Vorlesung

Kombinatorische Optimierung

(Wintersemester 2018/19)

Kapitel 7: Relaxierungen und duale Schranken

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 17. Januar 2019)

Das TSP-Polytope

Definition 7.1

Für $n \geq 3$ heißt

$$\mathrm{TSP}(n) = \text{ conv } \{\mathcal{X}(H) \,|\, H \subseteq E_n \text{ Hamilton-Kreis}\}$$

des **(symmetrische) Traveling-Salesman Polytop**
($K_n = (V_n, E_n)$ mit $V_n = [n]$ sei der vollständige Graph auf n Knoten).

"Unmöglichkeit" einer vollständigen Beschreibung

Satz 7.2

Falls es für jedes $n \geq 3$ *eine Matrix* $A^{(n)} \in \mathbb{Q}^{M(n) \times E_n}$ *und einen Vektor* $b^{(n)} \in \mathbb{Q}^{M(n)}$ *mit Einträgen, deren Kodierungslängen polynomial in n beschränkt sind, mit*

$$\mathrm{TSP}(n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{(n)} x \leq b^{(n)}\}$$

gibt, so dass das Entscheidungsproblem

> *Gegeben* $a \in \mathbb{Q}^{E_n}, \beta \in \mathbb{Q}$*; ist* (a, β) *eine Zeile von* $(A^{(n)}, b^{(n)})$*?*

in NP *ist, so ist* NP = coNP.

Bemerkungen

- Wir können also keine vollständige Beschreibung von TSP(n) erwarten.
- Partielle Beschreibungen (und effiziente Separationsalgorithmen) helfen jedoch entscheidend, die dualen Schranken in Branch-and-Cut Algorithmen zu verbessern.
- Besonders interessant: Ungleichungen, die Facetten (d. h. Seiten der Dimension dim(TSP(n)) -1) von TSP(n) definieren.

Grundlegendes zum TSP-Polytop

Satz 7.3

Für $n \geq 3$ gilt:

$$\operatorname{aff}(\mathrm{TSP}(n)) = \{x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid x(\delta(v)) = 2 \text{ für alle } v \in V_n\}$$

Insbesondere:

$$\dim(\mathrm{TSP}(n)) = |E_n| - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Bemerkung 7.4

Für $x \in \operatorname{aff}(\mathrm{TSP}(n))$ und $\emptyset \neq S \subsetneq V_n$ gilt:

$$x(\delta(S)) \geq 2 \Leftrightarrow x(E_n[S]) \leq |S| - 1$$

*(**Subtour-Eliminationsbedingungen**)*

Das Subtour-Polytop

Definition 7.5

Das Polytop SUB(n) aller $x \in \mathbb{R}^{E_n}$ mit

$$\begin{array}{rrcll} & x(\delta(v)) & = & 2 & \text{für alle } v \in V_n \\ (*) & x(E_N[S]) & \leq & |S|-1 & \text{für alle } S \subseteq V_n, 3 \leq |S| \leq n-3 \\ & x & \leq & \mathbb{1}_{E_n} & \\ & x & \geq & \mathbb{O}_{E_n} & \end{array}$$

heißt das **Subtour-Polytop**.

Satz 7.6

Es gilt

$$\mathrm{TSP}(n) \subseteq \mathrm{SUB}(n)$$

Die ganzzahligen Vektoren in SUB(n) *sind genau die charakteristischen Vektoren von Hamilton-Kreisen in K_n, also die Ecken von* TSP(n). *Die Ungleichungen in der Definition von* SUB(n) *definieren (paarweise verschiedene) Facetten von* TSP(n).

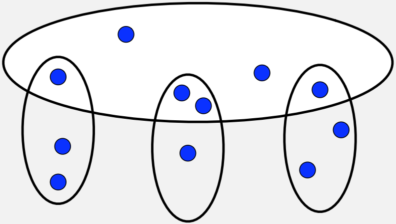
Die Kamm-Ungleichungen

Satz 7.7

Seien $T_1, \ldots, T_S \subseteq V_n$ paarweise disjunkt ($S \geq 3$ ungerade) und $S \subseteq V_n$ so, dass $S \cap T_i \neq \emptyset$ und $T_i \setminus S \neq \emptyset$ für alle $i \in [S]$. Dann gilt für jedes $x \in \mathrm{TSP}(n)$ die **Kamm-Ungleichung**

$$x(\delta(S)) + \sum_{i=1}^{S} x(\delta(T_i)) \geq 3s + 1.$$

Alle diese Ungleichungen definieren Facetten von $\mathrm{TSP}(n)$.

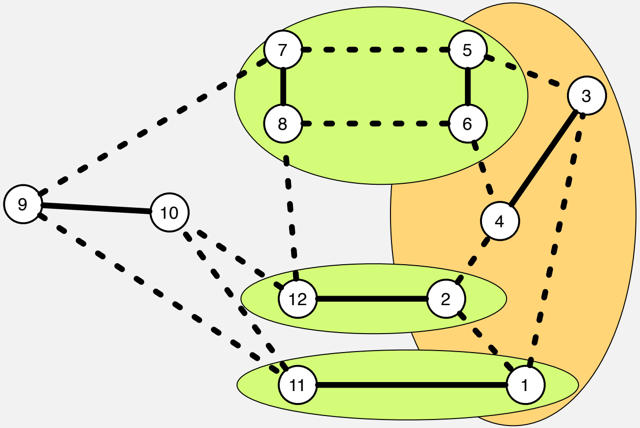


Bemerkungen

- Es ist kein polynomialer Separationsalgorithmus für die Kamm-Ungleichungen bekannt.
- Spezialfall $|T_i| = 2$ für alle $i \in [S]$: **2-Matching Ungleichungen** (polynomialer Separationsalgorithmus bekannt).
- **Cliquen-Baum Ungleichungen**: Verallgemeinerung der Kamm-Ungleichungen; ebenfalls Facetten-definierend
- Zahlreiche weitere Klassen Facetten-definierender Ungleichungen sind bekannt (viele sind nützlich in der Praxis)

Kamm-Ungleichung in Aktion...

Sei $x^\star \in \mathbb{R}^{E_{12}}$ der in folgendem Bild dargestellte Punkt, wobei gestrichelte Kanten den Wert $\frac{1}{2}$ und durchgezogene Kanten den Wert 1 repräsentieren.



... Kamm-Ungleichung in Aktion

- Es ist $x^\star \in \mathrm{SUB}(12)$.
- $x^\star$ erfüllt alle 2-Matching-Ungleichungen.
- Aber er verletzt die Kamm-Ungleichung mit
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $T_1 = \{1, 11\}$
  - $T_2 = \{2, 12\}$
  - $T_3 = \{5, 6, 7, 8\}$,

  denn:

$$
\begin{aligned}
x(\delta(S)) &= 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} &= 3\\
x(\delta(T_1)) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} &= 2\\
x(\delta(T_2)) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} &= 2\\
x(\delta(T_3)) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} &= 2
\end{aligned}
$$

Die Subtour-Schranke für das TSP(n)

- Wegen

$$x(\delta(S)) = x(\delta(V_n \setminus S))$$

und

$$x(E_n[S]) \leq [S] - 1 \Leftrightarrow x(\delta(S)) \geq 2$$

(für $x \in \operatorname{aff}(\mathrm{TSP}(n))$ ist $\min\{\langle c, x\rangle \mid x \in \mathrm{SUB}(n)\}$ gleich

$$\begin{array}{llcll}
\min & \langle c, x\rangle & & & \\
\text{s.t.} & x(\delta(v)) & = & 2 & \forall v \in V_n \\
& x(E_n) & = & n & \\
& x(E_n[S]) & \leq & |S| - 1 & \forall \varnothing \neq S \subseteq \{2, \ldots, n\} \\
& x & \leq & \mathbb{1}_{E_n} & \\
& x & \geq & \mathbb{0}_{E_n} &
\end{array}$$

Das 1-Baum-Polytop

Satz 7.8

$$\{x \in [0,1]^{E_n} \;:\; x(E_n) = n, x(\delta(1)) = 2,$$
$$x(E_n[S]) \le |S| - 1 \textit{ für alle } \emptyset \ne S \subseteq \{2, \dots, n\}\}$$

$$=$$

$$\textit{conv}\,\{\mathcal{X}(T) \,|\, T \subseteq E_n \textit{ 1-Baum}\} =: 1\mathrm{B}(n)$$

Folgerung

$$\min\{\langle c, x\rangle \,|\, x \in SUB\,(n)\}$$
$$=$$
$$\min\{\langle c, x\rangle \,|\, x(\delta(v)) = 2 \;\forall v \in \{2, \dots, n\}\,, x \in 1\mathrm{B}(n)\}$$

Lagrange-Relaxierung (Kap. 4 *Lineare Optimierung*)

- Seien $X^{(0)} \subseteq \mathbb{R}^k$ konvex und abgeschlossen,
  $A \in \mathbb{R}^{m \times k}, b \in \mathbb{R}^m$,
  $C \in \mathbb{R}^{p \times k}, d \in \mathbb{R}^p$
- Die Lagrange-Funktion zu

  $$\min \left\{ \langle c, x \rangle : Ax \leq b, Cx = d, x \in X^{(o)} \right\}$$

  ist dann $L_D : \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^P \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

  $$L_D(\lambda, \mu) = \min\{ \langle c, x \rangle + \lambda^T(Ax - b) + \mu^T(C_x - d) \,|\, x \in X^{(0)} \}$$

- Es gilt die starke Lagrange-Dualität:

  $$\min\{ \langle c, x \rangle \,|\, Ax \leq b, Cx = d, x \in X^{(0)} \}$$

  $$=$$

  $$\max\{ L_D(\lambda, \mu) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \mu \in \mathbb{R}^P \}$$

Subgradienten-Verfahren

- L_D ist eine konkave Funktion.
- Maximierung von L_D (bzw. Minimierung der konvexen Funktion $-L_D$) z. B. mittels **Subgradienten-Verfahrens**
- Starte mit beliebigen $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^m_+, \mu \in \mathbb{R}^P$.
- In der i-ten Iteration:
  - Finde Optimallösung $x^{(i)} \in X^{(0)}$ mit

    $$L_D(\lambda^{(i-1)}, \mu^{(i-1)}) =$$
    $$\min\{\langle c, x\rangle + (\lambda^{(i-1)})^T(Ax - b) + (\mu^{(i-1)})^T(Cx - d) \,|\, x \in X^{(0)}\}$$

    (Lösung des **Lagrange-Subproblems**)
  - Der Vektor

    $$(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = -(Ax^{(i-1)} - b, Cx^{(i-1)} - d) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$$

    ist ein **Subgradient** der konvexen Funktion $f(\lambda, \mu) = -L_D(\lambda, \mu)$ im Punkt $(\lambda^{(i-1)}, \mu^{(i-1)})$, d. h.

    $$f(\lambda, \mu) - f(\lambda^{(i-1)}, \mu^{(i-1)}) \geq \langle(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), (\lambda - \lambda^{(i-1)}, \mu - \mu^{(i-1)})\rangle$$

    für alle $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$.

Subgradienten-Verfahren

- . . . in der i-ten Iteration:
  - Bestimmung von $(\lambda^{(i)}, \mu^{(i)})$: Wähle einen Multiplikator $\alpha_i > 0$ und setze $\lambda^{(i)}$ auf das komponentenweise Maximum von $\mathbb{O}_m$ und
    $$\lambda^{(i-1)} - \alpha_i \tilde{\alpha} = \alpha^{(i-1)} + \alpha_i (Ax^{(i-1)} - b)$$
    sowie $\mu^{(i)}$ auf
    $$\mu^{(i-1)} + \alpha_i (Cx^{(i-1)} - d).$$

- Für geeignete Wahl der α_i (z.B. so, dass $\alpha_i \to 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \infty$) konvergiert $(\lambda^{(i)}, \mu^{(i)})$ gegen eine Optimallösung von
  $$\max\{L_D(\lambda, \mu) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \mu \in \mathbb{R}^p\}\,.$$

Bemerkungen zu Subgradienten

Ein Subgradient...

- ... $v \in \mathbb{R}^n$ einer konvexen Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x^\star \in \mathbb{R}^n$ ist der Gradient einer affinen Funktion, die g überall unterschätzt und in $x^\star$ mit g übereinstimmt
(d.h. $g(x) \geq g(x^\star) + \langle v, x - x^\star \rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$).
- Konvexe Funktionen haben stets Subgradienten (i. A. nicht eindeutig).
- Ist g in $x^\star$ sogar differenzierbar, so ist der Gradient von g im Punkt $x^\star$ der einzige Subgradient von g in $x^\star$.

Held-Karp-Schranken für das TSP

- Wähle $X^{(0)} = 1\mathrm{B}(n)$ und löse

  $$\min\{\langle c, x\rangle \mid x(\delta(v)) = 2 \ \text{ für alle } v \in \{2, \ldots, n\}\,,\, x \in X^{(0)}\}$$

  mit Lagrange-Relaxierung.
- Lösen der Lagrange-Subprobleme: Sehr effiziente Bestimmung kostenminimaler 1-Bäume (mit von $\mu^{(i-1)}$ abhängigen Gewichten).
- In der Praxis erhält man oft sehr gute Schranken schon nach relativ wenigen Iterationen; bei sehr großen Instanzen ($n > 100000$) wesentlich schneller als LP-Algorithmen.