

Kombinatorische Optimierung – Blatt 9

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/

Präsentation in der Übung am 14.12.2018

Aufgabe 1

Wir betrachten das *Chinese-Postman-Problem*: Sei $G = (V, E)$ ein (zusammenhängendes) Straßennetzwerk mit nichtnegativen Straßenlängen $c \in \mathbb{Q}_+^E$. Ein Postbote startet an einer beliebigen Kreuzung $v \in V$ und muss die Post an alle Häuser aller Straßen $e \in E$ ausliefern. Natürlich darf er die Straßen auf seinem Arbeitsweg mehrmals durchqueren (muss es aber nicht, da er alle Briefe bereits beim ersten Durchqueren der Straße verteilt). Nachdem er alle Straßen mindestens ein Mal abgelaufen ist, kehrt er wieder zur Startkreuzung zurück. Der Länge eines Arbeitsweges des Postboten ist die Summe der Längen der Straßen, die er auf diesem Arbeitsweg abläuft (wobei mehrmaliges Durchlaufen von Straßen natürlich mehrmals zählt).

Der Postbote möchte nun einen Arbeitsweg minimaler Länge bekommen. Beschreibe, wie man dieses Problem mit Hilfe von T -Joins lösen kann.

Hinweis: Gib zuerst ein geeignetes T an.

Aufgabe 2

Eine Verallgemeinerung des Chinese-Postman-Problems ist das *Rural-Postman-Problem*: Sei $G = (V, E)$ erneut ein (zusammenhängendes) Straßennetzwerk mit nichtnegativen Längen $c \in \mathbb{Q}_+^E$. In einer ländlichen Gegend startet der Postbote an einer beliebigen Kreuzung, aber er muss die Post nur an die Teilmenge der Straßen $\widehat{E} \subseteq E$, die bewohnt sind, liefern. Die übrigen Straßen bilden reine Verbindungsstrecken zwischen den bewohnten Straßen, die der Postbote benutzen kann, aber nicht muss. Am Ende möchte er aber wieder an der Startkreuzung ankommen.

Zeige: Für beliebiges $\widehat{E} \subseteq E$ und beliebige nichtnegative Längen $c \in \mathbb{Q}_+^E$ ist es NP-schwer, eine c -minimale *Rural-Postman-Tour* zu finden, die alle Kanten $e \in \widehat{E}$ mindestens ein Mal besucht. Beweise dafür, dass sich das Hamiltonkreis-Problem, einen Kreis in einem Graphen zu finden, der jeden Knoten genau ein Mal besucht, in einen Spezialfall des Rural-Postman-Problems übersetzen lässt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit konservativen Kantengewichten $c \in \mathbb{Q}^E$ und $s, t \in V$. Gesucht ist ein c -kürzester s - t -Weg mit ungerader Kantenzahl. Führe das Problem auf ein perfektes Matching Problem zurück.

Hinweis: Konstruiere einen Graphen H mit $2|V| - 2$ Knoten und ca. $2|E| + |V|$ Kanten.

Aufgabe 4

Sei $K_n = (V_n, E_n)$ ein vollständiger Graph mit n Knoten für n gerade. Sei ferner $P_{\text{match}}^{\text{perf}}(K_n)$ das zugehörige perfekte Matching-Polytop. Zeige, dass jede der Odd-Cut-Ungleichungen

$$x(\delta(U)) \geq 1 \quad \text{für alle } U \subseteq V \text{ mit } 3 \leq |U| \leq |V| - 3 \text{ und } |U| \text{ ungerade}$$

eine Facette des Polytops beschreibt. Konstruiere dazu für eine beliebige solche Ungleichung mit zugehöriger Menge U einen Punkt $\hat{x} \in \mathbb{R}_+^E$, der alle Gradgleichungen und alle Odd-Cut-Ungleichungen außer der betrachteten Ungleichung für U und der analogen Ungleichung für $V \setminus U$ erfüllt.

Hinweis: Wähle \hat{x} so, dass \hat{x}_e für alle $e \in E(U)$ sowie alle $e \in E(V \setminus U)$ jeweils konstant ist, sowie für alle $e \in \delta(U)$ der Wert $\hat{x}_e = 0$ gilt.