Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Jonas Frede
Wintersemester 2018/2019

Kombinatorische Optimierung – Blatt 4

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/

Präsentation in der Übung am 09.11.2018

Aufgabe 1

Wir betrachten eine allgemeinere Variante des *Job-Assignment-Problems*: Gegeben seien n Jobs und m Arbeiter sowie eine Bearbeitungszeit $t_i \in \mathbb{Q}_+$, die Job i benötigt und eine Teilmenge $W(i) \subseteq [m]$ von Arbeitern, die Job i können (für alle $i \in [n]$). Außerdem sei eine Arbeitszeit $T_w \in \mathbb{Q}_+$ für alle $w \in [m]$, die jeder Arbeiter zur Verfügung hat, festgelegt. Aufgabe ist nun, die Bearbeitungszeit jedes Jobs so auf die Arbeiter aufzuteilen, dass die Summe der zugewiesenen Bearbeitungszeiten, die jeder Arbeiter bekommt, die vereinbarte Arbeitszeit des Arbeiters nicht überschreitet.
Beweise mit Hilfe des Max-Flow-Min-Cut-Theorems aus der Vorlesung, dass diese Aufgabe entweder lösbar ist, oder dass es eine Menge an Jobs $J \subseteq [n]$ gibt, deren Menge an Arbeitern $W = \bigcup_{j \in J} W(j)$, die mindestens einen dieser Jobs erledigen können, nicht genug gemeinsame Arbeitszeit haben, um alle Jobs in J zu erledigen.

Aufgabe 2

Beweise das Fluss-Dekompositionstheorem: Ist $f \in \mathbb{R}_+^A$ ein s-t-Fluss in einem Netzwerk $(D = (V, A), u)$, so gibt es eine Menge $\mathcal{P}$ von s-t-Wegen und eine Menge $\mathcal{C}$ von Kreisen in D, sowie $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ mit:

(i) $f_a = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \\ a \in Q}} w(Q)$ für alle $a \in A$.

(ii) $\mathrm{val}(f) = \sum_{Q \in \mathcal{P}} w(Q)$

(iii) $|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \leq |A|$

Falls $f \in \mathbb{Z}_+^A$ ist, kann man sogar $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_+$ wählen.

Aufgabe 3

Beweise den Satz von Menger in der Kantenform für gerichtete Graphen: Seien $D = (V, A)$ ein Digraph und $s, t \in V$, $s \neq t$ zwei Knoten darin. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau dann k bogendisjunkte s-t-Wege in D, wenn es für jede Teilmenge $R \subseteq A$ von Bögen mit $|R| \leq k-1$ einen s-t-Weg im Digraphen $D' = (V, A \setminus R)$ gibt.

Hinweis: Wähle geeignete Kapazitäten für die Bögen und nutze dann das Max-Flow-Min-Cut-Theorem aus der Vorlesung sowie das Fluss-Dekompositionstheorem aus der vorherigen Aufgabe.