Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Jonas Frede
Wintersemester 2018/2019

Kombinatorische Optimierung – Blatt 10

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/

Präsentation in der Übung am 21.12.2018

Sonderaufgabe: Frohe Weihnachtszeit! Bringe etwas weihnachtliches (wie Plätzchen oder Schokolade) zur Übung mit.

Aufgabe 1

Ein Assistent hat für eine Übungsstunde mit n Studierenden eine Liste mit n Aufgaben vorbereitet. Jeder Studierende soll genau eine Aufgabe vorrechnen. Dafür hat jeder Studierende sich eine Präferenzliste, welche Aufgabe er am liebsten rechnen möchte, am zweitliebsten usw. Andererseits hat der Übungsleiter für jede Aufgabe eine Liste angelegt, die voraussagt, wieviel Zeit ein Studierender für diese Aufgabe voraussichtlich benötigen wird. Die Zeitangaben auf einer solchen Liste sind paarweise verschieden. Eine Zuordnung der Aufgaben zu den Studierenden heißt nun *ideal*, wenn kein Student eine Aufgabe, die er lieber gerechnet hätte und auch noch schneller als derjenige, der sie schließlich rechnet, nicht bekommt.
Betrachte nun folgenden Algorithmus zur Bestimmung einer Zuordnung der Aufgaben: Es gebe zum einen eine Liste von Studierenden L, die noch keine Aufgabe bekommen haben. Diese enthält am Anfang alle Studierenden. Damit wird nun folgender Schritt iteriert:
Ein beliebiger Studierender in L wird gewählt und von L gestrichen. Er wählt von seiner Liste die Aufgabe, die er am liebsten möchte. Ist die Aufgabe noch frei, bekommt er sie zugewiesen, ist sie jedoch schon an jemand anderen vergeben, so wird die Aufgabe an denjenigen der beiden vergeben, der sie schneller rechnen kann. In diesem Fall wird der Studierende, der leer ausgegangen ist, wieder auf L gesetzt, und er streicht die Aufgabe, die ihm entgangen ist, von seiner Präferenzliste.

(a) Übersetze die Aufgabe in ein perfektes Matching Problem mit besonderen Nebenbedingungen.

(b) Zeige, dass das vorgeschlagene Verfahren mit einer idealen Zuordnung terminiert.

(c) Schätze die Laufzeit des Verfahrens ab.

Aufgabe 2

Beweise Satz 3.33: Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist das Matching-Polytop $P_{\text{match}}(G)$ die Lösungsmenge der Nichtnegativitätsbedingungen $x_e \geq 0$ für alle Kanten $e \in E$, der Gradungleichungen $x(\delta(v)) \leq 1$ für alle Knoten $v \in V$ und der Blütenungleichungen $x(E(U)) \leq \frac{|U|-1}{2}$ für alle Teilmengen $U \subseteq V$ mit $|U|$ ungerade.
Nutze dafür die Konstruktion aus Aufgabe 1 von Blatt 8 und die Ungleichungsbeschreibung aus Korollar 3.32 für den Hilfsgraphen.