

für alle $e, e' \in M$ mit $e \neq e'$. Ein Matching $M \subseteq E$ heißt **perfekt**, wenn

$$M \cap \delta(v) \neq \emptyset$$

für alle $v \in V$ gilt (oder äquivalent dazu: $V = \bigcup_{e \in M} e$).

# Bipartite Graphen

## Definition 3.2

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit**, wenn es eine Bipartition $V = X \uplus Y$ (mit $X \cap Y = \emptyset$) gibt mit

$$e \not\subseteq X \quad \text{und} \quad e \not\subseteq Y$$

für alle $e \in E$.

## Bemerkung 3.3

*Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader (kombinatorischer) Länge enthält.*

# Satz von Hall

**Satz 3.4**

*Ein bipartiter Graph* $G = (V, E)$ *mit Bipartition* $V = X \uplus Y$ *und* $|X| = |Y|$ *hat entweder ein perfektes Matching oder es gibt* $A \subseteq X$ *mit* $|N(A)| < |A|$ *(aber nicht beides).*

# Satz von König

## Definition 3.5

Eine **Knotenüberdeckung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenteilmenge $W \subseteq V$ mit

$$e \cap W \neq \emptyset$$

für alle $e \in E$.

## Satz 3.6

*In einem bipartiten Graphen ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung.*

(Kombinatorische starke Dualität, **Min-Max Resultat**)

# Matchingprobleme

## Problem 3.7 (Kardinalitäts-Matchingproblem)

Instanz: *Graph $G = (V, E)$*

Aufgabe: *Bestimme ein Matching maximaler Kardinalität in $G$.*

## Problem 3.8 (Gewichtetes Matchingproblem)

Instanz: *Graph $G = (V, E)$, Kantengewichte $w \in \mathbb{Q}^E$*

Aufgabe: *Bestimme ein Matching $M \subseteq E$ maximalen Gewichts $w(M)$.*

## Problem 3.9 (Gewichtetes perfektes Matchingproblem)

Instanz: *Graph $G = (V, E)$, Kantenkosten $c \in \mathbb{Q}^E$*

Aufgabe: *Bestimme ein perfektes Matching $M \subseteq E$ minimaler Kosten $c(M)$ oder stelle fest, dass $G$ kein perfektes Matching hat.*

# Perfekte Matchings in bipartiten Graphen

**Satz 3.10**

*Das gewichtete perfekte Matchingproblem kann in bipartiten Graphen $G = (V, E)$ in Zeit $\mathrm{O}(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$ gelöst werden.*

(Mittels Successive-Shortest-Path Algorithmus in einem Netzwerk, das zwei zusätzliche Knoten hat; siehe Übungen)

# Das Lineare Assigment Problem

## Definition 3.11

Ein bipartiter Graph $K_{n,m} = (V, E)$ mit Bipartition $V = X \uplus Y$, $n = |X|$, $m = |Y|$ und

$$E = \{\{x, y\} \,|\, x \in X, y \in Y\}$$

heißt ein **vollständiger bipartiter Graph** auf $n + m$ Knoten.

## Bemerkung 3.12

*Das gewichtete perfekte Matchingproblem im $K_{n,m}$ (**Lineares Assignment-Problem**) kann in*

$$\mathrm{O}(nm(n + m))$$

*Zeit gelöst werden.*

("Ungarische Methode", Spezialfall des Successive-Shortest-Path Algorithmus.)

# Matchings in Bipartiten Graphen

**Korollar 3.13**

*Das gewichtete Matchingproblem in bipartiten Graphen $G = (V, E)$ kann in $\mathrm{O}(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$ Zeit gelöst werden.*

(Siehe Übungen.)

# Alternierende Pfade

## Definition 3.14

Sei $M \subseteq E$ ein Matching in $G = (V, E)$. Ein Knoten $v \in V$ heißt $M$-**exponiert**, wenn $v \notin e$ für alle $e \in M$ gilt. Die Menge der $M$-exponierten Knoten ist $X_M \subseteq V$.
Ein Tupel $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ von Knoten in $V$ mit $\ell > 0$ ist ein $M$-**alternierender Pfad**, wenn

- $e_i := \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für alle $i \in [\ell]$ und
- $|\{e_i, e_{i+1}\} \cap M| = 1$ für alle $i \in [\ell - 1]$.

gelten; wir bezeichnen seine Kantenmenge mit $E(P) = \{e_1, \ldots, e_\ell\}$.

# Augmentierende Wege

## Definition 3.15

Ein $M$-**augmentierender Weg** ist ein $M$-alternierender Pfad $P = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ mit $\ell \geq 1$ und

- $v_0$ und $v_\ell$ sind $M$-exponiert und
- $v_0, v_1, \dots, v_\ell$ sind paarweise verschieden

($E(P) \subseteq E$ ist also ein $v_0$-$v_\ell$-Weg in $G$).

# Finden Kardinalitätsmaximaler Matchings

**Satz 3.16**

*Ein Matching $M \subseteq E$ in $G = (V, E)$ ist genau dann ein Matching maximaler Kardinalität in $G$, wenn es keinen $M$-augmentierenden Weg gibt.*

(Beweis: Übungen)

**Algorithmischer Ansatz:**

Starte mit leerem Matching $M$ und ersetze iteriert $M$ durch $M \triangle E(P)$ mit einem $M$-augmentierenden Weg $P$, solange ein solcher existiert (höchstens $\frac{|V|}{2}$ Iterationen).

# Finden augmentierender Wege

- Sei $M \subseteq E$ ein Matching in $G = (V, E)$.
- Definiere den Digraphen $D_M = (V, A_M)$ mit

$$A_M = \{(v, w) : \text{Es gibt } u \in V \text{ mit } \{v, u\} \in E \setminus M \\ \text{und } \{u, w\} \in M.\}$$

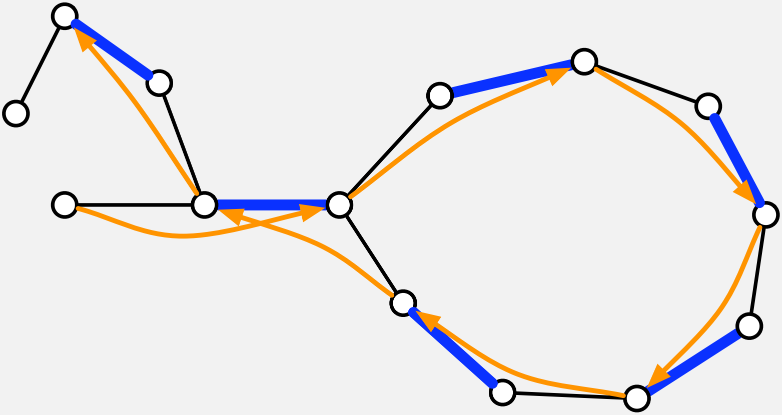
- Für $S \subseteq V$ sei
$$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) \subseteq V\,.$$

- Jeder $M$-augmentierende Weg in $G$ mit Endknoten $s \neq t$ induziert einen $s$-$t'$-Weg in $D_M$ (mit $s \in X_M$ und $s \neq t \in N(t')$, also $t' \in N(X_M \setminus \{s\})$).

# Finden augmentierender Wege

- Ein $s$-$t'$-Weg $W$ in $D_M$ mit $s \in X_M$ und $t' \in N(X_M \setminus \{s\})$ induziert i. A. aber nur einen alternierenden Pfad in $G$ (vgl. nächste Folie).
- Falls $G$ bipartit ist, kann das nicht passieren (keine ungeraden Kreise in $G$).
- Also kann man für bipartite $G$ durch Breitensuche (von exponierten Knoten aus) in $O(|E|)$ Schritten einen $M$-augmentierenden Weg finden oder feststellen, dass $M$ maximale Kardinalität hat.

# Blumen mit Blüten und Stielen



# Kardinalitätsmaximale Matchings in Bipartiten Graphen

**Bemerkung 3.17**

*Ein kardinalitätsmaximales Matching kann in bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mittels iterierten Findens augmentierender Wege in Zeit* $\mathrm{O}(|V||E|)$ *bestimmt werden.*

- Vergleiche augmentierende Fluss-Algorithmen.
- Die Laufzeitschranke kann sogar auf $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ verbessert werden.

# Blüten

**Definition 3.18**

Ist $M \subseteq E$ ein Matching in $G = (V, E)$, so heißt ein $M$-alternierender Pfad $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ eine $M$-**Blume**, wenn

- $v_0 \in X_M$,
- $v_0, \ldots, v_{\ell-1}$ paarweise verschieden,
- $v_\ell = v_i$ für ein gerades $i \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$.

Das Tupel $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{\ell-1}, v_\ell = v_i)$ heißt dann eine $M$-**Blüte**; der alternierende Weg $(v_0, \ldots, v_i)$ der $M$-**Stiel** der $M$-Blume.

# Kontraktion / Schrumpfen

## Definition 3.19

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $S \subseteq V$. Der durch **Kontraktion** (**Schrumpfen**) von $S$ entstehende Graph ist $G/S = (V \setminus S \cup \{S\}, E/S)$ mit

$$E/S = E(V \setminus S) \cup \{\{v, S\} \mid \delta(v) \cap \delta(S) \neq \emptyset\}.$$

Für $M \subseteq E$ definieren wir analog

$$M/S := M \cap E(V \setminus S) \cup \{\{v, S\} \mid \delta(v) \cap \delta(S) \cap M \neq \emptyset\}.$$

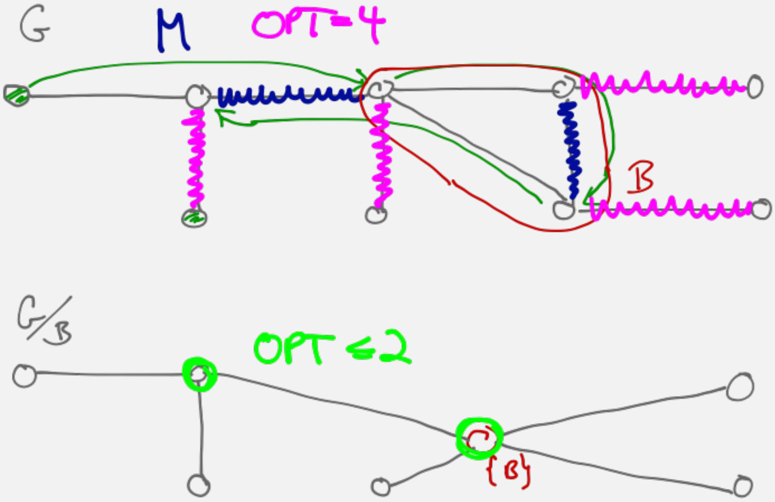
# Blüten-Schrumpf-Lemma

**Lemma 3.20**

*Seien $M \subseteq E$ ein Matching in $G = (V, E)$ und $(v_0, v_1, \dots, v_\ell = v_0)$ eine $M$-Blüte mit $B = \{v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}\}$. Dann ist $M$ genau dann ein kardinalitätsmaximales Matching in $G$, wenn $M/B$ ein kardinalitätsmaximales Matching in $G/B$ ist; aus einem $M/B$-aufgnentierenden Weg in $G/B$ kann man in Linearzeit einen $M$-augmengtiereden Weg in $G$ bestimmen.*

(Hier ohne Beweis.)

# Vorsicht beim Schrumpfen!



# Finden augmentierender Wege

## Algorithmus 3.21 (Augment-$M$)

Eingabe: *Matching* $M \subseteq E$ *in* $G = (V, E)$

Ausgabe: $M$*-augmentierender Weg (falls einer existiert)*

*Konstruiere* $D_M$
*Suche einen* $s$*-*$t$*-Weg* $W$ *in* $D_M$, $s \in X_M$, $t \in N(X_M \setminus \{s\})$.
**if** *kein solcher Weg existiert* **then**
    *Stop ("*$M$ *kardinalitätsmaximal")*
**if** $W$ *induziert Weg* $\tilde{W}$ *in* $G$ **then**
    *Stop ("*$\tilde{W}$ $M$*-augmentierend")*
*Sei* $B \subseteq V$ *die Knotenmenge der* $M$*-Blüte der* $M$*-Blume in* $\tilde{W}$.
*Rufe den Algorithmus rekursiv mit* $G/B$ *und* $M/B$ *auf.*
**if** $M/B$ *kardinalitätsmaximal in* $G/B$ **then**
    *Stop ("*$M$ *kardinalitätsmaximal in* $G$*")*
*Expandiere den gefundenen* $M/B$*-augmentierenden Weg* $Q$ *in* $G/B$ *zu einem* $M$*-augmentierenden Weg* $\tilde{Q}$ *in* $G$.
*STOP ("*$\tilde{Q}$ $M$*-augmentierend")*

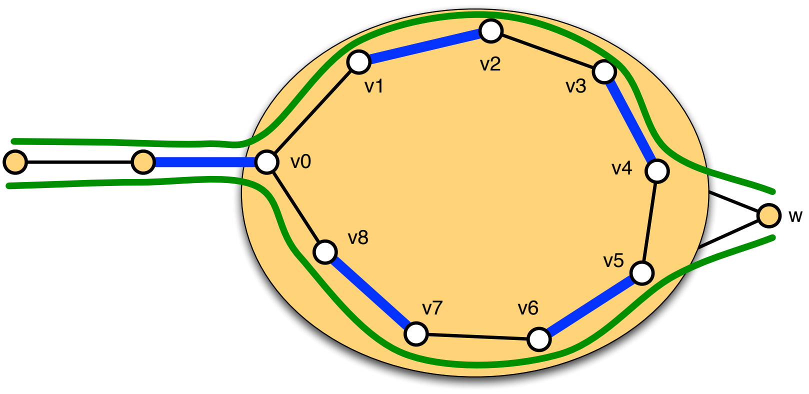
# Expandieren augmentierender Wege

- Liegt $\{B\}$ nicht auf $Q$, so wähle $\tilde{Q} = Q$.
- Andernfalls sei $(v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ die $M$-Blüte in $\tilde{W}$ $(B = \{v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1}\})$, so dass

$$\{v_0, v_1\}, \{v_{\ell-1}, v_0\} \notin M$$

  sind.
- Sei $w \in V$ der Knoten, für den $\{\{B\}, w\}$ die Nicht-Matching Kante in $Q$ ist; sei $j$ so, dass $\{v_j, w\} \in E$.
- Falls $j$ gerade: Ersetze $\{B\}$ durch $v_0, \ldots, v_j$
- Falls $j$ ungerade: Ersetze $\{B\}$ durch $v_j, v_{j+1}, \ldots, v_\ell$

# Expandieren augmentierender Wege



# Analyse des Augmentierungs-Algorithmus

**Lemma 3.22**

*Algorithmus 3.21 kann so implementiert werden, dass seine Laufzeit durch*

$$O(|V||E|)$$

*beschränkt ist.*

# Bestimmung eines kardinalitätsmaximalen Matchings

## Algorithmus 3.23 (Edmonds Blossom-Shrink Algorithmus)

Eingabe: *Graph* $G = (V, E)$

Ausgabe: *Matching* $M \subseteq E$ *maximaler Kardinalität in* $G$

1: $M \leftarrow \emptyset$
2: *Rufe Algorithmus 3.21 auf.*
3: **if** $M$ *kardinalitätsmaximal* **then**
4:     *Stop (Ausgabe:* $M$*)*
5: *Sei* $W \subseteq E$ *die Kantenmenge des gefundenen* $M$*-augmentierenden Weges*
6: $M \leftarrow M \triangle W$
7: *Gehe zu Schritt 2.*

# Analyse des Blossom-Skrink-Algorithmus

**Satz 3.24**

*Edmonds Blossom-Shrink Algorithmus findet in* $O(|V|^2|E|)$ *Schritten ein kardinalitätsmaximales Matching in* $G = (V, E)$.

**Korollar 3.25**

*Man kann in* $O(|V|^2|E|)$ *Zeit ein perfektes Matching in* $G = (V, E)$ *finden oder feststellen, dass* $G$ *kein perfektes Matching hat.*

# Bemerkungen zu Matching-Algorithmen

- Eine Variante des Blossom-Shrink Algorithmus ("alternierende Wälder") braucht nur $O(|V|^3)$ Schritte.
- Algorithmus von Micali und Vazirani sogar (ohne explizites Schrumpfen von Blüten): $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$
- Edmonds 1965: Erweiterung des Algorithmus für gewichts-maximale Matchings (mit beliebigen Gewichten $w \in \mathbb{Q}^E$) mit Laufzeitschranke $\mathrm{O}(|V|^4)$.
- Laufzeit-Verbesserung (Gabow 1990):

$$O(|V|(|E| + |V| \log |V|))$$

# Matching-Polytope

### Definition 3.25

Für einen Graphen $G = (V, E)$ sind

$$P_{\mathrm{match}}(G) := \mathrm{conv}\{\chi(M) \in \{0,1\}^E \mid M \subseteq E \text{ Matching}\}$$

das **Matching-Polytop** und

$$P_{\mathrm{match}}^{\mathrm{perf}}(G) := \mathrm{conv}\{\chi(M) \in \{0,1\}^E \mid M \subseteq E \text{ perfektes Matching}\}$$

das **perfekte Matching-Polytop** von $G$.

# Bemerkungen

- Die Ecken von $\mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G)$ bzw. $\mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G)$ sind die charakteristischen Vektoren der Matchings bzw. perfekten Matchings in $G$.
- Gewichtete (perfekte) Matchingprobleme kann man also lösen, indem man optimale Eckenlösungen von linearen Optimierungsproblemen über (perfekten ) Matching-Polytopen bestimmt.
- Um Algorithmen und Strukturtheorie (Dualitätssaätze) der Linearen Optimierung einsetzen zu können, benötigt man Beschreibungen der Polytope $\mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G)$ und $\mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G)$ als Schnitte von (endlich vielen) affinen Halbräumen.
- $\rightsquigarrow$ **Polyedrische Kombinatorik**

# Lineare 0/1-Beschreibungen

## Bemerkung 3.27

*Für* $G = (V, E)$ *ist* $x \in \{0, 1\}^E$ *genau dann enthalten in (und damit Ecke von)* $\mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G)$ *bzw.* $\mathrm{P}_{\mathrm{match}}^{\mathrm{perf}}(G)$, *wenn*

$$x(\delta(v)) \leq 1 \quad \text{für alle} \quad v \in V$$

*bzw.*

$$x(\delta(v)) = 1 \quad \text{für alle} \quad v \in V$$

*gelten.*

# Lineare Beschreibungen für Bipartite Graphen

**Satz 3.30**

*Für bipartite Graphen $G = (V, E)$ gilt:*

- $\mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G) = \{x \in [0,1]^E \mid x(\delta(v)) \leq 1 \text{ für alle } v \in V\}$
- $\mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G) = \{x \in [0,1]^E \mid x(\delta(v)) = 1 \text{ für alle } v \in V\}$

(Beweis: VL Ganzzahlige Lkineare Optimierung, SoSem 19)

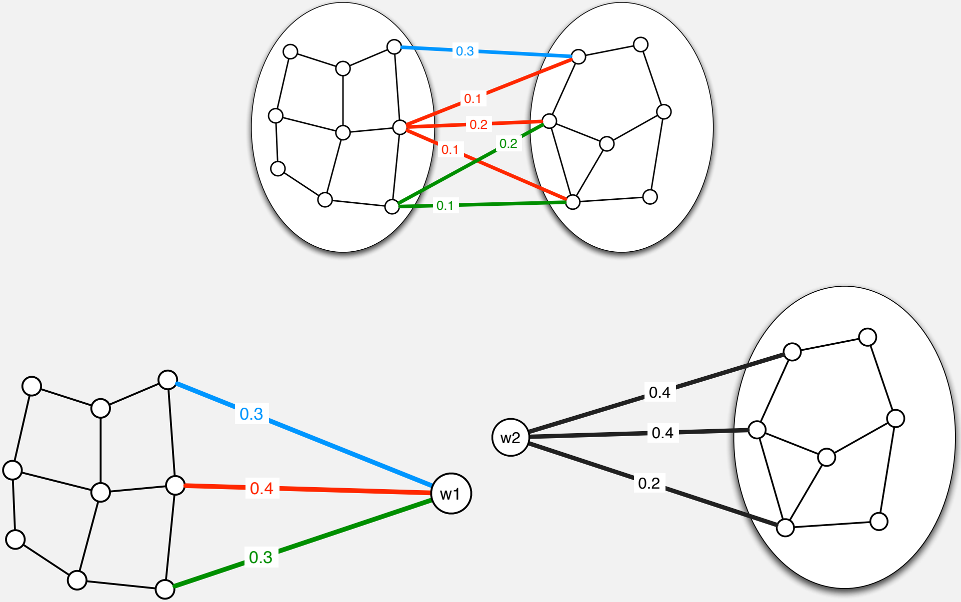
# Perfekte Matching-Polytope Beliebiger Graphen

## Satz 3.31

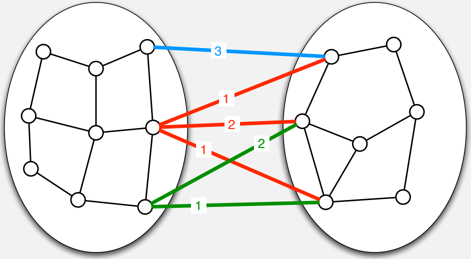
*Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist $\mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G)$ das Polyeder, das von den folgenden linearen Bedingungen beschrieben wird:*

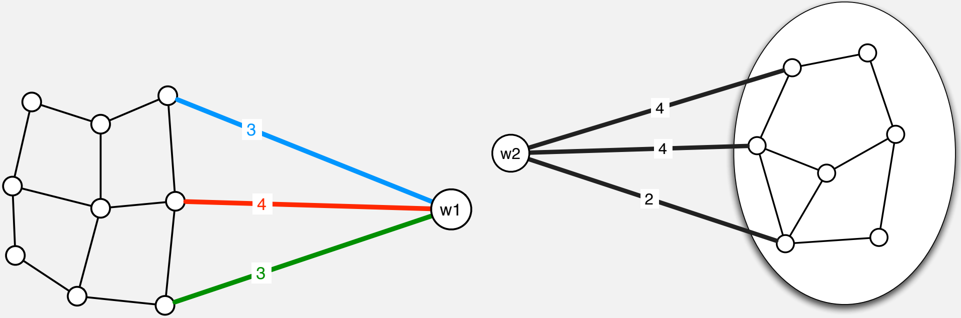
$$\begin{array}{rcll} x_e & \geq & 0 & \text{für alle } e \in E \\ x(\delta(v)) & = & 1 & \text{für alle } v \in V \\ x(\delta(U)) & \geq & 1 & \text{für alle } U \subseteq V, |U| \text{ ungerade} \end{array} \qquad (1)$$

# Beweis Satz 3.31: Kontraktionen



# Beweis Satz 3.31: Kontraktionen $(K \cdot x)$



# Eine Umformulierung des Systems

**Korollar 3.32**

*Für $G = (V, E)$ ist $\mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G)$ genau die Lösungsmenge des folgenden Systems:*

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 && \text{für alle } e \in E \\ x(\delta(v)) &= 1 && \text{für alle } v \in V \\ x(E(U)) &\leq \tfrac{|U|-1}{2} && \text{für alle } U \subseteq V, |U| \text{ ungerade} \end{aligned} \tag{2}$$

## Satz 3.33 (Edmonds Matching-Polytop Theorem)

*Für* $G = (V, E)$ *ist* $\mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G)$ *die Lösungsmenge des folgenden Ungleichungssystems:*

$$\begin{array}{rcll} x_e & \geq & 0 & \text{für alle } e \in E \\ x(\delta(v)) & \leq & 1 & \text{für alle } v \in V \\ x(E(U)) & \leq & \frac{|U|-1}{2} & \text{für alle } U \subseteq V, |U| \text{ ungerade} \end{array} \qquad (3)$$

# Konvexe Körper

**Problem 3.34 (Separationsproblem für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex)**

Instanz: $x^\star \in \mathbb{Q}^n$

Aufgabe: *Entscheide, ob $x^\star \in K$ ist; wenn $x^\star \notin K$, bestimme einen Vektor $a \in \mathbb{Q}^n$ und ein $\beta \in \mathbb{Q}$ mit*

$$\langle a, x \rangle \leq \beta \quad \textit{für alle } x \in K$$

*und*

$$\langle a, x^\star \rangle > \beta$$

*(die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \beta + \varepsilon\}$ trennt für genügend kleines $\varepsilon > 0$ dann $x^\star$ von $K$).*

# Ungleichungssysteme

**Problem 3.35 (Separationsproblem für ein System $\mathcal{S}$ von linearen Ungleichungen und Gleichungen in $\mathbb{R}^n$)**

Instanz: $x^\star \in \mathbb{Q}^n$

Aufgabe: *Entscheide, ob $x^\star$ das System $\mathcal{S}$ erfüllt; wenn nicht, bestimme eine Gleichung oder eine Ungleichung aus $\mathcal{S}$, die von $x^\star$ verletzt wird.*

# Ellipsoid-Methode

- Kann man das Separationsproblem für eine Menge von endlichen Systemen von linearen Ungleichungen und Gleichungen in polynomialer Zeit lösen, so kann man auch die linearen Optimierungsprobleme über den durch diese Systeme definierten Polyedern in polynomialer Zeit lösen.
- "Polynomial": Polynomial in der Dimension und der größten Kodierungslänge einer Zahl im jeweiligen System
- Die Umkehrung gilt auch.
- "Äquivalenz von Separieren und Optimieren" (Grötschel, Lovasz, Schrijver)

# Praxis: Schnittebenen-Verfahren

- Sei $\mathcal{S}$ ein System von linearen Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{R}^n$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ erfüllt alle Bedingungen in } \mathcal{S}\}$.
- Sei $c \in \mathbb{Q}^n$ ein Zielfunktionsvektor.
- Wähle ein (einfaches) Teilsystem $\mathcal{T}$ von $\mathcal{S}$.
- Bestimme eine Optimallösung $x^\star$ von

  $$\max\{\langle c, x\rangle \mid x \text{ erfüllt } \mathcal{T}\}$$

  (mit irgendeinem *LP*-Algorithmus). Es gilt

  $$\langle c, x^\star\rangle \geq \max\{\langle c, x\rangle \mid x \in P\}$$

  (obere Schranke).
- Löse das Separationsproblem für $x^\star$ bzgl. $\mathcal{S}$.
  - Falls $x^\star$ ganz $\mathcal{S}$ erfüllt: $x^\star$ Optimallösung von $\max\{\langle c, x\rangle \mid x \in P\}$
  - Sonst füge (mindestens) eine von $x^\star$ verletzte Gleichung oder Ungleichung (**Schnittebene**) zu $\mathcal{T}$ hinzu und iteriere.

# Separationsproblem für (3.6)

- Sei $x^\star \in \mathbb{Q}^E$ gegeben.
- $x^\star(\delta(v)) = 1$ (für alle $v \in V$) und $x^\star \geq \mathbb{O}$ kann man leicht überprüfen.
- $x^\star(\delta(U)) \geq 1$ gilt genau dann für alle $U \subseteq V$, $|U|$ ungerade, wenn das $x^\star$-Gewicht jeden "ungeraden Schnitts" in $G$ mindestens Eins ist.

**Definition 3.36**

Ein **ungerader Schnitt** in $G = (V, E)$ ist ein Schnitt $\delta(U) \subseteq E$ mit $U \subseteq V$ und $|U|$ ungerade.

- Also: Bestimme ungeraden Schnitt minimalen $x^\star$-Gewichts.

# Gomory-Hu Bäume

## Definition 3.37

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $c \in \mathbb{R}_+^E$ ist ein **Gomory-Hu-Baum** ein Baum mit Knotenmenge $V$, so dass für jede Baumkante $\{s, t\}$ gilt: Sind $S \subseteq V$ und $T \subseteq V$ mit $V = S \uplus T$ die Knotenmengen der beiden Komponenten, in die der Baum durch Wegnehmen von $\{s, t\}$ zerfällt, so ist $\delta(S) = \delta(T)$ ein $c$-minimaler $s$-$t$-Schnitt in $G$.

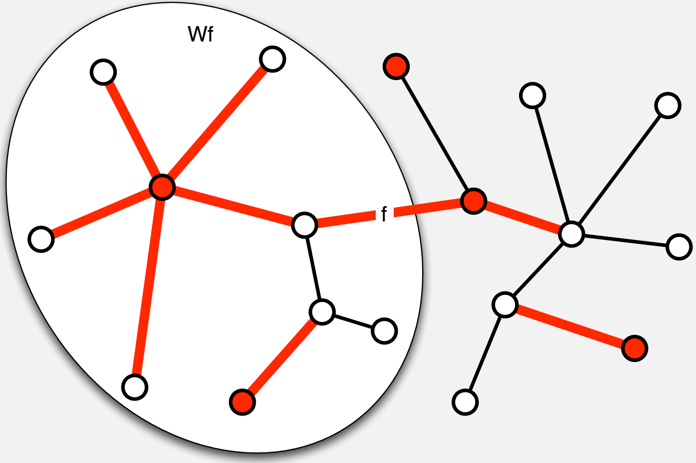
## Satz 3.38

*Ein Gomory-Hu-Baum kann via Berechnung von $|V| - 1$ minimalen s-t-Schnitten (maximalen s-t-Flüssen) berechnet werden.*

## Satz 3.39

*Ist $B = (V, F)$ Gomory-Hu-Baum für $G = (V, E)$ (mit $|V| \in 2\mathbb{Z}$) und $c \in \mathbb{R}_+^E$, so ist einer der von den Kanten von $B$ induzierten Schnitte in $G$ ein ungerader Schnitt minimalen c-Gewichts.*

# Gomory-Hu Baum und ungerade Schnitte



# Dualisieren

$$
\begin{array}{lrcllr}
\max & \langle w, x \rangle & & & & \\
& x(\delta(v)) & \leq & 1 & (v \in V) & [y_v] \\
& x(E(U)) & \leq & \lfloor \frac{|U|}{2} \rfloor & (U \in (2^V)_{\text{odd}}) & [z_u] \\
& x & \geq & \mathbb{O}_E & &
\end{array}
\qquad (4)
$$

(mit $(2^V)_{\text{odd}} = \{U \subseteq V \mid |U| \text{ ungerade}\}$) ergibt

$$
\min \sum_{v \in V} y_v + \sum_{U \in (2^V)_{\text{odd}}} \lfloor \frac{|U|}{2} \rfloor \cdot z_u
$$

$$
\begin{array}{rcll}
y_v + y_w + \sum\limits_{\substack{U \in (2^V)_{\text{odd}} \\ v, w \in U}} z_u & \geq & w_e & (e = \{v, w\} \in E) \\
y & \geq & \mathbb{O}_V & \\
z & \geq & \mathbb{O}_{(2^V)_{\text{odd}}} &
\end{array}
\qquad (5)
$$

# “Total Duale Ganzzahligkeit”

**Satz 3.40**

*Für ganzzahlige $w \in \mathbb{Z}^E$ hat (5) stets eine ganzzahlige Optimallösung $(y^\star, z^\star) \in \mathbb{Z}^v \times \mathbb{Z}^{(2^V)_{odd}}$.*

- Hier ohne Beweis
- Das Ungleichungssystem in (4) ist **TDI** (**totally dual integral**); wichtiges Konzept in der Theorie der ganzzahligen linearen Optimierung (siehe VL nächstes Semester).

# Matchings und Odd-Set Covers

## Definition 3.41

Ein **odd-set cover** eines Graphen $G = (V, E)$ besteht aus Knotenteilmengen $W_0 \subseteq V$ und $W_1, \ldots, W_k \in (2^V)_{\text{odd}}$, so dass für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$e \cap W_0 \neq \varnothing \quad \text{oder} \quad \text{es gibt } i \in [k] \text{ mit } e \subseteq W_i$$

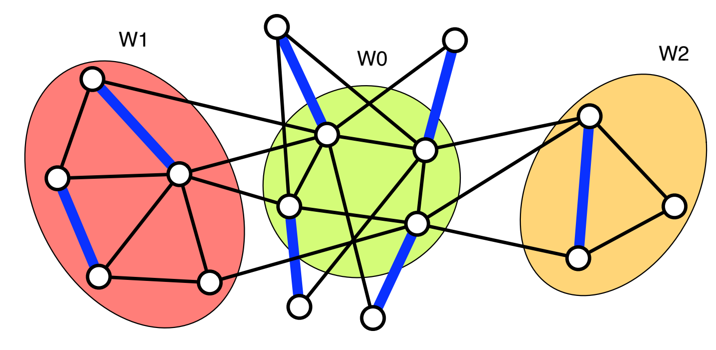
Die **Kapazität** von $W_0, W_1, \ldots, W_k$ ist

$$|W_0| + \sum_{i=1}^{k} \lfloor \tfrac{|W_i|}{2} \rfloor$$

## Satz 3.42

*In jedem Graphen ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kapazität eines odd-set covers.*

# Matchings und Odd-Set Covers



# Tutte-Berge Formel

## Korollar 3.43

*Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist die maximale Kardinalität eines Matchings*

$$\min\{\tfrac{1}{2}(|V| + |U| - \mathrm{odd}(G \setminus U)) \mid U \subseteq V\}\,,$$

*wobei* $\mathrm{odd}(G \setminus U)$ *die Anzahl der Zusammenhangskomponenten ungerader Kardinalität von* $G \setminus U$ *ist.*