Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Jonas Frede
Wintersemester 2018/2019

# Kombinatorische Optimierung – Blatt 11

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise18/kombopt/

Präsentation in der Übung am 11.01.2019

**Aufgabe 1**

Sei $E$ eine Grundmenge und $\mathcal{I}$ eine Menge von Teilmengen von $E$. Zeige, dass ein solches Mengensystem $\mathcal{I}$ genau dann die Axiome (1), (2) und (3) erfüllt, wenn es die Axiome (1), (2) und (3') erfüllt:

(1) $\varnothing \in \mathcal{I}$

(2) Ist $X \in \mathcal{I}$ und gilt $Y \subseteq X$, so gilt auch $Y \in \mathcal{I}$.

(3) Sind $X, Y \in \mathcal{I}$ und gilt $|Y| > |X|$, so existiert $y \in Y \setminus X$ mit $X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$.

(3') Für jede Menge $T$ existiert eine natürliche Zahl $r(T)$ mit der folgenden Eigenschaft: Alle inklusions-maximalen Teilmengen $X \subseteq T$ mit $X \in \mathcal{I}$ haben Kardinalität $r(T)$.

**Aufgabe 2**

Wir betrachten die im Folgenden auf verschiedene Arten definierte Menge $\mathcal{I}$.

(a) Gegeben eine $m \times n$ Matrix $A$ über einem Körper $\mathbb{F}$. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller Mengen $I \subseteq [n]$, so dass die Spalten in $I$ linear unabhängig über $\mathbb{F}$ sind.

(b) Gegeben ein $a \in \mathbb{R}^n_+$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. $\mathcal{I}$ ist die Menge aller Mengen $I \subseteq [n]$ mit $\sum\limits_{i \in I} a_i \leq \alpha$.

(c) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller stabilen Mengen $S$ in $G$, d.h. Mengen $S \subseteq V$ mit $E(S) = \varnothing$.

(d) Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G$. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller Kantenmengen $F$, für die $G \setminus F$ zusammenhängend ist.

(e) Gegeben seien $r \in \mathbb{N}$ und eine Menge $E$. $\mathcal{I}$ sei die Menge aller höchstens $r$-elementigen Teilmengen von $E$.

Für jede der obigen Mengen $\mathcal{I}$, beweise oder widerlege die Axiome (1) und (2) sowie nach Wahl (3) oder (3') aus der vorherigen Aufgabe.

**Aufgabe 3**

Beweise Bemerkung 4.8: Ist $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ ein Unabhängigkeitssystem, für das der Greedy-Algorithmus für jede Gewichtsfunktion $w \in \mathbb{N}^E$ eine $w$-maximale unabhängige Menge berechnet, so ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid.