Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Jonas Frede
Wintersemester 2018/2019

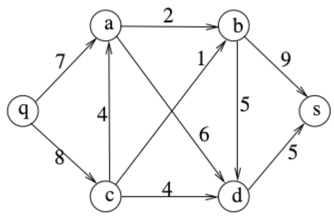
Kombinatorische Optimierung – Blatt 5

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/

Präsentation in der Übung am 16.11.2018

Aufgabe 1

Für den Digraphen mit angegebenen Kapazitäten finde man mit Hilfe des Ford-Fulkerson



Algorithmus einen maximalen q-s-Fluss.

(a) Geben Sie hierfür Ihre gefundenen augmentierenden Pfade zusammen mit den Verbesserungen ϵ an, die durch den jeweiligen augmentierenden Pfad erreicht werden.

(b) Geben Sie Ihren maximalen Fluss an.

(c) Geben Sie den Hilfsgraphen für den maximalen Fluss an und weisen Sie nach, dass in diesem Hilfsgraphen kein gerichteter q-s-Weg existiert, indem Sie die von q erreichbaren Knoten markieren.

(d) Geben Sie einen Schnitt S des ursprünglichen Graphen an, dessen Kapazität gleich dem Wert des maximalen Flusses ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein s-t-Max-Flow Problem mit Netzwerk $((V,A),u)$ mit ganzzahligen Kapazitäten $u \in \mathbb{Z}_+^A$. Weiterhin sei ein zugehöriger ganzzahliger maximaler Fluss f gegeben. Nun wird die Kapazität eines einzelnen Bogens $(v,w) \in A$

(a) um eine Einheit erhöht.

(b) um eine Einheit abgesenkt.

Wie bestimmt man jeweils in $\mathcal{O}(|V|+|A|)$ Zeit einen neuen maximalen Fluss?

Aufgabe 3

Das *Partitions-Problem* ist das (NP-vollständige) Problem, bei dem eine Menge von natürlichen Zahlen $c_1,\dots,c_n$ gegeben ist und entschieden werden soll, ob es eine Teilmenge $S \subseteq [n]$ gibt, so dass $\sum\limits_{i\in S} c_i = \sum\limits_{i\notin S} c_i$ gilt.

Führe das Partitions-Problem auf das Problem zurück, für ein gegebenenes Netzwerk und einen Parameter k festzustellen, ob es einen maximalen Fluss gibt, der sich in höchstens k Wege zerlegen lässt. Konstruiere dafür ein Netzwerk mit $n+2+2$ Knoten, in dem unter anderen die c_i als Bogenkapazitäten auftreten und ein maximaler s-t-Fluss immer Flusswert $C = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$ hat.

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *perfektes Matching* ist ein Matching $M \subseteq E$ (d.h. für alle $\{u, v\}, \{x, y\} \in M$ gilt $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$) für das $2|M| = |V|$ (d.h. $\bigcup_{e \in M} e = V$) gilt.
Mit $N(W) = \{v \in V : \exists w \in W \text{ mit } \{v, w\} \in E\}$ sei die Nachbarschaft einer Knotenmenge $W \subseteq V$ bezeichnet.
Beweise den folgenden Satz aus der Graphentheorie mit Hilfe des Max-Flow-Min-Cut Theorems.

Satz von Hall. *Ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn $|N(W)| \geq |W|$ für alle $W \subseteq V$ gilt.*