Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Jonas Frede
Wintersemester 2018/2019

Kombinatorische Optimierung – Blatt 8

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/

Präsentation in der Übung am 07.12.2018

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Gewichten $w \in \mathbb{Q}^E$. Zeige, wie man das Finden eines gewichtsmaximalen Matchings in G durch das Finden eines gewichtsminimalen perfekten Matchings in einem Hilfsgraphen $G' = (V', E)$ lösen kann.

Hinweis: Der Hilfsgraph G' ist ungefähr doppelt so groß wie G. Wenn G bipartit ist, sollte G' auch bipartit sein.

Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M \subseteq E$ ein Matching in G. Seien außerdem $s, t \in V$ zwei verschiedene Knoten. Zur Erinnerung: Ein s-t-Weg $W = (e_1, e_2, \dots, e_k)$, beschrieben als Folge von Kanten mit $k \geq 1$, heißt M-*alternierend*, falls seine Kanten abwechselnd zu M und nicht zu M gehören, also $|\{e_i, e_{i+1}\} \cap M| = 1$ für alle $i \in [k-1]$ gilt. Er heißt M-*augmentierend*, wenn er M-alternierend ist und s und t zu keiner Kante aus M gehören.

Zeige Satz 3.16 der Vorlesung: Ein Matching M ist genau dann ein Matching maximaler Kardinalität in G, wenn es keinen M-augmentierenden Weg W gibt.

Hinweis: Betrachte die symmetrische Differenz zwischen einem kardinalitätsmaximalen und einem kleinerem Matching.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus, der für beliebige Graphen und beliebige Kantengewichte ein gewichtsminimales perfektes Matching finden kann (oder feststellt, dass keines existiert). Seien $G = (V, E)$ ein Graph, $c \in \mathbb{Q}^E$ Kantengewichte und $T \subseteq V$ mit $|T|$ gerade eine Teilmenge der Knoten.
Eine Kantenteilmenge $J \subseteq E$ heißt T-*Join*, falls T genau die Menge der Knoten des Untergraphen (V, J) mit ungeradem Grad ist.
Beweise folgende Aussagen:

(a) Jedes $\{s, t\}$-Join J (für zwei Knoten $s, t \in V$) lässt sich (kantendisjunkt) in genau einen s-t-Weg und Kreise zerlegen.

(b) Das Problem, für beliebige Kosten $c \in \mathbb{Q}^E$ ein c-minimales T-Join zu finden, kann man mit Hilfe von $\mathcal{A}$ lösen. Betrachte dazu den Graphen $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_2)$ mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{V} &:= \{(v,e) : v \in e \in E\} \cup \{(v, ☺) : v \in V,\ \underline{\text{entweder}}\ v \in T \text{ oder } \deg(v) \text{ ungerade }\} \\
\widetilde{E}_1 &:= \{\{(v,e),(w,e)\} : \{v,w\} = e \in E\} \\
\widetilde{E}_2 &:= \Big\{\{(v,e),(v,f)\} : (v,e),(v,f) \in \widetilde{V}, e, f \in E \cup \{☺\}\Big\}
\end{aligned}$$

und zeige, dass für jedes perfekte Matching $\widetilde{M}$ in $\widetilde{G}$ die Kanten in $\widetilde{M} \cap \widetilde{E}_1$ ein T-Join in G induzieren. Zeige weiterhin, dass es für jedes T-Join ein entsprechendes perfektes Matching in $\widetilde{G}$ gibt.

(c) Das Problem, für konservative Kantengewichte $c \in \mathbb{Q}^E$ einen c-kürzesten s-t-Weg zu finden, kann man mit Hilfe von $\mathcal{A}$ lösen. Nutze dafür (a) und (b).