

## Kombinatorische Optimierung – Blatt 7

[www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/](http://www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/)

Präsentation in der Übung am 30.11.2018

### Aufgabe 1

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Ein *Matching* ist eine Menge  $M \subseteq E$  von Kanten, die paarweise nicht inzident sind, d.h. für verschiedene Kanten  $\{u, v\}, \{x, y\} \in M$  gilt  $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$ . Eine *Knotenüberdeckung* ist eine Teilmenge  $S$  der Knoten, so dass jede der Kanten des Graphen zu mindestens einem Knoten in  $S$  inzident ist.

Beweise den folgenden Satz aus der Graphentheorie mit Hilfe des Max-Flow-Min-Cut Theorems.

**Satz von König.** *In jedem bipartiten Graphen ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung.*

### Aufgabe 2

Zeige, dass ein  $k$ -regulärer (d.h. jeder Knoten hat konstanten Grad  $k$ ) bipartiter Graph in  $k$  disjunkte perfekte Matchings zerlegt werden kann.

Zeige damit, dass ein bipartiter Graph  $G$  mit Maximalgrad  $\Delta(G) = k$  in  $k$  disjunkte Matchings zerlegt werden kann. Überlege Dir dafür, wie man  $G$  geeignet zu einem  $k$ -regulären Graphen erweitern kann.

*Hinweis:* Nutze Induktion und den Satz von König.

### Aufgabe 3

Wir betrachten für gerades  $n \in \mathbb{N}$  den vollständigen Graphen  $K_n$  mit  $n$  Knoten und Kantenmenge  $E_n$  sowie Kantenkosten  $c \in \mathbb{R}^{E_n}$ .

- Wieviele perfekte Matchings hat der vollständige Graph  $K_n$ ?
- Wir ziehen ein perfektes Matching  $M$  zufällig gleichverteilt aus allen perfekten Matchings von  $K_n$ . Gegeben eine Kante  $e \in E_n$ , was ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $M$  die Kante  $e$  enthält?
- Was sind die erwarteten Kosten eines so zufällig gezogenen perfekten Matchings?

*Hinweis:* Nutze die Linearität des Erwartungswertes!

- Zeige: Es gibt ein perfektes Matching mit Kosten von höchstens

$$\frac{1}{n-1} \sum_{e \in E_n} c_e .$$