Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Jonas Frede
Wintersemester 2018/2019

Kombinatorische Optimierung – Blatt 3

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/

Präsentation in der Übung am 02.11.2018

Aufgabe 1

Wir wollen den unten beschriebenen Moore-Bellman-Ford-Algorithmus für Digraphen mit unserer bisherigen Beschreibung des Bellman-Ford-Algorithmus vergleichen.

Algorithm: Moore-Bellman-Ford

Eingabe: $D = (V, A)$, $s \in V$ und konservative Bogenlängen $c \in \mathbb{Q}^A$
Ausgabe: Kürzeste Wege von s zu allen $v \in V$ (mittels einer Vorgängerabbildung p), sowie deren Länge d_v.

Initialisiere $d \in \mathbb{Q}^V$ mit $d_v := \begin{cases} 0 & v = s \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$.
Definiere $n := |V|$.
for $k := 1, \dots n - 1$ **do**
  for $\forall (v, w) \in A$ **do**
    if $d_w > d_v + c_{v,w}$ **then**
      $d_w \longleftarrow d_v + c_{v,w}$
      $p(w) \longleftarrow v$
    end
  end
end

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit konservativen Bogenlängen $c \in \mathbb{Q}^A$, sowie $s \in V$ beliebig. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass je zwei verschiedene Wege in D verschiedene c-Länge haben. Beschreibe das Vorgehen des Moore-Bellman-Ford-Algorithmus im Digraphen $BF(D)$ und beweise unter Verwendung von Korollar 1.20, dass der Moore-Bellman-Ford-Algorithmus korrekt ist.

Aufgabe 2

1. Betrachte $\overline{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ als Halbring mit der Minimierungsfunktion als Addition und der normalen Addition als Multiplikation. Sei $M \in \overline{\mathbb{Q}}^{n \times n}$ eine Matrix über diesem Halbkörper. Beschreibe die Einträge von M^2.

2. Angenommen, wir wollen Kürzeste-Wege-Distanzen zwischen allen Knotenpaaren mit Hilfe des Bellman-Ford-Algorithmus lösen. Stelle den dafür notwendigen Algorithmus auf. Betrachte dabei den Bellman-Ford-Algorithmus als Versuch, Kürzeste-Wege-Distanzen über höchstens t Kanten zu ermitteln, wobei schließlich über t iteriert wird.

3. Stelle nun Deinen Algorithmus in Form von Matrixoperationen über $\overline{\mathbb{Q}}$ dar. Leite aus dieser Darstellung eine Beschleunigung her, die $\mathcal{O}(n^3 \log n)$ Zeit benötigt.

Aufgabe 3

1. Sei $D = (V, A)$ ein beliebiger Digraph und seien $c \in \mathbb{Q}^A$ konservative Bogenlängen. Überlege, wie man ein c-Potenzial nutzen kann, um nicht-negative Bogenlängen c' zu bestimmen, so dass ein s-t-Weg genau dann c'-minimal ist, wenn er c-minimal ist.

2. Zeige damit, wie man kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren in einem Digraphen mit konservativen Bogenlängen in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(mn + n^2 \log(n))$ berechnen kann, wobei m die Anzahl der Bögen und n die Anzahl der Knoten ist.

Aufgabe 4

Gegeben sei ein 0/1-Rucksack-Problem mit Gewichten $a \in \mathbb{N}^n$, Gewichtsschranke β, und Profiten $c \in \mathbb{N}^n$. Konstruiere einen azyklischen Graphen, mit dem man das Problem als Kürzeste-Wege-Problem lösen kann. Die Laufzeit soll dabei polynomiell in n und $\sum_{i=1}^n c_i$ sein.
Hinweis: Der Algorithmus darf die Lösung des aufgestellten Kürzeste-Wege-Problems noch untersuchen, bevor er seinerseits die Optimallösung des Rucksack-Problems ausgibt.