

Kombinatorische Optimierung – Blatt 2

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/

Präsentation in der Übung am 26.10.2018

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$ mittels Adjazenzlisten. Beweisen Sie den zweiten Teil von **Satz 1.35** aus der Vorlesung, indem Sie einen Algorithmus mit geeigneter Datenstruktur konstruieren, der für D in $\mathcal{O}(|V| + |A|)$ Zeit eine topologische Sortierung von D berechnet oder feststellt, dass D einen Kreis hat.

Können Sie sogar einen Kreis von D berechnen, falls einer existiert?

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit nichtnegativen Knotengewichten $c \in \mathbb{Q}_+^V$, so dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ die Ungleichung

$$c_u + c_v \leq 1 \tag{1}$$

erfüllt ist. Finde einen Algorithmus, der durch $|V|$ Aufrufe von Dijkstra's Algorithmus in einem geeigneten Hilfsgraphen entscheidet, ob es einen Kreis C ungerader kombinatorischer Länge mit $\sum_{v \in V(C)} c_v > \frac{1}{2}(|V(C)| - 1)$ gibt.

Hinweis: Der Hilfsgraph ist ungefähr doppelt so groß wie G und nutzt für die Kantengewichte exzessiv Eigenschaft (1) aus.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ und eine Länge $w_a(\tau) \in \mathbb{N}$ für jeden Bogen $a \in A$ und jeden Zeitpunkt $\tau \in \{0, 1, \dots, T\}$ bis zu einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$. Die *Dauer* $\ell(W)$ eines Weges W , der aus einem Weg W' sowie dem letzten Bogen a besteht, ist definiert als

$$\ell(W) = \ell(W') + w_a(\ell(W')) ,$$

wobei die Dauer eines Weges mit kombinatorischer Länge 0 als 0 definiert wird. Für welches τ eine Länge $w_a(\tau)$ summiert wird, ist also durch den Ankunftszeitpunkt τ am Startknoten des Bogens a bestimmt. Am Anfang befindet man sich im Knoten s zum Zeitpunkt $\tau = 0$.

Konstruiere eine Instanz des Problems, die zeigt, dass der Dijkstra-Algorithmus für dieses Kürzeste-Wege Problem nicht funktioniert.

Zeige, dass man eine Variante des Problems mittels Dijkstra trotzdem lösen kann, indem man kürzeste Wege auf einem Hilfsgraphen mit $\mathcal{O}(|V| \cdot (T + 1))$ Knoten berechnet. In der Variante sei das (beliebig lange) Warten an einem Knoten erlaubt.