Vorlesung

Kombinatorische Optimierung

(Wintersemester 2018/19)

Kapitel 4: Matroide

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 20. Dezember 2018)

Unabhängigkeitssysteme / Matroide

Definition 4.1

Ein **Unabhängigkeitssystem** mit einer endlichen Grundmenge E ist eine Menge $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ von **unabhängigen Mengen** mit:

I_1: $\varnothing \in \mathcal{I}$

I_2: Für alle $X, Y \subseteq E$: $\quad X \subseteq Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}$

Definition 4.2

Ein **Matroid** M ist ein Unabhängigkeitssystem mit Grundmenge $E(M)$ und einer Menge $\mathcal{I}(M) \subseteq 2^{E(M)}$ von unabhängigen Mengen, die folgende Eigenschaft hat:

I_3: Für alle $X, Y \in \mathcal{I}(M)$ mit $|X| < |Y|$ gilt:

Es gibt ein $e \in Y \setminus X$ mit $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}(M)$.

Graphische Matroide

Satz 4.3

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ bilden die Wälder $F \subseteq E$ die unabhängigen Mengen eines Matroids, des **graphischen Matroids** *von G.*

Rang und Basen

Definition 4.4

Die **Rangfunktion** eines Matroids M ist $r_M : 2^{E(M)} \to \mathbb{N}$ mit

$$r_M(X) = \max\{|I| \mid I \subseteq X, I \in \mathcal{I}(M)\}$$

für alle $X \subseteq E(M)$. Der **Rang** des Matroids ist $r_M(E(M))$. Die Menge der **Basen** von M ist

$$\mathcal{B}(M) := \{B \in \mathcal{I} \mid |B| = r_M(E(M))\}.$$

Bemerkungen

Bemerkung 4.5

Seien M ein Matroid und $X \subseteq E(M)$.

1. *Für $I \subseteq E(M)$ mit $I \in \mathcal{I}(M)$ gilt genau dann $r_M(X) = |I|$, wenn I inklusionsmaximal unter den unabhängigen Teilmengen von X ist.*
2. *Jede unabhängige Teilmenge $J \subseteq X$ kann zu einer unabhängigen Menge $I \subseteq E(M)$ mit $J \subseteq I$ und $r_M(X) = |I|$ ergänzt werden.*

Bemerkungen

- Die Basen eines Matroids sind die inklusionsmaximalen unter seinen unabhängigen Mengen.
- Die Basen des graphischen Matroids eines zusammenhängenden Graphen G sind genau die aufspannenden Bäume von G.

Greedy-Algorithmus

Algorithmus 4.6 (Greedy-Algorithmus für Unabhängigkeitssysteme)

Eingabe: *Unabhängigkeitssystem mit Grundmenge* $E, w \in \mathbb{Q}^E$

Ausgabe: $S_0, S_1, \dots S_r \subseteq E$

```
S_0 ← ∅, k ← 1, U ← E
while U ≠ ∅ do
    Wähle s_k ∈ U mit w_{s_k} = max{w_s | s ∈ U}
    U ← U \ {s_k}
    if S_{k−1} ∪ {s_k} unabhängig then
        S_k ← S_{k−1} ∪ {s_k}, k ← k + 1
```

Korrektheit des Greedy-Algorithmus

Satz 4.7

Für Matroide M gilt für die vom Greedy-Algorithmus berechneten Mengen $S_0, S_1, \ldots, S_r$:

$$w(S_k) = \max\{w(S) \mid S \in \mathcal{I}(M), |S| = k\}$$

für alle $k = 0, 1, \ldots, S_r$. Insbesondere ist S_r eine w-maximale Basis von M, falls r der Rang von M ist, und $S_{k^\star}$ mit $w(s_{k^\star}) = \max\{w(S_k) \mid 0 \leq k \leq r\}$ ist eine w-maximale unabhängige Menge in M.

Bemerkung 4.8

Ist $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ ein Unabhängigkeitssystem, für das der Greedy-Algorithmus für jede Gewichtsfunktion $w \in \mathbb{N}^E$ eine w-maximale unabhängige Menge berechnet, so ist $\mathcal{I}$ ein Matroid.

Matroid-Polytope, Basen-Polytope

Definition 4.9

Sei M ein Matroid. Das **Matroid-Polytop** zu M ist

$$P_{\mathcal{I}}(M) := \operatorname{conv}\{\mathcal{X}(I) \mid I \in \mathcal{I}(M)\}.$$

Sein **Basen-Polytop** ist

$$P_{\mathcal{B}}(M) := \operatorname{conv}\{\mathcal{X}(B) \mid B \subseteq \mathcal{I}(M) \text{ Basis von } M\}.$$

Rang-Ungleichungen

Bemerkung 4.10

$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ ist die von der für $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(M)$ gültigen Ungleichung

$$x(E(M)) \leq r_M(E(M))$$

definierte Seite von $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(M)$ (mit der Rang-Funktion r_M des Matroids M).

Satz 4.11

Für jedes Matroid M gilt

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(M) = \{x \in \mathbb{R}^{E(M)} \,|\, x(T) \leq r_M(T) \text{ für alle } T \subseteq E, x \geq \mathbb{O}\}$$

Monotonie, Normiertheit, Submodularität

Definition 4.12

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ ist **monoton**, wenn
$$\varphi(X) \leq \varphi(Y)$$
für alle $X, Y \subseteq E$ mit $X \subseteq Y$ gilt.

Definition 4.13

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ ist **normiert**, wenn
$$\varphi(\emptyset) = 0$$
gilt.

Definition 4.14

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ (für eine endliche Menge E) ist **submodular**, wenn
$$\varphi(X \cup Y) + \varphi(X \cap Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$$
für alle $X, Y \subseteq E$ gilt.

Polymatroide

Satz 4.15

Die Rang-Funktion eines Matroids ist normiert, monoton und submodular.

Definition 4.16

Ein **Polymatroid** ist ein Polyeder

$$P(f) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(T) \leq f(T) \text{ für alle } T \subseteq E, x \geq \mathbb{O}\}$$

mit einer normierten, monotonen, submodularen Funktion $f : 2^E \to \mathbb{R}$ (E endlich).

Korollar 4.17

Matroid-Polytope sind Polymatroide.

Optimieren über Polymatroiden

Satz 4.18

Seien $f : 2^E \to \mathbb{R}$ (E endlich) normiert, monoton und submodular, $w \in \mathbb{R}^E$, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $w_{e_1} \geq w_{e_2} \geq \cdots \geq w_{e_n}$. Sei k maximal mit $w_{e_k} > 0$. Dann ist $x^\star \in \mathbb{R}^E$ mit

$$x^\star_{e_i} = \begin{cases} f(T_i) - f(T_{i-1}) & \textit{falls} \quad i \leq k \\ 0 & \textit{falls} \quad i > k \end{cases}$$

eine Optimallösung von

$$\max\{\langle w, x\rangle \mid x \in P(f)\},$$

wobei $T_i := \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ist.

Korollar 4.19

Ist $f : 2^E \to \mathbb{N}$ eine normierte, monotone, submodulare Funktion mit ganzzahligen Werten, so ist das Polymatroid $P(f)$ ganzzahlig; insbesondere gilt dies, wenn f die Rangfunktion eines Matroids ist.

Monotonie, Normiertheit, Submodularität

Definition 4.12

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ ist **monoton**, wenn

$$\varphi(X) \leq \varphi(Y)$$

für alle $X, Y \subseteq E$ mit $X \subseteq Y$ gilt.

Definition 4.13

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ ist **normiert**, wenn

$$\varphi(\emptyset) = 0$$

gilt.

Monotonie, Normiertheit, Submodularität

Definition 4.12

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ ist **monoton**, wenn
$$\varphi(X) \leq \varphi(Y)$$
für alle $X, Y \subseteq E$ mit $X \subseteq Y$ gilt.

Definition 4.13

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ ist **normiert**, wenn
$$\varphi(\emptyset) = 0$$
gilt.

Definition 4.14

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ (für eine endliche Menge E) ist **submodular**, wenn
$$\varphi(X \cup Y) + \varphi(X \cap Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$$
für alle $X, Y \subseteq E$ gilt.

Polymatroide

Satz 4.15

Die Rang-Funktion eines Matroids ist normiert, monoton und submodular.

Polymatroide

Satz 4.15

Die Rang-Funktion eines Matroids ist normiert, monoton und submodular.

Definition 4.16

Ein **Polymatroid** ist ein Polyeder

$$P(f) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(T) \leq f(T) \text{ für alle } T \subseteq E, x \geq \mathbb{O}\}$$

mit einer normierten, monotonen, submodularen Funktion $f : 2^E \to \mathbb{R}$ (E endlich).

Polymatroide

Satz 4.15

Die Rang-Funktion eines Matroids ist normiert, monoton und submodular.

Definition 4.16

Ein **Polymatroid** ist ein Polyeder

$$P(f) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(T) \leq f(T) \text{ für alle } T \subseteq E, x \geq \mathbb{O}\}$$

mit einer normierten, monotonen, submodularen Funktion $f : 2^E \to \mathbb{R}$ (E endlich).

Korollar 4.17

Matroid-Polytope sind Polymatroide.

Optimieren über Polymatroiden

Satz 4.18

Seien $f : 2^E \to \mathbb{R}$ *(*E *endlich) normiert, monoton und submodular,* $w \in \mathbb{R}^E$, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ *und* $w_{e_1} \geq w_{e_2} \geq \dots \geq w_{e_n}$*. Sei* k *maximal mit* $w_{e_k} > 0$*. Dann ist* $x^\star \in \mathbb{R}^E$ *mit*

$$x^\star_{e_i} = \begin{cases} f(T_i) - f(T_{i-1}) & \textit{falls} \quad i \leq k \\ 0 & \textit{falls} \quad i > k \end{cases}$$

eine Optimallösung von

$$\max\{\langle w, x \rangle \,|\, x \in P(f)\}\,,$$

wobei $T_i := \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ *für alle* $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ *ist.*

Optimieren über Polymatroiden

Satz 4.18

Seien $f : 2^E \to \mathbb{R}$ *(*E *endlich) normiert, monoton und submodular,* $w \in \mathbb{R}^E$, $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *und* $w_{e_1} \geq w_{e_2} \geq \cdots \geq w_{e_n}$. *Sei* k *maximal mit* $w_{e_k} > 0$. *Dann ist* $x^\star \in \mathbb{R}^E$ *mit*

$$x^\star_{e_i} = \begin{cases} f(T_i) - f(T_{i-1}) & \textit{falls} \quad i \leq k \\ 0 & \textit{falls} \quad i > k \end{cases}$$

eine Optimallösung von

$$\max\{\langle w, x\rangle \,|\, x \in P(f)\},$$

wobei $T_i := \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ *für alle* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *ist.*

Korollar 4.19

Ist $f : 2^E \to \mathbb{N}$ *eine normierte, monotone, submodulare Funktion mit ganzzahligen Werten, so ist das Polymatroid* $P(f)$ *ganzzahlig; insbesondere gilt dies, wenn* f *die Rangfunktion eines Matroids ist.*