Exponentialfunktionen als Mathematisierungsmuster

Herbert Henning; Ulf Hoffmann; Christiane Luther
Vera Reinhardt; Sabine Schulze; Eric Wesenberg

Institut für Algebra und Geometrie
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Postfach 4120
39016 Magdeburg
Germany

Technical Report No. 4
2007

Exponentialfunktionen als Mathematisierungsmuster

Inhalt **Seite**

Herbert Henning; Ulf Hoffmann

Modellbildung und Exponentialfunktion…………………………………03 - 24

Tilman Kant

Eine strahlende Zukunft ?...25 - 34

Christiane Luther

Leise verklingt ein Ton !... 35 - 44

Ulf Hoffmann; Sabine Schulze

Druckluft als Lebensversicherung……………………………………. . 45 - 61

Vera Reinhardt

Die PKW-Karawane rollt oder Stau ohne Ende? .... 62 - 70

Eric Wesenberg

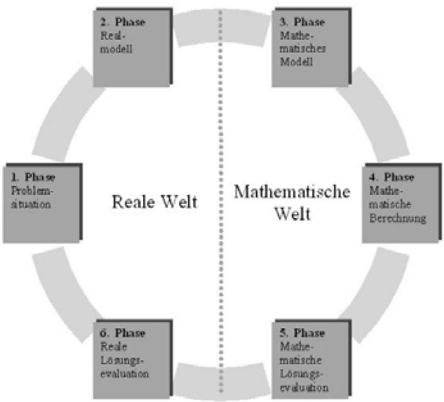
Mit 100 Euro Millionär werden ? .... 71 - 81

Modellbildung und Exponentialfunktionen

Herbert Henning und Ulf Hoffmann

„Der Weg ist das Ziel“- Modellieren als Denkschulung

Der Erwerb mathematischer Grundbildung wird zunehmend charakterisiert durch die Entwicklung von Modellierungsfähigkeiten und somit in der Modellbildungskompetenz bei Schülern im Prozess der des Erfassens von Sachsituationen und der Lösung von Anwendungsproblemen Modellbildungskompetenzen sind dabei diejenigen Fähigkeiten, Fertigkeiten und Einstellungen, die für den Modellierungsgsprozess von Bedeutung sind. (vgl.Maaß 2004) Modellbildungskompetenzen beinhalten das Strukturieren, Mathematisieren und Interpretieren von Problemen und deren Lösung sowie die Fähigkeit, mit mathematischen Modellen zu arbeiten, das Modell zu validieren (vgl. Marxer 2005), das Modell und seine Ergebnisse kritisch zu analysieren und zu beurteilen, über das Modell zu kommunizieren und den Prozess der Modellbildung zu beobachten und selbst regulierend zu steuern. Mathematische Modellbildung („Modellierungstätigkeiten“) dominiert die Phasen eines Problemlöseprozesses. Ausgehend von einem Sachverhalt (Problem) und dessen Analyse wird ein mathematisches Modell aufgestellt. Das aufgestellte mathematische Modell und dessen Lösung werde interpretiert und mit dem Ziel untersucht, das Problem zu lösen. Zu diesem Problemlöseprozess gehört auch die Validierung des Modells. (vgl. Blum/Leiß 2002)



Mit dem Begriff Modellbildungskompetenz wird eine Gruppe von Kompetenzen (in gradueller Ausprägung) beschrieben, die sich dem Konzept der mathematischen Kompetenz unterordnet.

Fähigkeiten und Fertigkeiten in der Modellbildung können in einem Niveaustufenmodell strukturiert werden, das durch die folgenden Stufen charakterisiert werden kann (Keune 2004)

Stufe 1: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

Stufe 2: Selbständige Modellbildung

Stufe 3: Reflexion über Modellbildung

Die einzelnen Stufen können durch Modellierungsfähigkeiten beschrieben werden, deren Ausprägung entscheidend die Modellbildungskompetenz des „Problemlösers“ bestimmt.

Stufe 1: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

- Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben
- Fähigkeit einzelne Phasen zu charakterisieren
- die Fähigkeit einzelne Phasen zu unterscheiden bzw. während eines
- Modellbildungsprozesses zu lokalisieren

Stufe 2: Selbstständige Modellbildung

- Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln
- Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven
- Fähigkeit zur selbstständigen Modellbildung (Informationen aus einem Sachverhalt und Daten auswerten, Variabilisierung, Aufstellen eines Modells, Modellösung, Bewertung der Modellösung)

Stufe 3: Reflexion über Modellbildung

- Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses
- Fähigkeit über den Anlass von Modellbildung zu reflektieren
- Fähigkeit, Kriterien der Modellbildungsevaluation zu charakterisieren

Modellbildungsaufgaben zu „Exponentialfunktionen, Klasse 10“

Modellieren umfasst ein Komplex eng miteinander verflochtener Modellierungsfähigkeiten, deren bewusste Anwendung zur Lösung von Problemen über einen längeren Zeitraum entwickelt werden müssen. In einem Unterrichtsversuch (Klasse 10, Gymnasium) im Stoffgebiet „Exponentialfunktionen“ (10 Unterrichtsstunden) haben wir versucht, Modellierungsfähigkeiten beim Lösen von Problemen aus Sachsituationen auf verschiedenen Niveaustufen herauszubilden. Dabei haben wir Modellierungsaufgaben „konstruiert, die auf die Herausbildung von Modellbildungsfähigkeiten entsprechend der Charakterisierung der Anforderungen für die Niveaustufen I bis III abzielen.

Grundlage der Erarbeitung der Modellbildungsaufgaben war das durch **allgemeine** und **fachspezifische (Leitideen)** charakterisierte Kompetenzmodell als Basis der Bildungsstandards für den „Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik“ (Beschluss der KMK, 2004)

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und einsetzen
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und Lösungswege reflektieren

K 3 Mathematisch modellieren

- **die Situation , die modelliert werden soll in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen**
- **in den jeweiligen mathematischen Modellen arbeiten**
- **Ergebnisse am Sachverhalt prüfen und interpretieren**

K 4 Mathematische Darstellungen verwenden

K 5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

K 6 Kommunizieren

Leitideen L1 bis L 6

L 1 Zahl

L 2 Messen

L 3 Strukturieren in der Ebene und im Raum

L 4 funktionale Zusammenhänge

L 5 Algorithmen, Kalküle und Heurismen

L 6 Daten und Zufall

Bezogen auf **Wachstumsprozesse**, die sich mit Hilfe von Exponentialfunktionen modellieren lassen, kann der in der Übersicht dargestellte Zusammenhang zwischen **allgemeinen Kompetenzen K**, **Leitideen L** und **inhaltsbezogenen Kompetenzen** hergestellt werden.

Allgemeine Kompetenz	**Leit-idee**	**Inhaltsbezogene Kompetenz** Die Schülerinnen und Schüler ...
K 3	L 4	... entwickeln ein Verständnis für die Notwendigkeit, Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellbildung von Wachstumsprozessen,
K 3	L 4	... erkennen, dass mathematische Modelle realer Wachstumsprozesse vielfältige Erkenntnisse über diese Prozesse erfordern, insbesondere die Einflussgrößen und die Bedingungen, unter denen der Prozess stattfindet,
K 3, K 4	L 4	... erkennen, dass für ein und denselben Prozess unterschiedliche Wachstumsmodelle (Szenarien) aufgestellt werden können, wenn die Entwicklung bestimmter Bedingungen oder Einflussgrößen nicht genau bekannt ist,
K 3	L 4	... wählen für Wachstumsprozesse geeignete Modelle aus und passen diese entsprechend an,
K 6	L 1, L 4	... gehen zunehmend kritisch mit den angewendeten Modellen und den daraus abgeleiteten Erkenntnissen um.

Es wurden nach der Klassifizierung in den **Niveaustufen I bis III** Modelbildungsaufgaben erarbeitet, die einerseits diesen Zusammenhang abbilden und andererseits die in den Rahmenrichtlinien Mathematik, Land Sachsen-Anhalt formulierten Vorgaben berücksichtigen:

Niveaustufe	**Aufgabenbezeichnung**	**Aufgabe**
N1	A01N2	Falten bis zum Mond
N3	A02N3	Katzenpopulation (Theodor Storm)
N2	A03N2	Abnahme des Bierschaums (Real- und Beobachtungsexperiment)
N1	A04N1	Abnahme des Luftdrucks in großen Höhen
N2	A05N2	Abkühlung der Kaffeetasse
N2	A06N2	Schmelzen des Eisberges
N3	A07N3	Himmelsscheibe von Nebra
N2	A08N2	Holzbestand des Waldes
N3	A09N3	Abnahme der Helligkeit beim Eintauchen in Wasser
N2	A10N2	Altersbestimmung des Grabtuchs von Turin
N2	A11N2	Radioaktive Strahlung
N1	A12N1	Bevölkerungsexplosion in Oldenburg
N3	A13N3	Abnahme des Blutalkohol
N3	A14N3	Wanderung einer Droge
N2	A15N2	Bakterienzuwachs

Die folgenden Beispiele für Modellbildungsaufgaben zu den Niveaustufen **N 1** bis **N 3** charakterisieren das Anforderungsniveau hinsichtlich der Modellbildungskompetenz **K 3:**

A12N1: Bevölkerungsexplosion in Oldenburg

Oldenburg (Niedersachsen) gehört zu den wenigen Großstädten Deutschlands, die ein Bevölkerungswachstum vorweisen können. Die Stadt Oldenburg hatte Anfang 2003 158020 Einwohner. In den 10 Jahren zuvor hat sich die Einwohnerzahl um ca. 9 % erhöht.

Wenn sich dieser Trend fortsetzt:

a) Wie viele Einwohner hat Oldenburg 2013?

b) Wie viele Einwohner hat Oldenburg 2053?

c) Wie viele Einwohner hatte Oldenburg 1993?

A11N2: Radioaktive Strahlung

Beim Umgang mit radioaktivem Material wird die Strahlung durch Bleiplatten abgeschirmt. Dabei wird die Intensität der Gammastrahlen pro 15 mm Dicke jeweils auf 50 % reduziert.

a) Auf welchen Teil ihres ursprünglichen Wertes sinkt die Strahlungsintensität bei einer Abschirmung durch ein 75 mm starke Bleiplatte.

b) Wie stark muss man eine Bleiplatte wählen, wenn sie die Intensität der durchgehenden Gammastrahlung auf ein Hundertstel ihres ursprünglichen Wertes reduzieren soll.

A13N3: Abnahme des Blutalkohols

Im Blut sind normalerweise 0,01 ‰ Alkohol enthalten. Darüber hinausgehender Alkohol im Blut wird von der Leber abgebaut. In der Ausnüchterungsphase nach der Aufnahme alkoholischer Getränke nimmt die Promillezahl um etwa 0,2 je Stunde ab.

a) Beschreibe die Abnahme der Blutalkoholkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit!

b) Stell dir vor, du gehst auf eine Party, wo es verschiedene Getränke gibt. Erstelle eine Liste der Getränke und deren Alkoholanteil mit Excel! Welche Getränke trinkst du in welchen Mengen? (Der Jugendschutz bleibt außen vor.) Wie groß ist am Abend dein Alkoholgehalt im Blut nach der Widmark-Formel? Wann bist du wieder nüchtern?

c) Eine Person trinkt 4 Bier und 3 Schnäpse. Wie schwer ist die Person, wenn sie nach 8 Stunden Ausnüchterung wieder nach dem Gesetz in der Lage ist das Kraftfahrzeug zu führen?

Als Erwartungsbild soll exemplarisch auf der Grundlage des Phasenmodells im Problemlösungsprozess die Lösung Modellbildungsaufgabe dargestellt werden

---

Diese oben dargestellte Modellbildungsaufgabe wird Niveaustufe II zugeordnet und dient dazu, den Modellbildungskreislauf zu erkennen, zu verstehen und ein Modell zu finden. Die Schüler sollen in der Lage sein, eine Funktionsgleichung als Modell für den Zerfallsprozess aufzustellen, in dem Modell zu „rechnen" und dabei das Modell entsprechend der Problemstellung zu variieren (Funktionsgleichung nach gesuchten Größen unter Verwendung der Daten umstellen).

Problemsituation verstehen:

Die Strahlung eines radioaktiven Materials kann man niemals vollständig abschirmen. Der Schüler muss verstehen, dass die Intensität pro Plattenstärke exponentiell abklingt, aber niemals Null wird.

Realmodell:

Im Realmodell wird die Strahlung mittels physikalischer Messmethoden gemessen und somit benötigten 1,5 cm Plattenstärke bestimmt. Auch dieses Modell berücksichtigt keine Alpha- oder Betastrahlung. Diese sind bei dieser Aufgabe nicht von Interesse.

Mathematisches Modell:

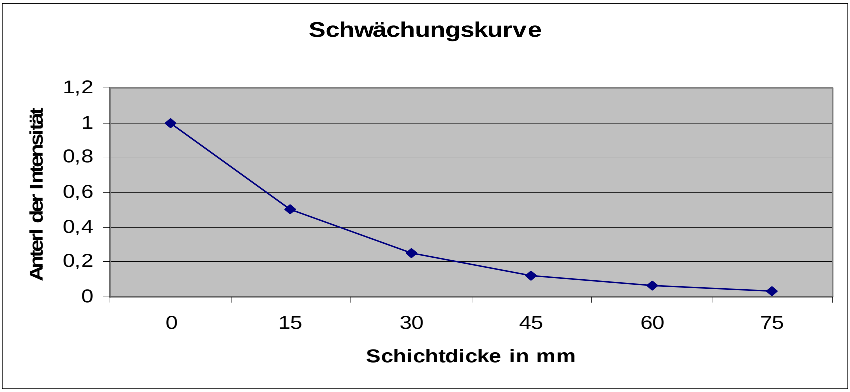
Die aus der Aufgabenstellung hervorgehenden Informationen sollen als Gleichung dargestellt werden. Eine Wertetabelle kann zur Aufstellung dieser Gleichung helfen.

Mathematische Berechungen:

Für den exponentiellen Zusammenhang gilt $f(x) = a^x$ mit x als Schichtdicke in mm.

Aufstellen einer Wertetabelle:

Schichtdicke in mm	0	15	30	45	60	75
Anteil der Intensität	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125



Aus der Tabelle wird der Wachstumsfaktor

ermittelt: $a = 0{,}5$

Also gilt: $f(x) = 0{,}5^{\frac{x}{15}}$

zu a) $f(15) = 0{,}5^5 = \underline{\underline{0{,}2373}}$

zu b) $0{,}01 = 0{,}5^{\frac{x}{15}}$

$\underline{\underline{x = 99{,}66 \quad mm}}$

Mathematische Lösungsevaluation:

Durch Aufstellung der Funktionsgleichung und Berechnung der Größen kann die Aufgabe ohne Schwierigkeiten gelöst werden.

Reale Lösungsevaluation:

Die Schüler sollen sich kritisch mit dem Ergebnis auseinandersetzen. Wie groß ist die Strahlung der gefährlichen Brennstäbe, die als Sondermüll ausgelagert werden? Reichen die 75 mm Bleiplatten zur Abschirmung aus. Wie groß ist unsere Umgebungsstrahlung? Ist die Reststrahlung noch für die Lebewesen gefährlich?

Unterricht in Klasse 10 zu „Exponentialfunktionen und Modellbildung“

Für die zur Verfügung stehende Unterrichtszeit planten wird folgende inhaltliche Schwerpunktsetzung

Tag	**Datum**	**Themen**
Donnerstag	03.05.07	Realisierung und Festigung, Falten bis zum Mond **(A01N2)**
Freitag	04.05.07	Eigenschaften der Potenzfunktion
Montag	07.05.07	Katzenpopulation (A02N3), Abnahme des Bierschaums (A03N2), Abnahme des Luftdrucks in großen Höhen **(A04N1)**
Dienstag	08.05.07	Übung Potenzgesetze, Radioaktive Strahlung **(A11N2)**
Donnerstag	10.05.07	Schülervortrag: Abkühlung einer Kaffeetasse (**A05N2**), Diskussion der Katzenpopulation, Schmelzen eines Eisberges (A06N2)
Freitag	11.05.07	Holzbestand **(A08N2)**, Helligkeit im Wasser (A09N3), Himmelsscheibe **(A07N3)**, Grabtuch von Turin **(A10N2)**
Montag	14.05.07	Einführung der Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion, Funktionsweise eines Rechenschiebers, Oldenburg **(A12N1)**
Dienstag	15.05.07	Modellierung mit Excel: Abnahme des Blutalkohols **(A13N3)**
Dienstag	29.05.07	Kontrolle der HA zum Alkoholabbau, Drogenaufgabe **(A14N3)**
Dienstag	31.05.07	Test

(1) Reaktivierungs- und Wiederholungsphase

Eine Folge von **Schüleraufgaben** wurde zur Reaktivierung und Wiederholung mit dem Ziel:

- Zuordnung von Graphen zu Funktionsgleichungen
- „Simulation“ von Füllvorgängen und Zuordnung der „Füllgraphen“
- Modellierung eines Realvorganges „Bewegungsablauf“ und Graph
- „Übersetzung“ einer mathematischen Geschichte als Darstellung eines Graph

(Aufgabenbeispiele als Kopien)

(2) Exponentialfunktionen als „Mathematisierungsmuster“ für Wachstums- und Zerfallsprozesse (Begriffsbildung)

In selbstständiger Schülerarbeit (Arbeitsaufträge, Arbeitsblätter, Beobachtungsaufgaben, Schüleraufträge) wurden Begriff, Funktionsgleichung, Graph und Eigenschaften der Exponentialfunktion anwendungsorientiert erarbeitet.

Bierschaum - Experiment

„Beobachtet, wie sich die Höhe des Bierschaums über einen gewissen Zeitraum verändert und protokolliert in regelmäßigen Zeitabständen (z.B. 2 min) die Veränderungen in einer Tabelle und stellt den Zusammenhang zwischen der ***Zeit t*** *und der* ***Höhe der „Bierschaumkrone“ h*** *in einem Koordinatensystem dar.*

Welchen Zusammenhang vermutet ihr aus der Tabelle und aus dem Verlauf der „Bierschaum“-Kurve?“

Von Katzen und Menschen

Theodor Storm

Von Katzen

Vergangenen Maitag brachte meine Katze

Zur Welt sechs allerliebste kleine Kätzchen.

Maikätzchen, alle weiß mit schwarzem Schwänzchen.

Fürwahr, es war ein zierlich Wochenbettchen!

Die Köchin aber – Köchin sind grausam,

Und Menschlichkeit wächst nicht in der Küche –

Die wollte von den sechs fünf ertränken.

Fünf weiße schwarzgeschwänzte Maienkätzchen

Ermorden wollte dies verruchte Weib,

Ich half ihr heim! – Der Himmel segne

Mir meine Menschlichkeit! Die lieben Kätzchen,

Sie wuchsen auf, und nachts vor ihrem Fenster

Probierten sie die allerliebsten Stimmchen.

Ich aber, wie ich sie so wachsen sehe,

Ich preis mich selbst und meine Menschlichkeit. –

Ein Jahr ist um, und Katzen sind die Kätzchen,

Und Maitag ist's! – Wie soll ich es beschreiben,

Das Schauspiel, das sich jetzt vor mir entfaltet!

Mein ganzes Haus, vom Keller bis zum Giebel,

Ein jeder Winkel ist ein Wochenbettchen!

Hier liegt das eine, dort liegt das andere Kätzchen,
In Schränken, Körben, unter Tischen und Treppen,
Die Alte gar – neun, es ist unaussprechlich,
Liegt in der Köchin jungfräulichem Bette!
Und jede, jede von den sieben Katzen
Hat sieben, denkt euch! Sieben junge Kätzchen,
Maikätzchen, alle weiß mit schwarzen Schwänzchen!
Die Köchin rast, ich kann der blinden Wut
Nicht Schranken setzten dieses Frauenzimmers;
Ersäufen will sie alle neunundvierzig!
Mir selber, ach, mir läuft der Kopf davon –
O Menschlichkeit, wie soll ich dich bewahren!
Was fang ich an mit sechsundfünfzig Katzen!

Die Schülerinnen und Schüler hatten den Auftrag sich mit dem Gedicht „Katzen“ von Theodor Storm vertraut zu machen. Sie sollten (mit eigenen Worten) beschreiben, wie sich in dem beschriebenen Zeitraum die Katzenpopulation entwickelt und welche Bedingungen **(Modellannahmen)** man zur „Mathematisierung“ des Problems treffen müsste. Im Unterrichtsgespräch wurden einige Bedingungen herausgearbeitet, die für eine Modellierung zu betrachten notwendig wären. Es wurden dabei (sinngemäß) folgende Fragen aufgeworfen:

(1) Werden immer nur Katzen geboren, die „fruchtbar“ sind?

(2) Kann jede Katze schon nach 1 Jahr „Junge“ bekommen?

(3) Werden immerzu 7 Katzen geboren?

(4) Wie viele Jahre können Katzen „Junge“ bekommen“?

Anhand der Überlegungen der Schülerin **Maxi** (Klasse 10) wurde die Modellbildung diskutiert. Interessant an den Überlegungen der Schülerin waren dabei die weiterführenden Betrachtungen (Futteraufkommen, Kosten für eine mögliche „Sterilisation“ der Katzen zur „Geburtenregelung“).

Die Darstellung der Lösung als Folien-Vorlage:

(Ergänzung der Folie als Kopie)

Gemeinsam wurden textbasierte („Katzen“) Modellierungsmöglichkeiten zur Gewinnung der **Funktionsgleichung** für die Beschreibung des Wachstums der Katzenpopulation gefunden.

Modell I

Vorraussetzung:

Jede Katze gebärt pro Jahr k Katzen, wobei k fest ist.

$$
\begin{array}{ll}
0.\ \ Jahr: & k \\
1.\ \ Jahr: & k+k^2 \\
2.\ \ Jahr: & k+k^2+(k+k^2)\cdot k = k^3+2k^2+k \\
3.\ \ Jahr: & k^4+3k^3+3k^2+k \\
4.\ \ Jahr: & k^5+4k^4+6k^3+4k^2+k
\end{array}
$$

Eine genaue Analyse der Koeffizienten führt zur Entdeckung des PASCALschen Dreiecks, was für die Anzahl der Katzen im x-ten Jahr folgende allgemeine Darstellung liefert:

$$\binom{x}{0}\cdot k^{x+1}+\binom{x}{1}\cdot k^{x}+\ldots+\binom{x}{x-1}\cdot k^{2}+\binom{x}{x}\cdot k=\sum_{i=o}^{x}\binom{x}{i}\cdot k^{x+1-i}$$

Modell II

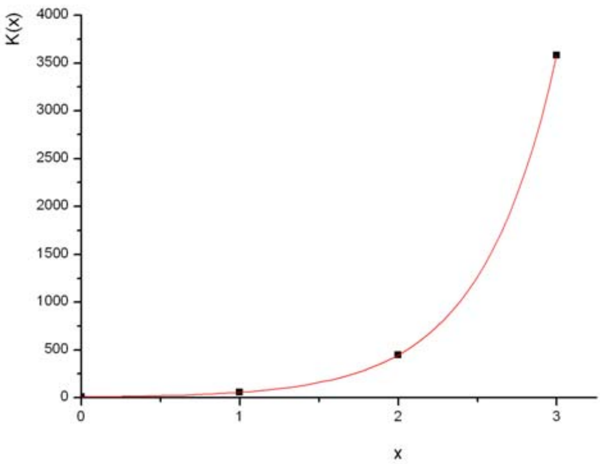
Vorraussetzung:

Jede Katze gebärt 7 Katzen, es treten keine Sterbefälle auf.

0. Jahr:	7	
1. Jahr:	7 · 7 + 7 = 56	(7 · 8 = 56)
2. Jahr:	56 · 7 +56 = 56	(7 · 8 · 8 = 448)
3. Jahr:	448 · 7 + 448 = 3584	(7 · 8 · 8 · 8 = 3584)
x-tes Jahr:		$K(x)=7\cdot 8^{x}$

Modell III

In einer anderen Gruppe gelang die Aufstellung einer allgemeinen Funktionsgleichung nicht. Die Schülerinnen und Schüler ermittelten jedoch die Werte K(0) = 7, K(1) = 56, K(2) = 448, K(3) = 3584 usw. (also die gleichen wie in Modell II) und stellten die Funktionsweise graphisch dar:



Falten bis zum Mond

Die Schülerinnen und Schüler hatten den Auftrag die folgenden **Arbeitsblätter** zu bearbeiten.

Als **Realexperiment** wurde der Faltvorgang an einem DIN A4-Blatt durchgeführt und eine Vermutung zu der Frage „**Wie oft müsste man ein DIN A4-Blatt falten um die Entfernung Erde - Mond zu erhalten ?“** aufzustellen.

(Ergänzung der Arbeitsblätter)

In Auswertung der von den Schülerinnen und Schüler bearbeiteten Problemstellungen des Arbeitsblattes wurden Begriff, Funktionsgleichung, Graph und Eigenschaften der **Exponentialfunktion** zusammenfassend erarbeitet und **Wachstums- und Zerfallsprozesse** mit Hilfe der Exponentialfunktion als **Modell** und Mathematisierungsmuster charakterisiert.

(3) Modellbildung mit EXEL

Die Schülerinnen und Schüler bekamen die Aufgabe „Abnahme des Blutalkohols“ (A13N3). Als Hausaufgabe sollten sie sich zuvor über die Widmark-Formel (Recherchen) informieren.

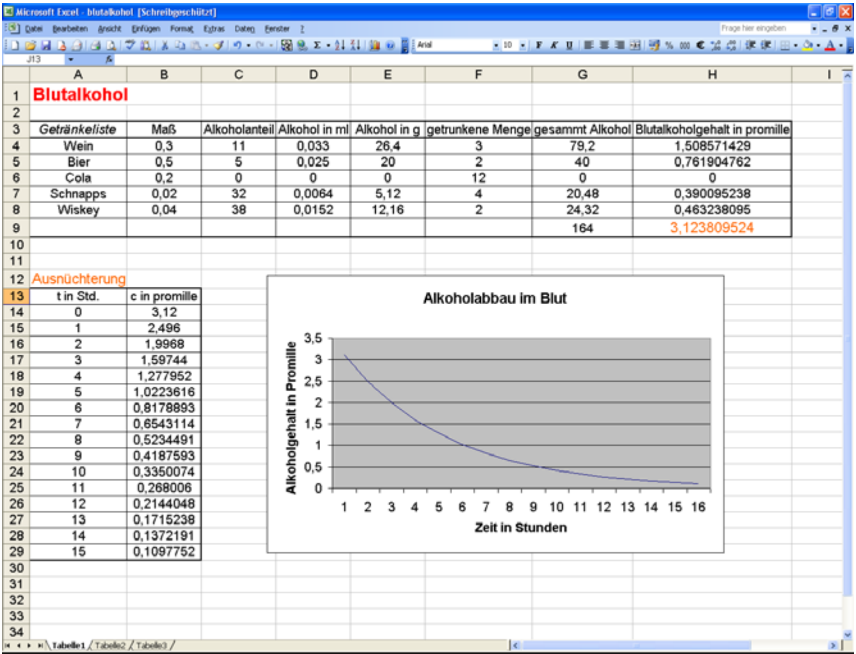
Alkohol als „heimliche „Droge

Im Blut sind normalerweise 0,01 ‰ Alkohol enthalten. Darüber hinausgehender Alkohol im Blut wird von der Leber abgebaut. In der Ausnüchterungsphase nach der Aufnahme alkoholischer Getränke nimmt die Promillezahl um etwa 0,2 je Stunde ab.

a) Beschreibe die Abnahme der Blutalkoholkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit!

b) Stell dir vor, du gehst auf eine Party, wo es verschiedene Getränke gibt. Erstelle eine Liste der Getränke und deren Alkoholanteil mit Excel! Welche Getränke trinkst du in welchen Mengen? (Der Jugendschutz bleibt außen vor.) Wie groß ist am Abend dein Alkoholgehalt im Blut nach der **Widmark-Formel**? Wann bist du wieder nüchtern?

c) Eine Person trinkt 4 Bier und 3 Schnäpse. Wie schwer ist die Person, wenn sie nach 8 Stunden Ausnüchterung wieder nach dem Gesetz in der Lage ist, ein Kraftfahrzeug zu fahren?



Getränkeliste	Maß	Alkoholanteil	Alkohol in ml	Alkohol in g	getrunkene Menge	gesammt Alkohol	Blutalkoholgehalt in promille
Wein	0,3	11	0,033	26,4	3	79,2	1,508571429
Bier	0,5	5	0,025	20	2	40	0,761904762
Cola	0,2	0	0	0	12	0	0
Schnapps	0,02	32	0,0064	5,12	4	20,48	0,390095238
Wiskey	0,04	38	0,0152	12,16	2	24,32	0,463238095
						164	3,123809524

t in Std.	c in promille
0	3,12
1	2,496
2	1,9968
3	1,59744
4	1,277952
5	1,0223616
6	0,8178893
7	0,6543114
8	0,5234491
9	0,4187593
10	0,3350074
11	0,268006
12	0,2144048
13	0,1715238
14	0,1372191
15	0,1097752

[redacted]

Eine Stunde zuvor bekamen die Schülerinnen und Schüler die Hausaufgabe, sich im Internet oder selbstgesuchten Literaturen über die Widmark-Formel zu informieren. Zum Verständnis dieser Formel bekamen sie weiterhin die Aufgabe, die Alkoholkonzentration im Blut eins 80 kg schweren Mannes zu berechnen, der 3 Bier trink. Die Widmark-Formel lautet:

$c = A \cdot (r \cdot g)^{-1}$

wobei A die aufgenommene Alkoholmenge in Gramm, r ein Reduzierungsfaktor (bei Männer: r = 0,7; bei Frauen: 0,6), g das Körpergewicht und c die Alkoholkonzentration in Promille ist.

Bei guter Recherche sind die Schülerinnen und Schüler darauf gestoßen, dass sich der enthaltene Alkohol in Gramm eines Getränkes nicht ohne weiteres aus der angegebenen Alkoholkonzentration ermitteln lässt. Diese bezieht sich auf das Volumen und nicht auf die Masse. Eine Umrechnung über die Dichte ist nötig. Im oben dargestellten Excelformular lässt sich die sukzessive Berechnung der Alkoholkonzentration einer Person nachvollziehen. Dabei werden nochmals die Eingabe von Anweisung in Excel trainiert. Bei Angabe der Maßes und der Alkoholkonzentration berechnet die Tabellenkalkulation durch Eingabe der

Formel die den enthaltenen Alkoholanteil eines Getränkes (Spalte D). In der Spalte E wird durch Multiplikation der Dichte von Alkohol der Anteil in Gramm berechnet. In Spalte G wird dieser Anteil mit der getrunkenen Menge multipliziert und in Spalte H findet man die Anweisung der Widmark-Formel. Nach Aufsummierung der Spalte H erhält man die gesamte Alkoholkonzentration im Blut. In der zweiten Tabelle „Ausnüchterung" wird diese Konzentration in Abhängigkeit der Zeit abgebaut. Letztlich werden diese Werte graphisch dargestellt.

Auswertung der Unterrichtsreihe

Es wurden in der Unterrichtseinheit aus dem erarbeiteten Aufgabenpool weitere Aufgaben eingesetzt. (Auswahl):

A04N1 Luftdruck

Der Luftdruck lässt sich in Abhängigkeit von der Höhe in etwa durch die Formel berechnen: $p = 1000 \cdot 0{,}95^x$ (x in km)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Je größer die Höhe, desto größer der Luftdruck.
- Je kleiner der Luftdruck, desto geringer die Höhe.
- Alle 1000 Meter sinkt der Luftdruck um ca. 5 Prozent.
- Alle 1000 Meter sinkt der Luftdruck um ca. 50 Prozent.
- Alle 2000 Meter sinkt der Luftdruck um ca. 20 Prozent.

A06N1 Eisberg

Ein Eisberg verliert pro Jahr 10 % seines Volumens.

1. Wie viel Prozent seines Volumens verliert er in 5 Jahren? Begründe!
2. Der Eisberg hat ursprünglich ein Volumen von 800 km³. Wie viel Liter verliert er in einem Jahr.

A09N3 Abnahme der Helligkeit

In einem See nimmt die Intensität von Licht pro 1 m Wassertiefe um p = 7 % ab. Welche Intensität verbleibt in x Metern Tiefe? In welcher Tiefe ist noch 50 % von der ursprünglichen Intensität übrig?

Im Rahmen eines **Testes** nach Abschluss der Unterrichtseinheit wurden neben formalen Aufgaben zur Anwendung der Potenzgesetze zur **Termumformung** die folgenden Modellbildungsaufgaben gestellt:

Aufgabe 1:
Familie Schulze eröffnet bei der Geburt ihres Kindes ein separates Konto und zahlt dort 500 Euro ein. Das Konto wird mit 4 % verzinst.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung f(t)
b) Wie viel Geld hat das Kind zu seinem 18. Geburtstag auf dem Konto, wenn weder etwas abgehoben noch draufgezahlt wird.
c) Wie müsste das Konto verzinst werden, damit sich das Guthaben nach 10 Jahren verdoppelt?

A**ufgabe 2:**
Ein Kondensator wurde über einen Widerstand entladen. Dabei wurde die Spannung in Abhängigkeit von der Zeit gemessen.

t in s	0	1	2	3	4	5	6
U in V	120	96	76	60	48	38	30

a) Beschreibe den Entladevorgang durch eine Funktion

b) Wann wird die Spannung einen Wert kleiner als 12 V annehmen?

Hier einige **Schülerlösungen** zu den Modellbildungsaufgaben aus dem Test:

1. a)

$\frac{180}{200} = 0{,}9 \quad \frac{162}{180} = 0{,}9 \quad \frac{164}{162} = 1{,}01$

$f(t) = 200V \cdot 0{,}8^t$

Abweichung bei $t = 3$, vielleicht Messfehler

b) $24V = 200V \cdot 0{,}8^t \quad |:200$

$\frac{24\cancel{V}}{200\cancel{V}} = 0{,}8^t \quad \lg$

$\lg \frac{24}{200} = \lg 0{,}8^t$

$\frac{\lg \frac{24}{200}}{\lg 0{,}8} = t = 20{,}12389$

Die Spannung wird nach etw. 20,12 s 24V.

2. $K = 1000\,€$

$z = 0{,}03$

a) $f(t) = 1000\,€ \cdot 1{,}03^t$

$f(t) = K \cdot (1 + z)^t$

b) $t = 16$

$f(16) = 1000 \cdot 1{,}03^{16}$

$= 1604{,}7065$

Das Kind hat 1604,71€.

c) $f(8) = 1000\,€ \cdot x^8 = 2000\,€$

$1 + z = x$

$\frac{2000}{1000} = x^8$

$2 = x^8$

$\sqrt[8]{2} = 1{,}0905$

$z = 1{,}0905 - 1$

$= 0{,}0905$

Das Konto müsste mit etwa 9,05% verzinst werden.

1.) a)

t	0	1	2	3
$f(t)$	500 €	520 €	540,8	562,432

$a = 1{,}04$

$k = 500$

$f(t) = \cancel{50}\ k \cdot a^t$

$f(t) = 500 \cdot 1{,}04^t$

b) $f(t) = 500 \cdot 1{,}04^t$

$f(18) = 500 \cdot 1{,}04^{18}$

$f(18) = 1012{,}9$

Zu dem 18. Geburtstag hat das Kind 1012,90 € auf dem Konto.

c) $f(t) = 500 \cdot 1{,}04^t$

$1000 = 500 \cdot 1{,}04^t \quad | \lg$

$\lg 1000 = \lg 500 + t \cdot \lg 1{,}04 \quad | - \lg 500$

$0{,}3 = t \cdot \lg 1{,}04 \quad | : \lg 1{,}04$

$17{,}67 = t$

$f(t) = 500 \cdot 1{,}04^t$

$1000 = 500 \cdot x^{10} \quad | \sqrt[10]{}$

$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{500} \cdot x \quad | : \sqrt[10]{500}$

$\sqrt[10]{1000 : 500} = x$

$\sqrt[10]{2} = x$

$1{,}07 = x$

$x = a$

t	0	1	2
$f(t)$	500	535	572,45

$a = 1{,}07 \curvearrowright 7\%$

Das Konto muss zu 7% verzinst werden.

(2) a) $a = 0{,}8$
$k = 120$

$U = 120 \cdot 0{,}8^x$

b) $y = 120 \cdot 0{,}8^x$
$12 = 120 \cdot 0{,}8^x \quad | \lg$
$\lg 12 = \lg 120 + x \cdot \lg 0{,}8 \quad | -\lg 120$
$-1 = x \cdot \lg 0{,}8 \quad | : \lg 0{,}8$
$10{,}32 = x$

Die Spannung wird nach 10,32 h kleiner als 12 V sein.

In Auswertung der Schülerlösungen zu den Modellbildungsaufgaben lassen sich die folgenden Aussagen zur Unterrichtsreihe ableiten:

Die Schülerinnen und Schüler haben sich zunächst in die Problemsituation hineinversetzt und alle notwendigen Sachverhalte des Realmodells herausgearbeitet **(Phase I und II)**. Dabei formulierten sie die gegebenen und gesuchten Größen. Das Aufstellen und Parametrisieren ist die **Phase III** des Modelbildungskreislaufes. Es wurde der exponentielle Zusammenhang richtig erkannt und die Funktionsgleichung mit $f(x) = c \cdot a^x$ als Modell gewählt.. Im darauf folgenden Schritt wurden die Parameter a und c ermittelt. Besonders beim Ermitteln des Wachstumskoeffizienten nutzten Schülerinnen und Schüler mit einer Wertetabelle und bildeten anschließend den Koeffizienten f(2)/f(1). In der **Phase IV** der wurden die Prozentrechnung, die äquivalenten Umformungen von Gleichungen und die Potenzgesetze ohne Pronbleme zur Lösung im Modell angewendet. Alle Schülerinnen und Schüler hinterfragten die Lösung in Form eines Antwortsatzes. Nur wenige haben ihr Ergebnis weniger sinnvoll gerundet und gaben zum Beispiel den Geldbetrag mit 1604,706 € oder die Zeit mit 10,318 s an.

Literatur

Blum,W., Leiß, D., Modellieren lernen mit der "Tanken"- Aufgabe mathematik lehren No. 128, 2004

Keune, M., Niveaustufenorientierte Herausbildung von Modellbildungskompetenzen, Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim Franzbecker, 2004

Kubitza, Th., Aufgabenbasiertes Konzept für die Herausbildung von Modellbildungskompetenzen im Mathematikunterricht am Beispiel des Stoffgebietes "Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen" der Klasse 9 an Gymnasien, Magdeburg 2006

Maaß, K., Mathematisches Modellieren im Unterricht-Ergebnisse einer empirischen Studie Hildesheim, Franzbecker, 2004

Marxer, M., Validieren lernen, PM 47.Jg. No.3, 2005

Weitere Informationen und Materialien zum Thema unter http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning/

Eine „strahlende“ Zukunft ?

Tilman Kant

Vattenfall entdeckt weitere Schäden am AKW Krümmel

Im Atomkraftwerk Krümmel hat der Betreiber Vattenfall erneut Mängel festgestellt. Das Unternehmen entdeckte bei einer Überprüfung weitere Risse an zwei Armaturen. Die Atomaufsicht ist informiert. Wann der Meiler wieder ans Netz gehen kann, ist ungewiss.

Frankfurt am Main - Die Schäden seien an Teilen entdeckt worden, die zum Reaktorwasserreinigungssystem und zum Nachkühlsystem gehörte, sagte Vattenfall-Unternehmenssprecher Ivo Banek. Die Kieler Atomaufsichtsbehörde sei informiert worden.

DDP

Vattenfall-AKW Krümmel: Risse in Rohrleitungen und Armaturen

In den vergangenen Wochen waren bereits 14 Risse in Rohrleitungen und einer Armatur aufgefallen. Daraufhin hatte das Unternehmen weitere Armaturen untersucht. Vattenfall überprüft das AKW Krümmel derzeit im Rahmen seiner jährlichen Revision. Seit dem Brand eines Transformators Ende Juni steht der Meiler still. Wann er wieder in Betrieb genommen werden kann, ist derzeit noch unklar.

Ungeachtet dessen hält die Münchener Rück die Sicherheitsbedenken gegen deutsche Atomkraftwerke für überzogen. "Deutsche Atomkraftwerke sind sicher genug", sagte der zuständige Konzernvorstand Torsten Jeworrek der "Frankfurter Allgemeinen Zeitung (FAZ)" (Mittwochausgabe).

Spiegel Online, vom 05.09.07 (Auszug).
http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,504144,00.html (16.09.07)

Immer wieder liest man in der Zeitung Berichte über die hochaktuelle Atomdebatte. Es wird von Atomausstieg und unsicheren Kraftwerken gesprochen, von Zwischen- und Endlagern, von Demonstrationen und Polizeiaufgeboten. Deshalb wollen wir uns im Folgenden etwas mit Radioaktivität beschäftigen.

Ein Fußballplatz voller Atommüll

Von Sebastian Knauer

In Gorleben warten Tausende Demonstranten auf die Ankunft des Castors. Sie protestieren vor allem gegen Pläne, aus dem Zwischen- ein Endlager zu machen. Nach Einschätzung der Internationalen Atombehörde wäre ein deutsches Endlager entscheidend für die Zukunft der hiesigen Kernkraftwerke.

Hamburg - Die Kundgebungsteilnehmer versammelten sich rund drei Kilometer entfernt vom Zwischenlager Gorleben im Kreis Lüchow-Dannenberg und forderten mit Spruchbändern und Aktionen zum Stopp der Castor-Transporte auf. Die Proteste verliefen nach Polizeiangaben zunächst friedlich. Der nunmehr zehnte Transport mit Atommüll aus der französischen Wiederaufarbeitungsanlage in La Hague wird in Gorleben für spätestens Montag erwartet.

DPA

Demonstrantin vor dem Zwischenlager Gorleben: Aufmarsch der Clowns-Armee

Bei teils strömendem Regen machten Atomgegner mit Musik, Infoständen und Aktionen - unter anderem marschierte eine "Clowns-Armee" auf - auf ihr Anliegen aufmerksam. Für den Nachmittag war ein Protestzug vom Ort Gorleben zum Zwischenlager geplant. Zu den Protesten hatten verschiedene Gruppen und Politiker, darunter Grünen-Chef Reinhard Bütikofer, aufgerufen.

Die Grünen-Europaabgeordnete Rebecca Harms sagte im NDR: "Dieser Salzstock Gorleben ist als Endlager für radioaktiven Müll nicht geeignet, und wenn diese Castor-Transporte weiter nach Gorleben durchgeführt werden, der Atommüll dort oberirdisch zwischengelagert wird, dann geht es nach wie vor darum, oberirdisch Tatsachen zu schaffen für die Inbetriebnahme dieses meiner Meinung nach ungeeigneten Endlagers."

Artikel von Spiegel Online, vom 11.11.2006 (Auszug).
http://www.spiegel.de/politik/deutschland/0,1518,447896,00.html

Historische Entwicklung

1896 entdeckte Antoine Henri Becquerel die Röntgenstrahlung. Bei seinem Versuch diese durch Fluoreszenz erklären zu wollen, entdeckte er, dass Uransalz fotografische Platten zu schwärzen vermochte. Allerdings war die Uranprobe dazu auch ohne Vorbelichtung in der Lage, was Fluoreszenz als Ursache ausschloss. Wie er später zeigte, konnte diese neue Strahlung lichtundurchlässige Stoffe durchdringen und Luft ionisieren. Weitere radioaktive Elemente fanden Marie und Pierre Curie 1898 mit Thorium sowie zwei neuen, um ein Vielfaches stärker strahlenden Elementen, die sie Radium und Polonium tauften. Ernest Rutherford gelang es durch Untersuchung des Durchdringungsvermögens 1899 zwei Strahlungskomponenten zu unterscheiden. Paul Ulrich Villard entdeckte eine dritte Komponente, die nicht durch Magnetfelder abgelenkt wurde. Für die drei Strahlungsarten prägte Rutherford die Bezeichnungen Alpha-, Beta- und Gammastrahlung. Iréne und Frédéric Joliot-Curie gelang es 1933 erstmals, radioaktive Elemente künstlich zu erzeugen. Bei ihren Versuchen entdeckten sie 1934 eine neue Art des Betazerfalls, bei dem Positronen anstelle von Elektronen abgestrahlt werden. Seither unterscheidet man zwischen $\beta+$- und $\beta-$-Strahlung. (http://de.wikipedia.org/wiki/Radioaktivit%C3%A4t)

Gefährlichkeit von Radioaktivität

Heute weiß man, dass Radioaktivität für den Menschen gefährlich sein kann. Hinsichtlich der Gefährlichkeit von Radioaktivität müssen zwei verschiedene Risiken unterschieden werden:

1. die Strahlenbelastung selbst,
2. die Kontamination (Verunreinigung) mit radioaktivem Material, die unter Umständen zu lange andauernder Bestrahlung führen kann, insbesondere z.B. bei Kontamination der Haut von Personen oder gar Aufnahme radioaktiver Substanz in den Körper durch Einatmen oder Essen/Trinken.

(vgl. Wikipedia: Strahlenbelastung, 02.07.07 14:36.)

Aufgabenstellung

Untersuche durch ein Experiment, wie sich das Durchdringungsvermögen von Betastrahlung durch Aluminium verhält.

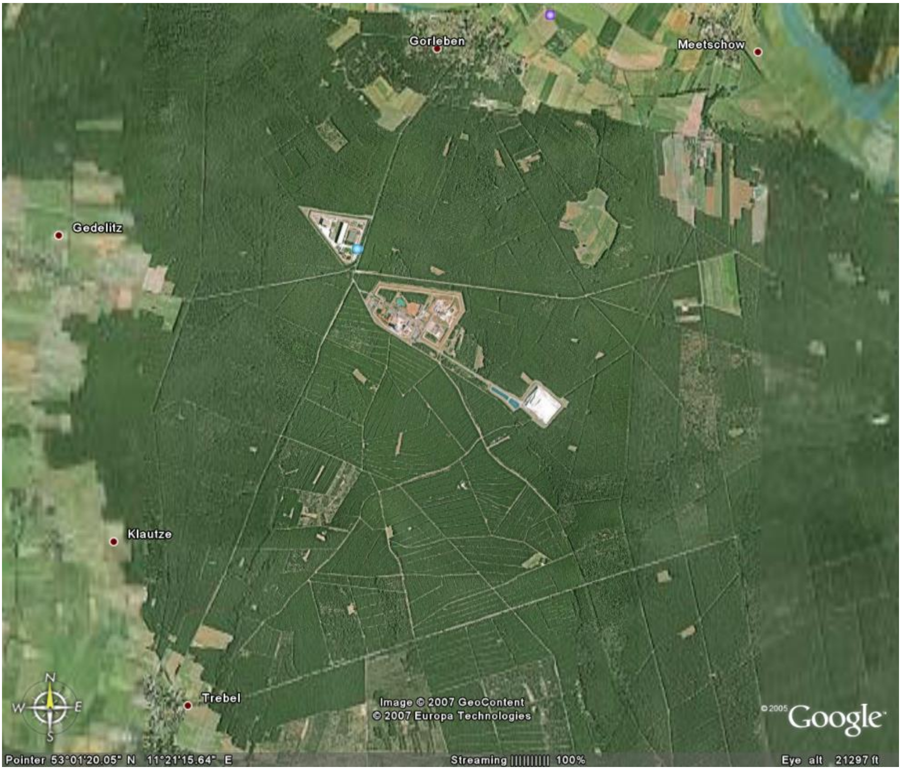
Stelle die Kurve graphisch dar und diskutiere sie.

Du hast Messwerte und eine Karte von der Umgebung des Zwischenlagers Gorleben .

Ermittle die Entfernung der Messpunkte zum Lager (zum Vergleich: Gorleben-Lager=1,79 km) und näherungsweise die Strahlungsstärke an der Oberfläche des Zwischenlagers.

Diskutiere das Ergebnis. Suche dir dazu auch selbständig zusätzliches Material.

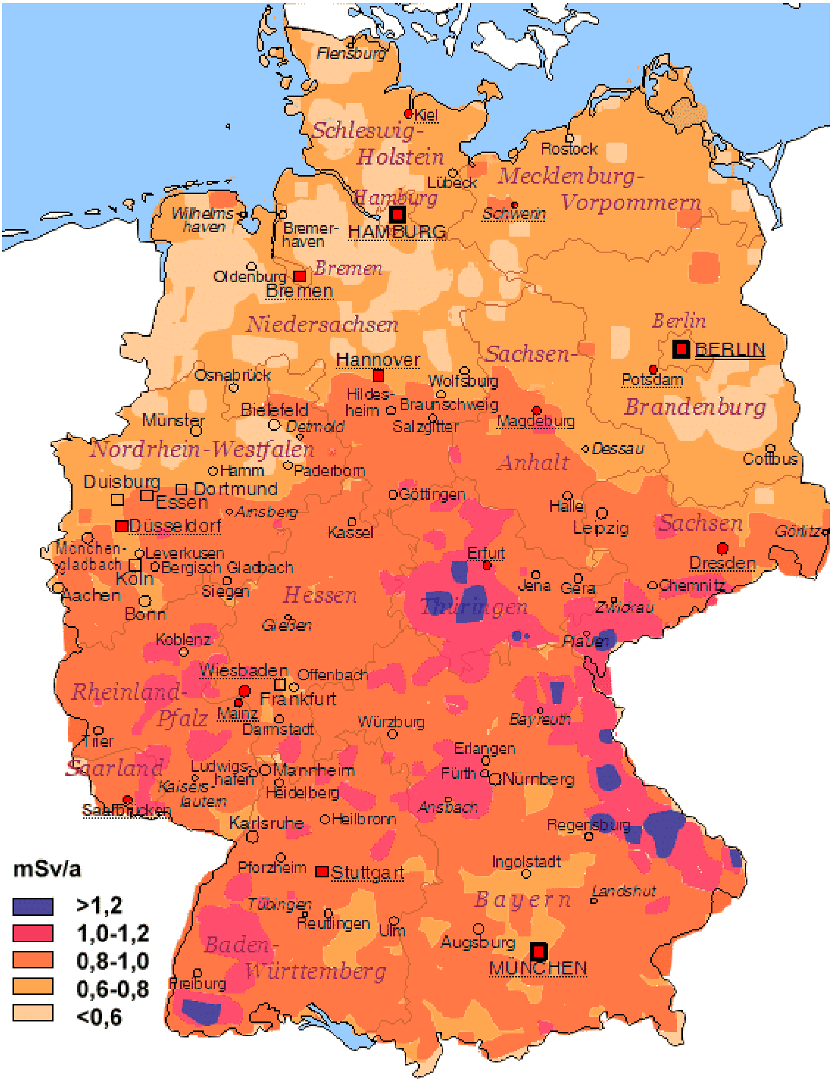
Material



Umgebung Gorlebens (vgl. /3/)

Messwerte (durchschnittlich):

Gedelitz:	7,92 Imp/s
Gorleben:	7,64 Imp/s
Trebel:	7,22 Imp/s
Meetschow:	7,36 Imp/s



Strahlenbelastung in Deutschland: aus Wikipedia: Strahlenbelastung, vom 02.07.07. Verfügbar unter http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Strahlenexposar.png

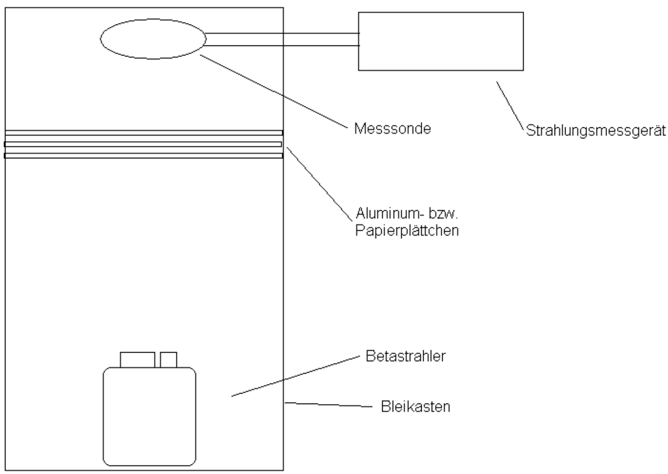
Problemlösung

1. Aufgabenteil

Messapparatur und Versuchsdurchführung

Im Bleikasten befanden sich der Betastrahler, die entsprechende Anzahl von Plättchen und die Messsonde des Strahlungsmessgerätes. Diese waren gemäß Bild 1 aufgebaut. Vor dem Bleikasten befand sich eine aus Bleibausteinen errichtete Mauer, die vor austretender Strahlung schützen sollte. Zunächst wurde die Zeit für jeweils 2000, die Sonde erreichende Betateilchen in Abhängigkeit der Dicke der Aluminiumschicht gemessen. Hierfür wurde die kleinere der beiden Öffnungen des Betastrahlers geöffnet. Danach wurde die Aluminiumschicht durch eine Papierschicht ersetzt, mit welcher eine analoge Messung durchgeführt wurde. Abschließend wurde versucht die Hintergrundstrahlung zu messen, indem der Betastrahler aus dem Bleikasten entfernt wurde und erneut gemessen wurde. Dabei wurde festgestellt, dass das Messgerät augenscheinlich defekt war, da eine Hintergrundstrahlung von Null gemessen wurde.

Versuchsauf-



bau

Versuchsaufbau

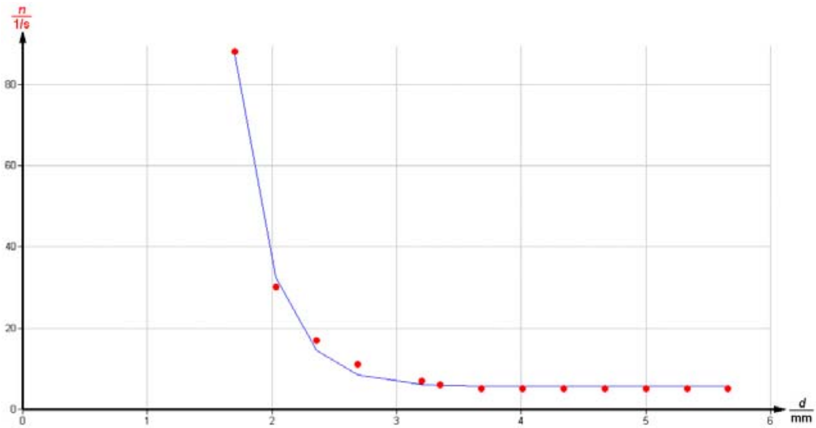
Messergebnisse

Tabelle 1: Zeit für eine Zählrate von 2000 in Abhängigkeit der Dicke bei Verwendung von Aluminium

d in mm	d in mm korrigiert	t in s	Impulse/s
0,00	1,70	22,70	88
0,33	2,03	66,59	30
0,66	2,36	118,33	17
0,99	2,69	189,33	11
1,32	3,02	267,53	7
1,65	3,35	326,03	6
1,98	3,68	374,75	5
2,31	4,01	404,58	5
2,64	4,34	427,56	5
2,97	4,67	423,22	5
3,30	5,00		
3,63	5,33	439,85	5
3,96	5,66	429,01	5

Die Dicke der Aluminiumplättchen betrug 0,33 mm. Die Absorption der Betastrahlung durch die Luft entspricht der, die durch 1,7 mm Aluminium hervorgerufen wird. Die Dicke wurde entsprechend korrigiert. Die Dichte von Aluminium beträgt

$$\rho = 2{,}7 \frac{g}{cm^3} \quad .$$



Grafische Darstellung der Messergebnisse

<u>Diskussion</u>

Die Funktion lautet $f(x) = 24971 \cdot e^{-3,36x} + 5,55$.

Hierbei ist x die Dicke in mm und f(x) die Anzahl der Impulse pro Sekunde. Die Funktion ist eine Exponentialfunktion. Das heißt, dass sich die Zahl der Impulse vervielfacht, wenn man die Aluminiumdicke um einen bestimmten Wert verringert. Das absolute Glied bei dieser Funktion beschreibt die Hintergrundstrahlung, eine Strahlung, die permanent vorhanden ist.

2. Aufgabenteil

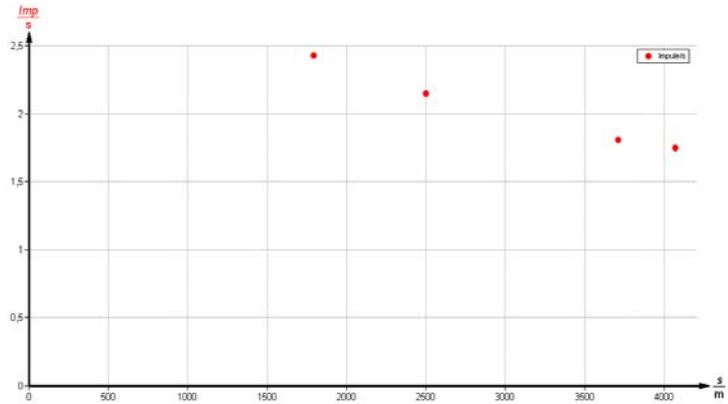
Die Entfernungen zum Zwischenlager betragen:

Gedelitz:	2,5 km
Gorleben:	1,79 km
Trebel:	4,07 km
Meetschow:	3,71 km

Gemessene Strahlungsstärken:

Gedelitz:	7,70 Imp/s
Gorleben:	7,98 Imp/s
Trebel:	7,30 Imp/s
Meetschow:	7,36 Imp/s

Hintergrundstrahlung aus Experiment: 5,55 Imp/s



Grafische Darstellung der Messwerte abzüglich der Hintergrundstrahlung

Auswertung

Die Funktion $f(x) = 3{,}13 \cdot e^{-0{,}000146x}$

nähert die Messwerte gut an. Setzt man für x=0 ein, so erhält man einen Strahlungswert von 3,13 Imp/s. Addiert man die Hintergrundstrahlung hinzu, so kommt man auf einen absoluten Wert von 8,64 Imp/s. Dies entspricht etwa einer Strahlenbelastung von 0,71 mSv/Jahr. **Dieser Wert ist für Menschen ungefährlich.** So beträgt etwa die natürliche Strahlenbelastung in Südbayern etwa 0,8-1mSv/Jahr.

Literatur

/1/ Autorenkollektiv:	Wikipedia: Radioaktivität , 20.06.07 20:46
/2/ Autorenkollektiv:	Wikipedia: Strahlenbelastung, 02.07.07 14:36
/3/ Autorenkollektiv:	Google Earth
/4/ Walcher, W.	Praktikum der Physik B.G. Teubner, Stuttgart (1999) 8. Auflage
/5/ Stolz, W.:	Starthilfe Physik B.G. Teubner, Stuttgart (2001) 3. Auflage
/6/ Genschke, D.:	Physikalisches Praktikum B.G. Teubner, Stuttgart (2001) 12. Auflage
/7/ Engelmann, L.:	Formeln und Tabellen Paetec, Berlin (2000) 6. Auflage
/8/ Schmeißer, B.:	Physikalisches Grundpraktikum III, Versuchsanleitungen
/9/ Knauer, Sebastian(2007):	Ein Fußballplatz voller Atommüll in Spiegel Online, 11.11.2006. Verfügbar unter http://www.spiegel.de/politik/deutschland/0,1518,447896,00.html
/10/ Unbekannt:	Vattenfall entdeckt weitere Schäden am AKW Krümmel, in Spiegel Online, vom 05.09.07 (Auszug). Verfügbar unter http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,504144,00.html (16.09.07)

Leise verklingt ein Ton…..!

Christiane Luther

Eine Mandolinistin schlägt die A-Seite an. Wie lange ist der Ton zu hören?

Diese **Projektaufgabe** kann in verschiedenen Klassenstufen der Sekundarstufen I und II eingesetzt werden.

Es ist in erster Linie für Klasse 10 und 11 als Anwendung der Potenz- und Logarithmusfunktionen gedacht. Der Schüler kann die Funktionsgleichung mit dem Hinweis, dass es sich um die natürliche Exponentialfunktion handelt selbst aus dem Diagramm entwickeln und die Aufgabe mit Hilfe des Materials selbstständig lösen.

Sie kann aber auch in Klasse 9 zur Festigung der Arbeit mit Potenzen und Logarithmen dienen. Dort sollten allerdings die notwendigen Funktionsgleichungen gegeben werden, sodass die Schüler ihr Wissen über Logarithmen anwenden können.

Eine Erweiterung ist auch auf die Sekundarstufe II möglich. Hier können die theoretischen Grundlagen erwähnt werden, um den Schülern einen Ausblick auf Differentialgleichungen zu geben. In Spezialschulen oder besonders leistungsstarken Klassen kann der Schüler angeregt werden, die Differentialgleichung selbst bzw. im Team zu lösen.

Die Schüler und Schülerinnen können

1. mit Diagrammen umgehen.
2. im Team arbeiten und sich in eine Gruppe eingliedern.

3. Informationen zusammentragen und bearbeiten.
4. Ergebnisse realistisch einschätzen und beurteilen.

Dabei können die Schülerinnen und Schüler

1. selbstständig eine Lösungsstrategie entwickeln.
2. die Situation in mathematische Relationen übersetzen.
3. Zahlenpaare aus Diagrammen ablesen.
4. Terme und Gleichungen umformen.
5. die Potenz- und Logarithmen-Gesetze anwenden.
6. die Plausibilität ihrer Ergebnisse überprüfen.
7. ihre Lösungswege mathematisch korrekt dokumentieren und präsentieren.:

Es handelt sich bei der Schwingung der Saite um eine **harmonische Schwingung mit Dämpfung.**

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\sigma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$Ansatz: x(t) = e^{\lambda \cdot t}$$

$$\rightarrow \lambda^2 + 2\sigma\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega^2}$$

Es ergeben sich drei Fälle:

1. Fall $\sigma^2 > \omega^2$: starke Dämpfung → Kriechfall
2. Fall $\sigma^2 = \omega^2$: aperiodischer Grenzfall
3. Fall $\sigma^2 < \omega^2$: schwache Dämpfung

Bei unserem Experiment liegt eine schwache Dämpfung vor.

Es folgt also:

$$\lambda = -\sigma \pm i \cdot \sqrt{\omega^2 - \sigma^2}$$

$$\lambda = -\sigma \pm i \cdot \sqrt{\omega_r^{\ 2}}$$

$$\rightarrow x(t) = A_0 e^{-\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega_r t)$$

$$\rightarrow A(t) = A_0 e^{-\sigma \cdot t} \quad Schwingungsamplitude$$

Die Gleichung der Schwingungsamplitude *A(t)* wird den Schülerinnen und Schülern der Klasse 10 mitgeteilt w

Töne können abhängig von ihrer Frequenz erst ab einer bestimmten Lautstärke wahrgenommen werden. Diesen Schalldruckpegel nennt man Hörschwelle.

Mikrofone wandeln Luftdruckveränderungen, wie sie von einer schwingenden Saite erzeugt werden, in elektrische Spannung um. Kennt man die Empfindlichkeit des Mikrofons, kann aus der gemessenen Spannung der Druck berechnet werden.

Wichtige Informationen für die Schüler sind dabei::

1. Der Schalldruckpegel ist mit $p_0 = 2 \cdot 10^{-7}\, mbar$ definiert als:

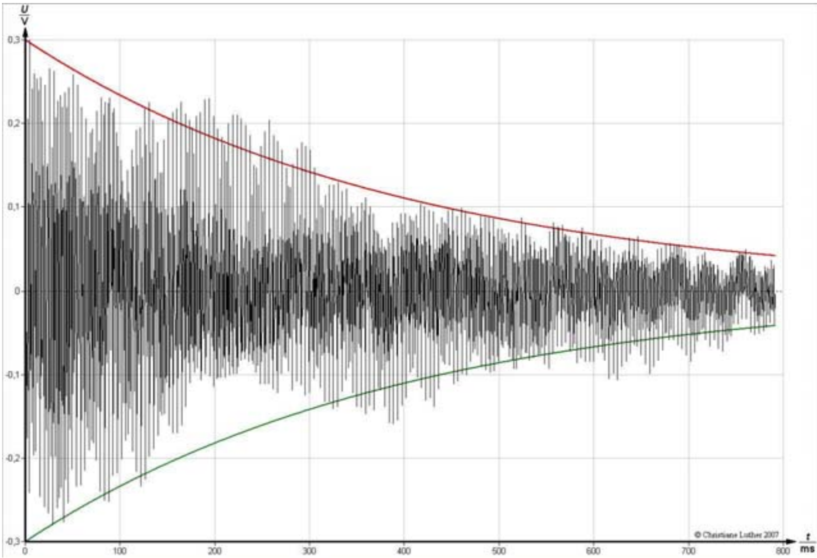
   $$L_p = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right) dB$$

2. Die Empfindlichkeit des verwendeten Mikrofons berechnet sich mit folgender Verhältnisgleichung:

   $$\frac{U}{p} = \frac{18V}{mbar}$$

3. Die Hörschwelle wird aus der Hörfläche abgelesen und liegt bei

f = *440 Hz* (Frequenz des Kammertons a) bei ca. 10 dB.



Bil
d 1: Reale Messung des Kammertons a mit angenäherter Amplitudenfunktion

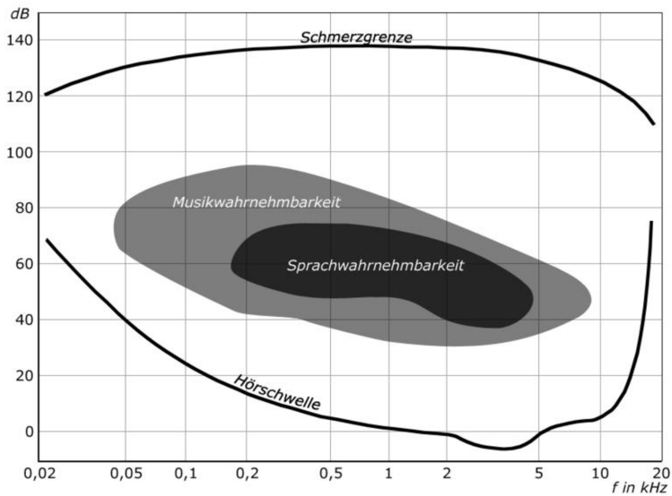


Bild 2: Hörfläche des Menschen /1/

Die folgenden Hinweise sind Anregungen für die Arbeit dxer Schülerinnen und Schüler. die vom Lehrer eingesetzt werden können

Ermittle die Funktionsgleichung $A(t) = A_0 \cdot e^{-\sigma \cdot t}$ **der positiven Amplitude!**

1. Berechne mit Hilfe der Empfindlichkeit des Mikrofons die Funktionsgleichung *p(t)* der Schalldruckamplitude!
2. Berechne daraus die Gleichung für den Schalldruckpegel!
3. Berechne die Zeit, für die der Schalldruckpegel größer als die Hörschwelle ist.

Lösung:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\sigma \cdot t}$$

$$A_0 = f(0) = 0{,}3mV$$

$$b = \frac{-\ln(A(t)) - \ln(A_0)}{t}$$

$$\underline{\rightarrow A(t) = 0{,}3mV \cdot e^{-0{,}0025 \cdot t}}$$

$$p(t) = \frac{A(t)}{18V} \cdot mbar$$

$$\underline{\rightarrow p(t) = \frac{1}{60000} mbar \cdot e^{-0{,}0025 \cdot t}}$$

$$L_p(t) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{p(t)}{p_0}\right) dB \underbrace{=}_{\substack{\textit{jetzt ohne Einheiten} \\ \textit{der Numeri!}}} 20 \cdot (\log_{10}(p(t)) - \log_{10}(p_0)) dB$$

$$L_p(t) = 20 \cdot \left(\frac{\ln(p(t))}{\ln 10} - \frac{\ln(p_0)}{\ln 10}\right) dB$$

$$L_p(t) = \frac{20}{\ln 10} \cdot \left(\ln(p(t)) - \ln(p_0)\right) dB$$

$$\ln(p(t)) = \ln\left(\frac{1}{60000} \cdot e^{-0,0025 \cdot t}\right)$$

$$\ln(p(t)) = -\ln(60000) + \ln\left(e^{-0,0025 \cdot t}\right)$$

$$\ln(p(t)) = -\ln(60000) - 0,0025t$$

$$L_p(t) = \frac{20}{\ln 10} \cdot \left(-\ln(60000) - 0,0025t - \ln p_0\right) dB$$

$$L_p(t) > 10 dB$$

$$10 dB < \frac{20}{\ln 10} \cdot \left(-\ln(60000) - 0,0025t - \ln p_0\right) dB$$

$$\frac{1}{2} \ln 10 < -\ln(60000) - 0,0025t - \ln p_0$$

$$0,0025t < -\ln(60000) - \ln p_0 - \frac{1}{2} \ln 10$$

$$t < -400\left(\ln(60000 \cdot \sqrt{10} \cdot p_0)\right)$$

$$\underline{\rightarrow t < 1308,6 ms \approx 1,3 s}$$

Der von der Saite erzeugte Ton ist ungefähr 1,3 s zu hören.

Problemstellung unter fächerübergreifenden Aspekten

Wie oerwähnt, kann die Aufgabe in der **Sekundarstufe II** auch als Ausblick auf **Differentialgleichungen** genutzt werden. Den Schülern kann vermittelt werden, wie Differentialgleichungen gelöst werden können oder sie können sich mit Hilfe des Internets oder anderer Quellen selbst Lösungsmöglichkeiten erarbeiten.

In Abstimmung mit dem Unterricht im Fach Physik können Eigenschaften von Schwingungen und Wellen diskutiert werden. Begriffe wie **„stehende Welle“** und **„Obertöne“** (Töne, die bei einer stehenden Welle aus ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz enstehen), können hier erklärt werden.

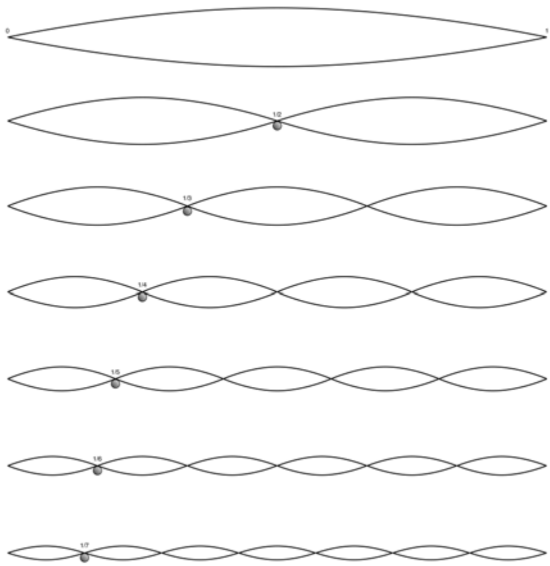


Bild 3: Obertöne einer Saite /1/

Desweiteren können auch Messungenauigkeiten diskutiert werden. Dabei ist **Messfehler** einzugehen.

Das Mikrofon eine Art **„Hintergrundschwingung“:**

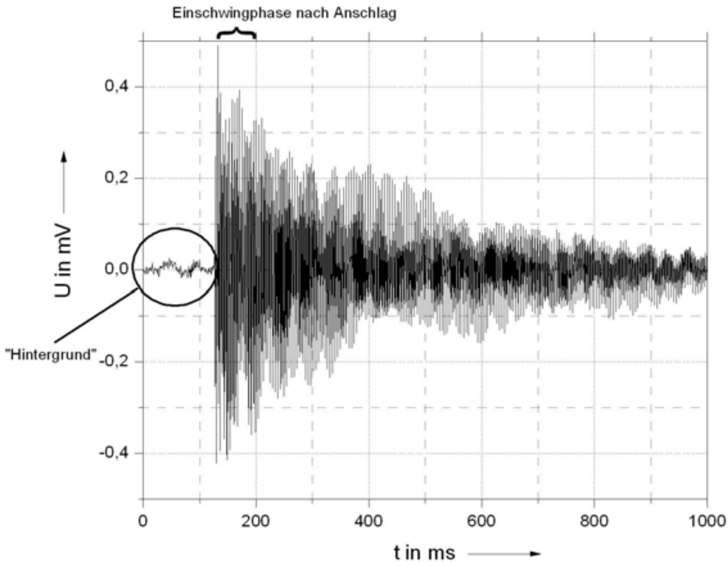


Bild 4: Originalmessung der Saitenschwingung

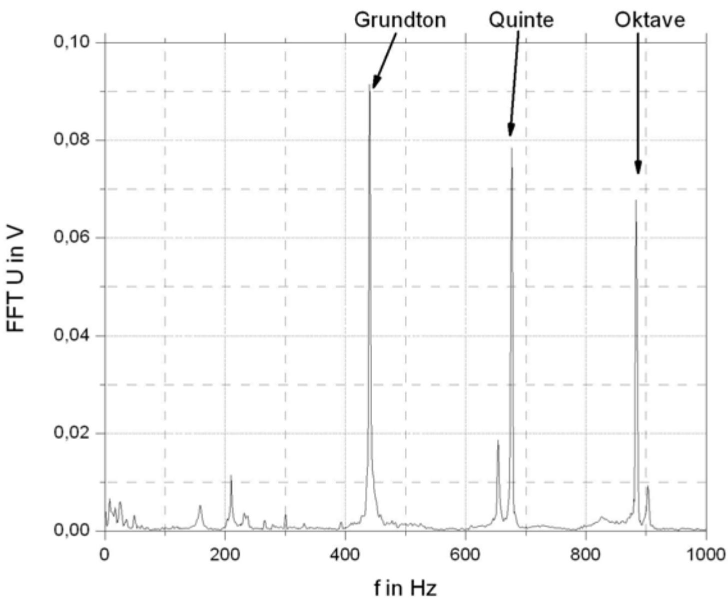


Bild 5: Grund- und Obertöne der Messung (fast Fourier transform)

Unterstützt durch den Unterricht im Fach Biologie kann auf den **Aufbau und die Funktionsweise** des Ohrs eingegangen werden.

Anregungen findet man unter:

http://www.medizin.uni-koeln.de/kliniken/hno/web/index.php?s=sp&ss=ohr&l=de

http://141.64.14.97/infos/index.php/Innenohr

http://www.lindacher.de/pages/das-ohr/das-innenohr.php

http://www.wissenschaft.de/wissenschaft/news/262610.html

Im Fach *Musik* kann die Anwendung der **Obertöne** („Obertonreihe“) diskutiert werden. Sie sind für jedes Instrument charakteristisch und machen sie von ihrem Klang her unterscheidbar. Dazu können auch weitere Messungen durchgeführt und die auftretenden Frequenzen betrachtet werden. Betrachtungen **Harmonie** („Harmonielehre“) können sich anschließen.

Im Fach Techni*k* kann man auf die Funktionsprinzip des Mikrofons eingehen und Messungen mit Mikrofonen durchführen..

Literatur

/1/ www.wikipedia.de „Hörfläche“, „Oberton“

/2/ Mikrofon-Empfindlichkeit:

http://www.ld-online.de/phk/a.asp?a=58626&L=1

Druckluft als Lebensversicherung

Sabine Schulze, Ulf Hoffmann

Vorbemerkungen

Alle Schüler sind im Alltag schon einmal mit verschiedenen Bremssystemen in Berührung gekommen. Nur wenige haben sich aber schon einmal Gedanken über die Funktionsweise von Bremssystemen gemacht. So wirkt das Bremsen mit Druckluft auch den ersten Blick schon ungewöhnlich und bietet damit einen interessanten Ansatzpunkt für eine Mathematikaufgabe. Mit dieser mathematischen Aufgabe, in der gleichzeitig technische und physikalische Aspekte enthalten sind, soll gezeigt werden, wie „praxisnah“ die Mathematik sein kann.

Die Einsatzmöglichkeiten der Aufgabe sind vielfältig. Die Aufgabe kann in den Klassenstufen 9 und 10 eingesetzt werden, wenn die nötigen Vorkenntnisse, wie Lineare Gleichungssysteme, Logarithmus oder Exponentialfunktionen zur Verfügung stehen. Die für die Lösung benötigten physikalischen Kenntnisse sollten in diesen Klassenstufen verfügbar sein. Der Einsatz der Aufgabe ist aber auch innerhalb der Behandlung der Analysis in der Sekundarstufe II, hier z.B. bei der Behandlung von Extremwertproblemen möglich.

Aufgabenstellung

Teil 1:

E*in Anhänger mit der Masse von 20 t steht angebremst, jedoch nicht mit Bremskeilen gesichert, auf einem Hang mit 7 % Neigung.*

Zuvor wurde der Druckabfall im Kessel wie folgt gemessen:

t in min	0	10	20	30	40	50	60	70
p in bar	8	7,7	7,41	7,13	6,86	6,6	6,36	6,12

Die Bremskraft bei 8 bar beträgt 30 kN.

Wann rollt der Anhänger los?

Teil 2:

N*un ist der Fahrer mit seinem Anhänger wieder unterwegs. Kurz vor dem Losfahren wird der Druckbehälter der Bremsen beschädigt und hat somit ein Leck. Der Kompressor pumpt weiterhin Luft in den Tank, dessen Ausgangsdruck 8 bar beträgt.*

Die Funktion, die die Differenz zwischen dem Ausgangsdruck und dem aktuellen Druck im Tank beschreibt, lässt sich durch ein logistisches Wachstum beschreiben. Dies entspricht dem folgenden Funktionstyp:

$$f(t) = \frac{G}{1 + b \cdot e^{-Gkt}}$$

Dabei ist G das Sättigungsniveau, das dem Ausgangsdruck von 8 bar entspricht.

Weiterhin ist bekannt, dass die Differenz zwischen dem Ausgangsdruck und dem aktuellen Druck bei Fahrantritt bereits 0,1 bar und 15 Minuten nach Fahrantritt 3,75 bar beträgt. Zur Absicherung des Fahrers kommt es bei einem Tankdruck von 5 bar zum Aufleuchten einer Warnanzeige. Bei einem Tankdruck von 3 bar kommt es zum Blockieren des Anhängers.

Wie viel Zeit ist nach Fahrantritt vergangen, bis es zum Aufleuchten der Warnanzeige kommt?

Wie lange kann der Fahrer dann noch weiter fahren, bis es zum Blockieren des Anhängers kommt?

Stelle den Tankdruck in Abhängigkeit von der Zeit seit dem Fahrantritt grafisch dar!

Wann wird die Druckabfallgeschwindigkeit maximal?

Die Bedeutung der Problembearbeitung nleigt im Folgenden:

• Schüler erhalten eine Einblick in die Funktionsweise von Bremssystemen

• Schüler müssen ggf. die Informationsbeschaffung zum Thema selbst organisieren (z.B. Internet, Literatur, ...)

• Schüler schulen ihr Verständnis von technischen Zusammenhängen

• Schüler müssen ihr fächerübergreifendes Wissen zur Lösung der Aufgaben einsetzen

• Schüler sollen zur Nutzung von neuen Medien im MU ermuntert werden

Im Einzelnen geht es dabei um:

• Aufstellen von Funktionsgleichungen unterschiedlicher Typen an Hand gegebener Werte

• Schüler müssen bereits erworbenes Wissen über Exponentialfunktionen und den Logarithmus einsetzen bzw. erweitern dieses Wissen

• Schüler schulen ihr funktionales Verständnis

• Schüler nutzen bzw. erweitern ihre Kenntnisse über Tabellenkalkulation bzw. den GTR

• Schüler nutzen bereits erworbenes Wissen über Extremwertprobleme

Aufbau und Funktionsweise von Bremssystemen

Die Bremse ist ein technisches System zur Verzögerung der Bewegung eines Kraftfahrzeuges. Beim Bremsvorgang wird die Bewegungsenergie durch Reibung in Wärme umgewandelt.

Die üblichen Bauarten für Betriebsbremsen sind Trommelbremsen und Scheibenbremsen.

Eine Trommelbremse erkennt man an einer mit dem Rad verbundenen Trommel aus Gusseisen oder Stahl. Beim Bremsvorgang werden zwei sichelförmige Bremsbacken nach außen an die Innenseite der Trommel gedrückt. Die Vorteile sind die größeren Wartungsintervalle und der geringere Verschleiß.

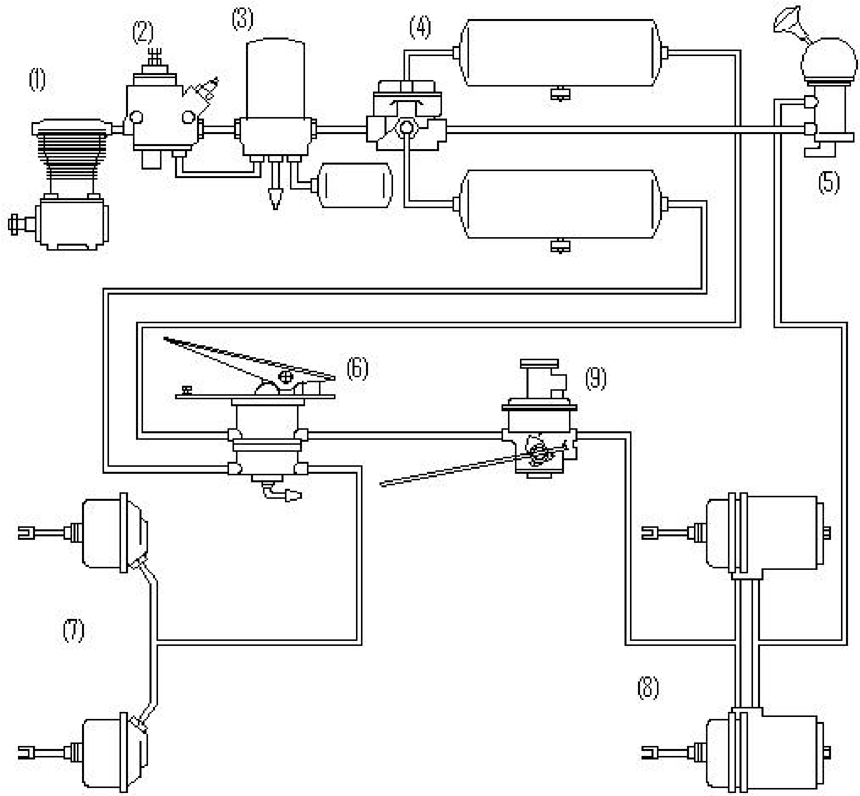
Eine Scheibenbremse weist eine mit dem Rad mitlaufende Bremsscheibe auf. An diese werden bei einer Verzögerung von beiden Seiten Bremsklötze oder Bremsbeläge gepresst, die im Bremssattel montiert sind. Durch die offene Bauweise kann die entstehende Wärme gut an die Umgebung abgeführt werden. Somit ist die Gefahr der Überhitzung und das damit verbundene Nachlassen der Bremswirkung (Fading) wesentlich kleiner als bei Trommelbremsen.

Betriebsbremsen werden über das Bremspedal mechanisch, hydraulisch oder pneumatisch betätigt.

Pneumatisch betätigte Bremsen werden durch mit Motorenergie erzeugte Druckluft betrieben. Diese kann durch Kolben- oder Membranzylinder besonders große Anpresskräfte erzeugen. Druckluftbremsen werden in mittleren bis schweren LKW verbaut, da man bei Ausfall des Antriebes des LKWs das Fahrzeug ohne Druckluftbremse nicht mehr unfallfrei zum Stehen bekommen könnte. Die komplette Betätigungskraft zum Auslösen des Bremsvorganges wird vom Bremssystem selber aufgebracht. Durch die Speicherung der Druckluft im

Behälter steht die Bremskraft auch nach einem eventuellen Ausfall des Motors noch zur Verfügung.

Die Druckluft wird über einen Kompressor, Lufttrockner, Druckregler und Vorratsbehälter erzeugt und gespeichert. Im folgenden Bild ist der schematische Aufbau einer Druckluftbremsanlage dargestellt.



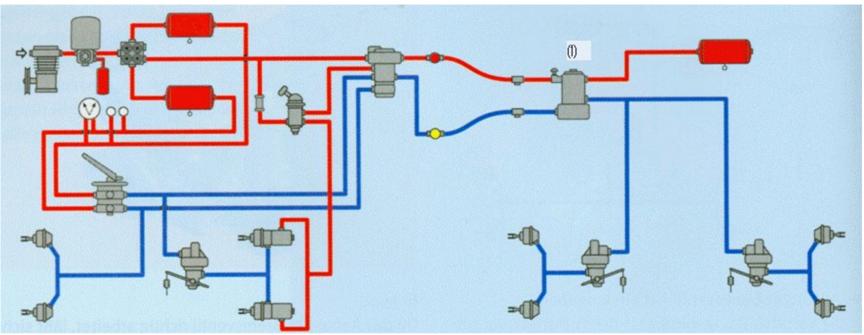
Schematische Darstellung einer Druckluftbremsanlage [2]

Links oben im Bild ist der Luftpresser (1) mit nachfolgenden Druckregler (2) und Lufttrockner (3) dargestellt. Die sich anschließenden Luftbehälter (4) werden im Betriebszustand auf 8 bar gefüllt. Beim Betätigen der Handbremse (5) oder Fußbremse (6) wird der Bremsvorgang ausgelöst, indem die Kolben der Druckluftbremszylinder ((7) Vorderachse, (8) Hinterachse) ausfahren und über einen Hebelmechanismus die Bremsbeläge gegen die Bremsscheibe bzw. die Bremsbacken gegen die Bremstrommel gedrückt werden. Da sich die Kraft auf die Hinterachse aus Gründen der Be- und Entladung stark ändert, ist es nötig die Bremskraft separat zu regulieren. Diese Aufgabe übernimmt der Automatisch - lastabhängige - Bremskraftregler (9), auch ALB genannt. Wäre die Bremskraft eines unbeladenen LKWs auf der Hinterachse zu groß, so würden die Räder auch bei kleinen Verzögerungen blockieren. Um die Fahrdynamik, vor allem beim Durchfahren von Kurven, zu erhöhen ist nicht nur ALB, sondern auch seit dem Jahre 1992, das Antiblockiersystem (ABS) gesetzlich vorgeschrieben.

Druckluftbremsanlagen finden auch bei LKW-Anhängern Anwendung. Früher wurden Anhänger mit der so genannten Auflaufbremse gebremst. Der Anhänger läuft beim Bremsvorgang auf das Zugfahrzeug auf. Die von der Massenträgheit des Anhängers resultierende Kraft wird von der Anhängerkupplung über einen Mechanischen Hebel auf die Bremsen übertragen. Besonders beim Befahren von Kurven verschlechtert dieses Bremsprinzip die Stabilität des Gespanns. Daher wird die zulässige Gesamtmasse des Anhängers gesetzlich auf 3,5 Tonnen beschränkt. Bis Höchstgeschwindigkeiten von 40 km/h, zum Beispiel in der Landwirtschaft, ist ein Anhängergewicht von 8 Tonnen erlaubt.

Aus diesen Gründen sind schwerere Anhänger mit einer Druckluftbremsanlage ausgestattet. Bei dieser durchgehenden Bremsanlage betätigt der Fahrer beim Verzögern zugleich die Bremse des Anhängers. Die Bremswirkung des Anhängers kann zeitlich etwas früher und stärker erfolgen, um zu vermeiden, dass der Zug in Kurven nicht einknickt.

Der moderne Stand der Technik ist die Zweileitungs-Druckluftbremsanlage.



Schematische Darstellung einer Zweikreisbremsanlage [1]

Hierbei führen zwei Druckluftleitungen von der Zugmaschine zum Anhänger. Um Verwechslungen zu vermeiden haben diese je einen gelben und einen roten Kupplungskopf. Die Vorratsleitung (rot) versorgt den Luftbehälter des Anhängers permanent mit Luft. Die Bremsleitung (gelb) steht nur dann unter Druck, wenn die Bremse betätigt wird. Dabei öffnet das Anhängerbremsventil (1) und die Luft aus dem Vorratsbehälter des Anhängers gelangt in die Bremszylinder.

Beim Bruch der Vorratsleitung (drucklos) öffnet ebenfalls das Anhängerbremsventil und der Anhänger löst eine Vollbremsung aus. Einen Bruch der Bremsleitung kann man beim Fahren nicht ohne weiteres Feststellen. Jedoch entweicht an dieser Bruchstelle Druckluft und es findet an der Vorratsleitung ein Druckabfall statt. Nun löst der Anhänger ebenfalls eine Vollbremsung aus.

Beim Abkuppeln von Anhängern ist darauf zu achten, dass der Anhänger angebremst ist. Das Wegrollen des Hängers kann mit Unterlegkeilen oder Ankurbeln der Feststellbremse geschehen. Vergisst man diese Sicherung, so hat dies vorerst keine weiteren Folgen. Beim Lösen der Schlauchverbindungen blockieren die Räder des Anhängers, da Druck vom Vorratsbehälter auf die Bremszylinder wirkt. Aus technischen Gründen verschwindet aber dieser Druck nach einiger Zeit, bedingt durch die nicht absolute Dichtheit des Systems. Bei ungenügendem Druck würde also der Anhänger losrollen.

Um diesem Risiko vorzubeugen sind moderne Anhänger mit Federspeichersystemen ausgerüstet, die diesen im drucklosen Zustand anbremsen. Auf deren Funktionstüchtigkeit darf sich jedoch nicht verlassen werden.

Man kann von folgenden **mathematischen und physikalischen** Grundlagen ausgehen:

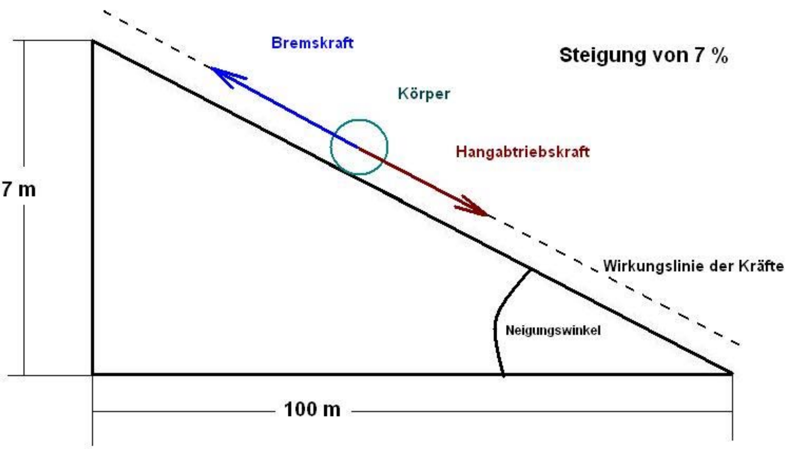
Bei dem **logistischen Wachstum** handelt es sich um ein mathematisches Modell, mit dem versucht wird, in der Natur vorkommende Wachstumsvorgänge zu beschreiben. Diese Wachstumsvorgänge verlaufen nur bis zu einem bestimmten Sättigungsniveau G. Der Zuwachs ist hierbei direkt proportional zum momentanen Bestand und zu dem verfügbaren Rest bis zum Sättigungsniveau G.

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (G - f(t))$$

Zur Lösung des ersten Teils der Aufgabe sind fundamentale Kenntnisse über die geneigte Ebene erforderlich. Befindet sich ein Körper auf einer geneigten Ebene, so wirkt auch den Körper die **Hangabtriebskraft** F_H, die am Körperschwerpunkt angreift und parallel zum Hang wirkt. Der Körper befindet sich in Ruhe, wenn eine betragsmäßig gleichgroße Kraft entlang der gleichen Wirkungslinie wie F_H in entgegen gesetzter Richtung wirkt. Dabei handelt es sich um die Bremskraft F_B (die auch geg. F_H wirkende **Haftreibungskraft** des Körpers wird vernachlässigt). Wird die Bremskraft durch den zunehmenden Druckverlust nun kleiner, tritt irgendwann der Fall ein, dass $F_B < F_H$. In diesem Fall kann die Hangabtriebskraft durch die Bremskraft nicht mehr vollständig kompensiert werden und der Körper bewegt sich den Hang hinab. Die Hangabtriebskraft lässt sich nach der folgenden Formel berechnen:

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

Dabei ist $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ die Fallbeschleunigung auf der Erde. Der Neigungswinkel α lässt sich aus der Angabe der Steigungsprozente des Hanges berechnen. Bei einer Steigung von 7 % ergibt sich auf einer horizontalen Strecke von 100 m ein Höhenunterschied von 7 m.



Zuletzt soll noch die physikalische Größe des Drucks näher erläutert werden. Der **Druck** ist nach der folgenden Formel definiert:

$$Druck = \frac{Kraft}{Fläche} \quad bzw. \quad p = \frac{F}{A}$$

Da sich die im Bremssystem befindliche Fläche (Bremsbacken), auf die die Bremskraft wirkt, nicht verändert, handelt es sich um einen linearen Zusammenhang zwischen dem Druck und der Bremskraft.

Lösung zum Teil 1

Zunächst soll die Funktionsgleichung p(t) gefunden werden, die den Druck in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Aus der Physik ist eine exponentielle Abnahme bekannt:

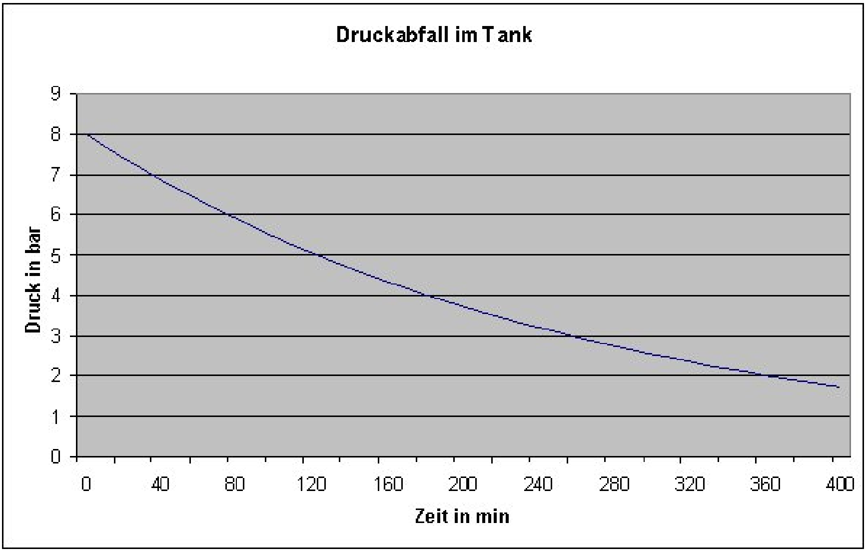
$$p(t) = p_0 \cdot a^t$$

Der Anfangsdruck ist in der Aufgabe mit 8 bar gegeben. Nun muss der Wachstumskoeffizient a gefunden werden. Diesen ermittelt man aus der Wertetabelle:

$$\frac{f(10)}{f(0)} = \frac{7{,}7}{8} = 0{,}9625$$

Somit lautet die Funktionsgleichung:

$$p(t) = 8 * 0{,}9625^t$$



Es gilt:

$$p = \frac{F}{A}$$

Der Zusammenhang zwischen Druck und Bremskraft ist linear, somit gilt für die Bremskraft:

$$F_B(t) = F_0 \cdot 0{,}9625^t$$

F_0 ist mit 30 kN gegeben.

Damit der Anhänger losrollt, muss die Bremskraft kleiner als die Hangabtriebskraft sein. (Haftreibung ausgeschlossen.) Der Grenzfall ergibt sich also, wenn beide Kräfte gleich sind.

$$F_B = F_H$$

Für die Hangabtriebskraft gilt.

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

mit $\tan\alpha = \dfrac{7}{100}$

$$\alpha = 4°$$

$$F_H = 20000kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot \sin 4°$$

$$F_H = 13686{,}2 \quad N$$

Also gilt nun für das Losrollen:

$$13686{,}6 \quad N = 30000 \quad N \cdot 0{,}9625^t$$

$$\frac{13686{,}2 \quad N}{30000 \quad N} = 0{,}9625^t$$

$$\ln 0{,}4562 = (\ln 0{,}9625) \cdot t$$

$$t = \frac{\ln 0{,}4562}{\ln 0{,}9625}$$

$$t = 20{,}53 \quad ZE$$

ZE bedeutet Zeiteinheiten. In der Tabelle sind die Zeiten in 10er Schritten angeordnet. Die Zeit beträgt also 205,3 Minuten. Der Anhänger rollt somit in 3 Stunden und 25,5 Minuten los.

Lösung zum Teil 2::

Der erste Schritt bei der Bearbeitung der Aufgabe ist das Aufstellen der Funktionsgleichung f(t), die die Differenz zwischen Ausgangsdruck und Tankdruck in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Bei der Zeit handelt es sich um die Zeit nach Fahrantritt. Somit liegt bei t = 0 min der Fahrantritt vor. Zum Aufstellen der Funktionsgleichung müssen die gegebenen Größen in die allgemeine Funktionsgleichung des logistischen Wachstums eingesetzt werden. Gegeben sind das Sättigungsniveau G mit 8 bar, sowie die Werte der Differenz zwischen Ausgangsdruck und Tankdruck bei den Zeiten von t = 0 min und t = 15 min. Also:

Gegebene Werte:

- G = 8 bar
- f (t = 0) = 0,1 bar
- f (t = 15) = 3,75 bar

Setzt man den Wert für das Sättigungsniveau und die beiden anderen Bedingungen in den gegebenen Funktionstyp ein, ergibt sich ein Gleichungssystem bestehend aus zwei Gleichungen mit jeweils zwei Unbekannten b und k.

$$0{,}1 = \frac{8}{1 + b \cdot e^{-8k \cdot 0}}$$

$$3{,}75 = \frac{8}{1 + b \cdot e^{-8k \cdot 15}}$$

Durch Vereinfachen und Umstellen beider Gleichungen erhält man:

$$1 + b = 80 \quad \Rightarrow \quad b = 79$$

$$1 + b \cdot e^{-120k} = \frac{800}{375}$$

Setzt man b in die zweite Gleichung ein und stellt man diese Gleichung weiter um, so ergibt sich:

$$e^{-120k} = \frac{17}{1185}$$

Mit Hilfe des Logarithmus ergibt sich:

$$-120k = \ln\left(\frac{17}{1185}\right)$$

Durch Umstellen erhält man schließlich den folgenden Wert für k:

$$k=\frac{\ln\left(\frac{17}{1185}\right)}{-120}=0{,}03537$$

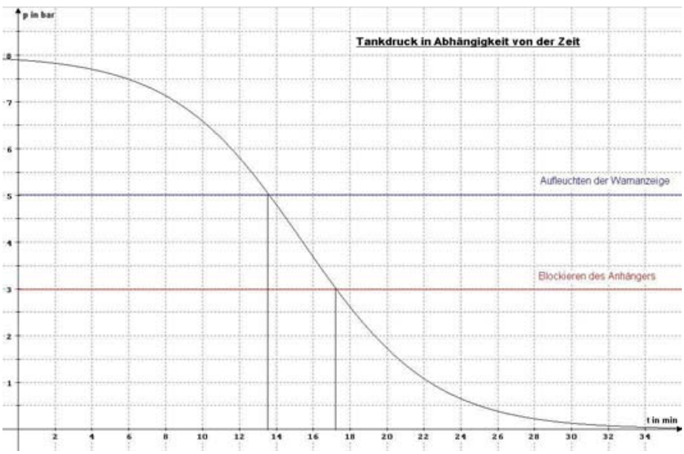
Abschließend lässt sich jetzt die Funktion, die die Differenz zwischen dem Ausgangstankdruck und dem aktuellen Tankdruck beschreibt, angeben:

$$f(t)=p_0-p(t)=\frac{8}{1+79\cdot e^{-0{,}03537\cdot 8\cdot t}}$$

Zur Beantwortung der gestellten Fragen wird die Funktion p(t), die den aktuellen Tankdruck beschreibt, benötigt. Diese lässt durch Umstellen der vorigen Gleichung ermitteln:

$$p(t)=8-\frac{8}{1+79\cdot e^{-0{,}03537\cdot 8\cdot t}}$$

Die in der Aufgabenstellung verlangte grafische Darstellung des Tankdruckes in Abhängigkeit von der Zeit seit Fahrantritt kann an dieser Stelle erfolgen. Das Zeichnen des Graphen p(t) an dieser Stelle eröffnet die Möglichkeit, weitere Aufgabenteile grafisch zu lösen. Durch das Einzeichnen der Funktionen $p_1(t) = 5$ bar bzw. $p_2(t) = 3$ bar lassen sich durch Schnittpunktermittlung die Zeiten, bei denen es zum Aufleuchten der Warnanzeige bzw. zum Blockieren des Anhängers kommt, ablesen. Grafisch dargestellt sieht das Ganze wie folgt aus:



Die Ergebnisse der grafischen Lösung sind jedoch aufgrund von Ungenauigkeiten beim Zeichnen mit Fehlern behaftet. Eine genauere Lösung ergibt sich beim rechnerischen Lösen.

Aus der Bedingung p(t) = 5 lässt sich durch Umstellen die Zeit ermitteln, bei der es zum Aufleuchten der Warnanzeige kommt:

$$5 = 8 - \frac{8}{1 + 79 \cdot e^{-0{,}03537 \cdot 8 \cdot t}} \quad \Rightarrow \quad e^{-0{,}28296 \cdot t} = \frac{5}{237}$$

Mit Hilfe des Logarithmus erhält man:

$$-0{,}28296 \cdot t = \ln\left(\frac{5}{237}\right)$$

Durch Umstellen ergibt sich die folgende Lösung:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{5}{237}\right)}{-0{,}28296} = 13{,}64$$

Es kommt somit nach 13,64 min bzw. nach 13 min 38,4 s zum Aufleuchten der Warnanzeige.

Die Berechung der Zeit bis zum Blockieren des Anhängers ergibt sich analog zu der vorigen Rechung wie folgt:

$$3 = 8 - \frac{8}{1 + 79 \cdot e^{-0{,}03537 \cdot 8 \cdot t}} \Rightarrow e^{-0{,}28296 \cdot t} = \frac{3}{395}$$

Wiederum ergibt sich durch die Benutzung des Logarithmus der folgende Zusammenhang:

$$-0{,}28296 \cdot t = \ln\left(\frac{3}{395}\right)$$

Stellt man diese Gleichung nach t um, so erhält man:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{3}{395}\right)}{-0{,}28296} = 17{,}25$$

Das Blockieren des Anhängers erfolgt somit nach 17,25 min bzw. nach 17 min 15 s. Die Zeit, die dem Fahrer nach Aufleuchten der Warnanzeige bis zum Blockieren des Anhängers bleibt, ergibt sich aus der Differenz der beiden Zeiten:

$$t_{verbl} = 17{,}25 - 13{,}64 = 3{,}61$$

Dem Fahrer bleiben zum Weiterfahren 3,61 min bzw. 3 min 36,6 s.

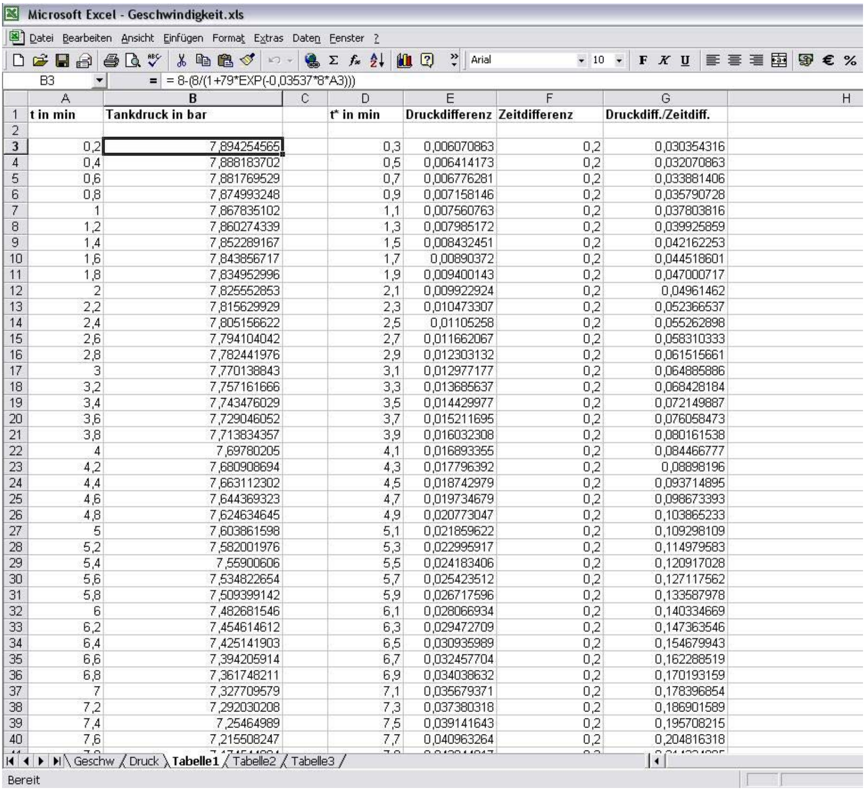
Für die Berechnung des Zeitpunktes, an dem die **Druckabfallgeschwindigkeit** maximal ist ergeben sich mehrere Möglichkeiten. Zum einen lässt sich diese Aufgabe in der Sekundarstufe I z.B. mit Hilfe einer **Tabellenkalkulation** lösen. Zum anderen handelt es sich um ein **Extremwertproblem**, das in der Sekundarstufe II mit Hilfe der Differentialrechnung gelöst werden kann. Im folgenden Abschnitt werden beide Lösungen vorgestellt.

Zunächst wird die Lösung, die mit den Mitteln der **Sekundarstufe I** erstellt wurde, vorgestellt. Bevor die Druckabfallgeschwindigkeit berechnet werden kann, muss zunächst der Begriff geklärt werden. Die Druckabfallgeschwindigkeit entspricht der Druckverringerung pro Zeiteinheit. Also:

$$Druckabfallgeschwindigkeit = \frac{Druckverringerung}{Zeit} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}$$

Genau gesehen handelt es sich nicht um eine Momentangeschwindigkeit, sondern um die Durchschnittsgeschwindigkeit innerhalb des betrachteten Intervalls. Für ausreichend kleine Zeitintervalle nähert sich diese Durchschnittsgeschwindigkeit der Momentangeschwindigkeit an. Somit lässt sich bei ausreichend kleinen Zeitintervallen die Druckabfallgeschwindigkeit näherungsweise ermitteln. Zur Berechnung können Tabellenkalkulationen, Grafikrechner etc. benutzt werden. Die hier vorgestellte Lösung wurde mit EXEL erstellt. Die Größe des Zeitintervalls wurde mit 0,2 min gewählt. Diese kann – wenn eine höhere Genauigkeit erwünscht ist – jedoch noch verkleinert werden. Zunächst muss der Tankdruck für die einzelnen Zeiten berechnet werden. Dazu werden in die erste Spalte die Zeiten von 0 beginnend im Intervall von 0,2 min eingetragen (nach einigen Einträgen lässt sich die Zelle automatisch auffüllen). In der nächsten Spalte wird der zu dieser Zeit herrschende Tankdruck eingetragen. Dies lässt sich am besten realisieren, indem man die bereits bekannte Formel für den Tankdruck p(t) in die obere Zelle einträgt (für die Zeit t wird jetzt die entspr. Zelle eingetragen) und die Spalte wiederum nach unten hin auffüllt. Nun kann die Druckabfallgeschwindigkeit nach der oben angegebenen Formel berechnet werden. Für die spätere grafische Darstellung ist es sinnvoll zusätzlich noch die Mitte des jeweiligen Zeitintervalls t* zu berechnen. Diese ergibt sich nach der folgenden Formel: $t^* = t_1 + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$.

Stellt man nun $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ über t^* grafisch dar, so erhält man den Funktionsverlauf der Druckabfallgeschwindigkeit über der Zeit. Das Tabellenblatt könnte wie folgt aussehen:


Microsoft Excel - Geschwindigkeit.xls

B3 = =8-(8/(1+79*EXP(-0,03537*8*A3)))

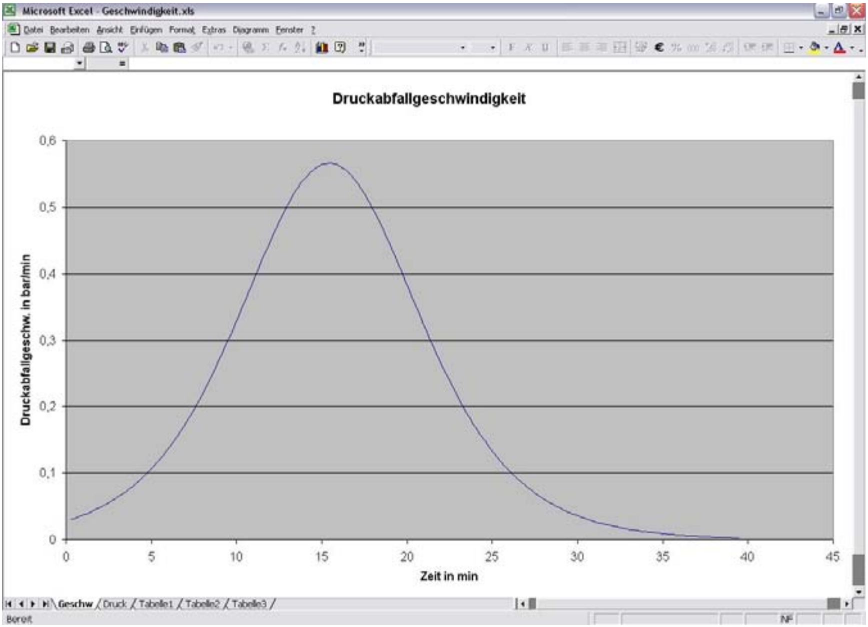
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t in min	Tankdruck in bar		t* in min	Druckdifferenz	Zeitdifferenz	Druckdiff./Zeitdiff.	
2								
3	0,2	7,894254565		0,3	0,006070863	0,2	0,030354316	
4	0,4	7,888183702		0,5	0,006414173	0,2	0,032070863	
5	0,6	7,881769529		0,7	0,006776281	0,2	0,033881406	
6	0,8	7,874993248		0,9	0,007158146	0,2	0,035790728	
7	1	7,867835102		1,1	0,007560763	0,2	0,037803816	
8	1,2	7,860274339		1,3	0,007985172	0,2	0,039925859	
9	1,4	7,852289167		1,5	0,008432451	0,2	0,042162253	
10	1,6	7,843856717		1,7	0,00890372	0,2	0,044518601	
11	1,8	7,834952996		1,9	0,009400143	0,2	0,047000717	
12	2	7,825552853		2,1	0,009922924	0,2	0,04961462	
13	2,2	7,815629929		2,3	0,010473307	0,2	0,052366537	
14	2,4	7,805156622		2,5	0,01105258	0,2	0,055262898	
15	2,6	7,794104042		2,7	0,011662067	0,2	0,058310333	
16	2,8	7,782441976		2,9	0,012303132	0,2	0,061515661	
17	3	7,770138843		3,1	0,012977177	0,2	0,064885886	
18	3,2	7,757161666		3,3	0,013685637	0,2	0,068428184	
19	3,4	7,743476029		3,5	0,014429977	0,2	0,072149887	
20	3,6	7,729046052		3,7	0,015211695	0,2	0,076058473	
21	3,8	7,713834357		3,9	0,016032308	0,2	0,080161538	
22	4	7,69780205		4,1	0,016893355	0,2	0,084466777	
23	4,2	7,680908694		4,3	0,017796392	0,2	0,08898196	
24	4,4	7,663112302		4,5	0,018742979	0,2	0,093714895	
25	4,6	7,644369323		4,7	0,019734679	0,2	0,098673393	
26	4,8	7,624634645		4,9	0,020773047	0,2	0,103865233	
27	5	7,603861598		5,1	0,021859622	0,2	0,109298109	
28	5,2	7,582001976		5,3	0,022995917	0,2	0,114979583	
29	5,4	7,55900606		5,5	0,024183406	0,2	0,120917028	
30	5,6	7,534822654		5,7	0,025423512	0,2	0,127117562	
31	5,8	7,509399142		5,9	0,026717596	0,2	0,133587978	
32	6	7,482681546		6,1	0,028066934	0,2	0,140334669	
33	6,2	7,454614612		6,3	0,029472709	0,2	0,147363546	
34	6,4	7,425141903		6,5	0,030935989	0,2	0,154679943	
35	6,6	7,394205914		6,7	0,032457704	0,2	0,162288519	
36	6,8	7,361748211		6,9	0,034038632	0,2	0,170193159	
37	7	7,327709579		7,1	0,035679371	0,2	0,178396854	
38	7,2	7,292030208		7,3	0,037380318	0,2	0,186901589	
39	7,4	7,25464989		7,5	0,039141643	0,2	0,195708215	
40	7,6	7,215508247		7,7	0,040963264	0,2	0,204816318	

Geschw / Druck / Tabelle1 / Tabelle2 / Tabelle3

Bereit

Markiert man die Spalten, die t* und die Druckabfallgeschwindigkeit enthalten, so lässt mit einem Klick auf den Diagramm-Assistenten (siehe Symbolleiste) der Funktionsverlauf der Druckabfallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der

Zeit darstellen. Zu den oben berechneten Werten ergibt sich dann der folgende Funktionsverlauf:



Nun lässt sich der Zeitpunkt, an dem die Druckabfallgeschwindigkeit maximal ist, ablesen. Somit wird die Druckabfallgeschwindigkeit ca. 15,5 min nach Fahrantritt maximal.

Die **Genauigkeit** des Ergebnisses lässt sich verbessern, wenn man die Aufgabe als Extremwertproblem löst. Dies kann erst in der **Sekundarstufe II** geschehen, wenn die Differentialrechnung zu Verfügung steht.

Die Berechnung des Zeitpunktes, an dem die Druckabfallgeschwindigkeit maximal wird, stellt ein Extremwertproblem dar. Zunächst muss ein analytischer Ausdruck der Druckabfallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt werden. Anhand der bereits gemachten Überlegungen wird deutlich, dass der Ausdruck $\frac{dp}{dt}$ die Druckabfallgeschwindigkeit darstellt. Hierbei handelt es sich um die momentane zeitliche Änderung des Druckes bzw. um die 1. Ableitung der Funktion des Tankdruckes p(t). Die Funktion p(t), die den Tankdruck in Abhängigkeit von der Zeit angibt, wurde bereits in den vorigen Aufgabenteilen ermittelt. Es handelt sich um die folgende Funktion:

$$p(t) = 8 - \frac{8}{1 + 79 \cdot e^{-0,28296 \cdot t}} = 8 - \frac{8}{1 + b \cdot e^{-a \cdot t}} \text{ mit a = 0,28296 und b = 79}$$

Leitet man diese Funktion mittels der Kettenregel nach der Zeit ab, so ergibt sich die Druckabfallgeschwindigkeit. Diese ist, da es sich um eine Druckverminderung handelt, negativ. Für die korrekte Lösung der Aufgabe ist es wichtig nur den Geschwindigkeitsbetrag zu betrachten, sonst würde sich statt eines Maximums ein Minimum ergeben. Für den Betrag der Druckabfallgeschwindigkeit ergibt sich dann:

$$v(t) = \left| \frac{dp}{dt} \right| = \frac{8ab \cdot e^{-at}}{(1 + b \cdot e^{-at})^2}$$

Zur Ermittlung des Maximums dieser Funktion v(t), muss die 1. Ableitung der Funktion gleich null gesetzt werden. Dafür muss die 1. Ableitung von v(t) nach der Zeit mittels der Quotientenregel berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{8a^2b^2e^{-2at} - 8a^2b\,e^{-at}}{(1 + b\,e^{-at})^3}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich null, so genügt es zu betrachten, wann der Zähler null wird. Weiterhin muss für die ermittelten Werte sicher gestellt werden, dass der Nenner ungleich null wird. Setzt man den Zähler gleich null, so ergibt sich:

$$-8a^2b\,e^{-at} + 8a^2b^2\,e^{-2at} = 0$$

Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, wie man an Hand der Substitution $K = e^{-at}$ erkennen kann. Durch Substituieren erhält man:

$$8a^2b^2K^2 - 8a^2bK = 0 \quad bzw. \quad K^2 - \frac{1}{b}K = 0$$

Mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergeben sich zwei Lösungen K_1 *und* K_2:

$$K_{1/2} = \frac{1}{2 \cdot 79} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 79}\right)^2} \quad also: \; K_1 = 0{,}012658227 \; und \; K_2 = 0$$

Beim Rücksubstituieren fällt auf, dass die zweite Lösung entfällt, da $e^{-at} \neq 0$ gilt. Für die erste Lösung gilt:

$$e^{-at} = e^{-0,28296 \cdot t} = 0,012658227$$

Durch Anwenden des Logarithmus und Umstellen ergibt sich die folgende Lösung für t:

$$t = \frac{\ln 0,012658227}{-0,28296} \approx 15,44 \text{ min}$$

Wie oben bereits erwähnt, muss für dieses Ergebnis noch überprüft werden, ob der Nenner ungleich null wird. Setzt man dieses Ergebnis in den Nenner ein, so ergibt sich ungefähr 8,01, was ungleich null ist. Der letzte Schritt besteht darin, die hinreichende Bedingung für einen Extremwert zu überprüfen. Für ein Maximum muss in diesem Fall gelten:

$$\frac{d^2v}{dt^2}(15,44) < 0$$

Alternativ könnte man, um sich das Bilden einer weiteren Ableitung zu ersparen, einen Vorzeichenwechsel von $\frac{dv}{dt}$ in der Nähe von $t = 15,44$ untersuchen. Dies ist in dem Fall die schnellere Variante. Es ergeben sich folgende Werte:

$$\frac{dv}{dt}(15,3) = 0,0032 \quad und \quad \frac{dv}{dt}(15,5) = -0,0013$$

Der Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus zeigt, dass es sich um ein Maximum handelt.

Als Ergebnis lässt sich formulieren, dass die maximale Druckabfallgeschwindigkeit bei einer Zeit von 15,44 min erreicht ist.

Literatur

[1] Hergl, W. (2002): LKW fahren – Das neue Lehrbuch. Degener Verlag Hannover

[2] http://www.kfz-tech.de/PneumatischeBremse.htm

Die PKW-Karawane rollt oder Stau ohne Ende ?

Vera Reinhard

Wozu braucht man die Funktionsanpassung?

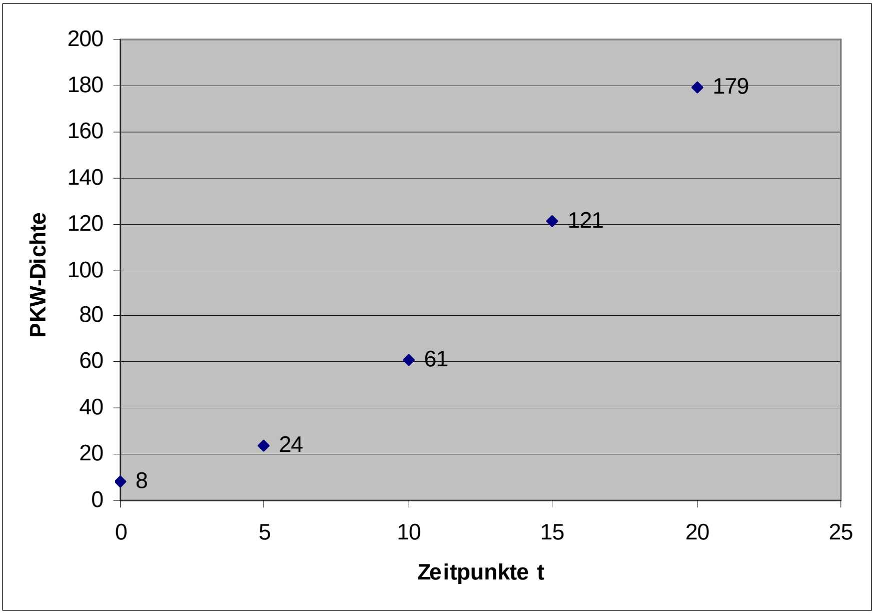
Am Anfang vieler mathematischer Aufgaben steht ein Problem. In diesem Fall besteht das Problem darin, dass Wertepaare gegeben sind und keine zugehörige Funktion, die die Wertepaare beschreibt, vorhanden ist. Die Wertepaare können aus Beobachtungen oder auch Experimenten resultieren, die von den SchülerInnen gemacht wurden. Es stellt sich nun die Aufgabe, eine geeignete Funktion zu ermitteln, mit der es ermöglicht werden soll, Prognosen zu erstellen. Nachdem man sich einen Überblick über die verschiedenen Wachstumsprozesse mit den zugehörigen Graphiken und mathematischen Formeln - linear, quadratisch, exponentiell, beschränkt, logistisch, ungeordnet etc. - verschafft hat, muss eine Auswahl an möglichen Kandidaten für den vorliegenden Wachstumsprozess getroffen und eine Prüfung dieser vorgenommen werden. An einem Beispiel soll das konkrete Vorgehen bei einer Funktionsanpassung in den folgenden Abschnitten näher erläutert werden.

PKW-Dichte in Deutschland

In den siebziger Jahren wurde die untenstehende Tabelle zur PKW-Dichte (d.h. Anzahl der PKW je 1000 Einwohner) in Deutschland veröffentlicht:

Jahr	**1950**	**1955**	**1960**	**1965**	**1970**
t	0	5	10	15	20
PKW-Dichte	8	24	61	121	179

Die Variable t wird in dieser Aufgabe sinnvoll gewählt, indem das Jahr 1950 als Zeitpunkt $t = 0$ festgelegt wird. Sie vereinfacht die späteren Rechnungen, jedoch können auch die ursprünglichen Jahreszahlen in den Berechnungen verwendet werden. Nachdem eine sinnvolle Einheit festgelegt wurde, werden nun die Wertepaare in ein Koordinatensystem eingetragen um die möglichen Wachstumsmodelle besser ermitteln zu können.



Durch den kurvenförmigen Verlauf lassen sich nun drei mögliche Kandidaten ermitteln: exponentielles Wachstum, beschränktes Wachstum oder logistisches Wachstum. Der weitere Verlauf der Unterrichtseinheit kann nun vielfältig gestaltet werden: Zum einen können die SchülerInnen selbstständig die drei Modelle überprüfen und zum anderen können ihnen Hilfestellungen, wie die folgenden Arbeitsaufträge gegeben werden:

- Ein exponentielles Wachstum wird angenommen.

  Führen Sie eine Funktionsanpassung durch!
- Ein begrenzter Wachstumsprozess wird angenommen. Im Jahre 1970 wird eine Sättigungsgrenze S=300 vorhergesagt.

  Führen Sie eine Funktionsanpassung durch!
- Ein logistisches Wachstum wird im Folgenden angenommen. Die Sättigungsgrenze S=300 liegt auch hier zu Grunde.

  Führen Sie eine Funktionsanpassung durch!
- Vergleichen Sie ihre Ergebnisse der zuvor untersuchten Modelle!
- Im Jahre 1995 beträgt die PKW-Dichte 494. Wird dieser Wert durch die Modelle, insbesondere durch das favorisierte Modell korrekt beschrieben?

  Erstellen Sie eine Prognose für das Jahr 2015!

Bei der Bearbeitung der **Arbeitsaufträge** können die Schülerinnen und Schüler unterschiedlich vorgehen. Die erste Möglichkeit besteht darin, die Aufgaben selbst zu berechnen, Prognosen zu erstellen und die Ergebnisse mit Hilfe einer Folie und einem OHP den MitschülerInnen vorzustellen. Alternativ können sie jedoch auch Programme wie Excel nutzen um eine Lösung für das gegebene Problem zu ermitteln und am Ende diese den anderen am PC näher erläutern. Diese Variante kann auch zur Überprüfung der berechneten Ergebnisse dienen.

Ferner kann die Bearbeitung der Aufgaben sowohl in Einzelarbeit, Partnerarbeit als auch in Gruppen erfolgen. Somit kann auch auf unterschiedliche Leistungsfähigkeiten der SchülerInnen eingegangen und Spezialisten-Teams gebildet werden. Es liegt folglich im Ermessen des Lehrkörpers, in Abhängigkeit sowohl des Leistungsvermögens als auch des Leistungsgefälles der betreffenden Klasse bzw. dem betreffenden Kurses, wie er die Unterrichtseinheit didaktisch und zeitlich plant.

Di Lösungswege der oben genannten ersten drei Aufgaben vorgestellt.

***1. Lösungsweg**: Bearbeitung der Aufgabenstellungen ohne Hilfsmittel:*

Nachdem die Wertepaare in ein Koordinatensystem eingetragen wurden und die möglichen Wachstumsprozessarten bestimmt wurden, sind folgende Punkte bei der weiteren Vorgehensweise zu beachten:

- Aufstellen der Gleichung der vermuteten Funktion
- Umformung der Gleichung in eine Geradengleichung
- Transformation der Messwerte
- Eintragen der Werte in ein neues Koordinatensystem
- Bewertung: Liegen die Punkte annähernd auf einer Ausgleichsgeraden?
- Wenn ja: Bestimmung der Gleichung der Ausgleichsgeraden

In der ersten Aufgabenstellung wird exponentielles Wachstum angenommen. Aus dieser Annahme ergibt sich, dass zum einen f'(t) proportional zu f(t) ist, d.h. folgendes gilt und sich in dieser Art umformen lässt:

$$\frac{d}{dt} f(t) = k \cdot f(t)$$

$$\frac{\frac{d}{dt} f(t)}{f(t)} = k$$

$$\ln\left(f(t)\right) = k \cdot t + c_1$$

$$f(t) = e^{k \cdot t + c_1}$$

$$f(t) = c \cdot e^{k \cdot t} \quad \text{mit} \quad c = e^{c_1}$$

Diese Herleitung soll beispielhaft für die weiteren Herleitungen aus den Aufgabenteilen 2 und 3 sein. Diese erfolgen mit ähnlichen Umformungsschritten. Es genügt auch, wenn man die letzte Gleichung gegeben hat und die Logarithmus-Funktion auf die gegebene Exponentialfunktion anwendet.

In der dritten Zeile erkennt man nun die Struktur einer Geradengleichung. Die Messwerte werden nun transformiert, indem auf die Beobachtungswerte die Logarithmus-Funktion angewendet wird. Es entstehen folgende Werte:

t	0	5	10	15	20
ln(f(t))	2.079	3.178	4.111	4.796	5.187

Diese Werte werden nun in ein weiteres Koordinatensystem eingetragen (siehe 2. Lösungsweg). Die Werte liegen annähernd auf einer Geraden, sodass die Gleichung der Ausgleichsgeraden bestimmt werden kann.

Da die Geradengleichung folgende Form hat

$$\ln\left(f(t)\right) = k \cdot t + c_1 \quad \text{mit} \quad c_1 = \ln(c)$$

muss zum einen die Variable k (Steigung der Ausgleichsgeraden) durch die folgenden Formeln bestimmt werden

$$k = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \text{ , } m_x \text{ Mittelwert von } x, m_y \text{ Mittelwert von } y$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x) \cdot (y_i - m_y)$$

$$S_{xx} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2$$

und zum anderen die Variable c1 (Schnittpunkt mit der y-Achse) durch einsetzen der Mittelwerte in die Geradengleichung bestimmt werden. Aus den Berechnungen ergibt sich eine Geradengleichung für die Ausgleichsgerade und durch Umformung die Gleichung der Wachstumsfunktion:

$$\ln\left(f(t)\right) = 0,1567 \cdot t + 2,3036$$

$$f(t) = 10,01 \cdot e^{0,1125 \cdot t}$$

In dem zweiten Aufgabenteil wird beschränktes Wachstum angenommen, d.h. f'(t) ist proportional zu (S-f(t)). Die Wachstumsfunktion hat die Form

$$f(t) = S - c \cdot e^{-k \cdot t}$$

und die Geradengleichung hat die Form

$$\ln\left(S - f(t)\right) = -k \cdot t + \ln(c)$$

Nach Transformation der Werte und anschaulichen Bewertung der Ergebnisse durch eine Grafik erfolgt wie schon in Aufgabenteil1 die Bestimmung der Geradengleichung und der Wachstumsfunktionsgleichung:

$$\ln\left(S - f(t)\right) = -0,0439 \cdot t + 5,7903$$

$$f(t) = 300 - 327,111 \cdot e^{-0,0439 \cdot t}$$

Die Aufgabe 3 erfolgt analog, nur dass auch an dieser Stelle ein anderes Wachstumsmodell der Problemstellung zu Grunde liegt. An dieser Stelle wird logistisches Wachstum angenommen, d.h. f'(t) ist proportional zu f(t) und zu (S-f(t)). Die für die Berechnungen nötigen Gleichungen sind die folgenden:

$$f(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{-S \cdot k \cdot t}}$$

und

$$\ln\left(\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{S}\right) = -S \cdot k \cdot t + \ln\left(\frac{c}{S}\right)$$

Nach erneuter Transformation der Werte und den darauffolgenden Arbeitsschritten, ergeben sich folgende Funktionsgleichungen:

$$\ln\left(\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{300}\right) = -0,2006 \cdot t - 2,217$$

$$f(t) = \frac{300}{1 + 32,68 \cdot e^{-0,2006 \cdot t}}$$

***2. Lösungsweg**: Bearbeitung der Aufgabenstellungen mit Hilfe von Excel:*

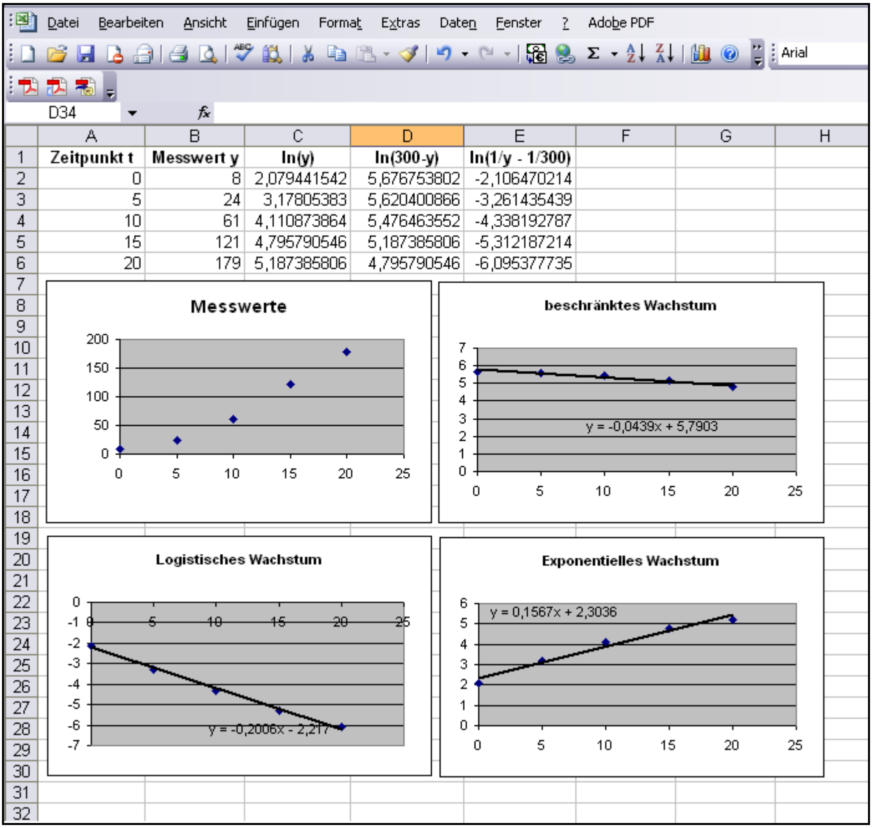
In Excel werden zu Beginn die Zeitpunkte t und die Beobachtungswerte in eine Tabelle eingetragen. Danach können zuerst die Werte für die ermittelten Geradengleichungen mit Excel berechnet werden. Die allgemeinen Geradengleichungen können wie in Lösungsweg 1 selbst bestimmt oder auch von dem Lehrkörper vorgegeben werden.

Nachdem nun die Werte berechnet wurden, kann ein Diagramm erstellt werden. Hierzu folge man folgendem Pfad: *Einfügen > Diagramm*

Am besten eignet sich ein Punkt-Diagramm. Wenn dieses erstellt ist, kann eine Trendlinie hinzugefügt werden, indem man das Diagramm anklickt und im Menü diesen Pfad geht: *Diagramm > Trendlinie hinzufügen*

Eine lineare Regression kann nun gewählt werden. Ferner kann im Menüpunkt „Optionen" gewählt werden, ob die Geradengleichung im Diagramm dargestellt werden soll. Wählt man diese Einstellung, so kann man die Geradengleichung der Ausgleichsgerade schnell ermitteln oder die eigenen Ergebnisse aus dem ersten Lösungsweg überprüfen. Diese Art der Aufgabenbearbeitung ist wesentlich schneller und anschaulicher, als die erste, da man die erstellten Graphen schnell gegenüberstellen kann und die ermittelten Ergebnisse vergleichen kann.

Zu diesem Zweck dient diese Übersicht:



	Zeitpunkt t	Messwert y	ln(y)	ln(300-y)	ln(1/y - 1/300)
2	0	8	2,079441542	5,676753802	-2,106470214
3	5	24	3,17805383	5,620400866	-3,261435439
4	10	61	4,110873864	5,476463552	-4,338192787
5	15	121	4,795790546	5,187385806	-5,312187214
6	20	179	5,187385806	4,795790546	-6,095377735

Im weiteren Verlauf müssen jedoch noch die Funktionsgleichungen der Wachstumsmodelle durch Umformungen der Ausgleichsgeradengleichungen, wie in dem ersten Lösungsweg, bestimmt werden.

Diskussion der Ergebnisse

Aus den Regressionsgeraden ergibt sich, dass **das Modell des logistischen-Wachstum** problemadäquat ist und zur Lösung herangezogen werden kann. Die beiden ersten Modelle zeigen jeweils, dass die 5 Punkte eher auf einer gekrümmten Kurve liegen als auf einer Geraden. Diese Krümmung deutet auf ein lokal schnelles Wachstum hin, also auf logistisches Wachstum. Die drei Wachstumsprozesse liefern jedoch noch keine optimale Näherung und lassen sich nur im Kontext eindeutig bewerten. Der Favorit muss nun geprüft werden, indem der Sachverhalt hinzugezogen wird.

Bei den Wertepaaren handelt es sich um Aussagen bzgl. der PKW-Dichte (Anzahl der PKW je 1000 Einwohner) in Deutschland, somit kann ein exponentielles Wachstum ausgeschlossen werden, da die Anzahl der PKW nicht unendlich steigen wird. Das beschränkte Wachstum kann ebenfalls aus mathematischen Aspekten ausgeschlossen werden, denn der Grenzwert im negativen Bereich liefert eine Aussage, die nicht zutreffen kann (negative PKW-Dichte). Es ist folglich anzunehmen, dass ein logistisches Wachstum vorliegt. Zur Optimierung der Näherung kann zum Beispiel eine andere Sättigungsgrenze, wie S = 600 angenommen werden.

Wenn man nun die Berechnungen aus dem dritten Aufgabenteil mit der veränderten Sättigungsgrenze durchführt, lässt sich eine Prognose für das Jahr 2015 erstellen. Man beachte bei der Berechnung, dass das Jahr 1950 unserem Zeitpunkt 0 entspricht. Unter Beachtung der Änderungen ergibt sich für das Jahr 2015 eine PKW-Dichte von 593.

Zur Überprüfung der Realitätsnähe des Ergebnisses können die SchülerInnen im Internet recherchieren und die aktuelle PKW-Dichte und die Entwicklung dieser in den vergangenen Jahrzehnten ihrer Studie hinzuziehen.

Zusammenfassung:

An diesem Beispiel kann man anschaulich sehen, wie die Schülerinnen und Schülerselbstständig Wachstumsmodelle prüfen können. Dabei werden sowohl ihre mathematischen Fähigkeiten in Anspruch genommen, als auch ihre Fähigkeiten im Bezug auf die Bewertung der Ergebnisse im Kontext. Die Ergebnisse müssen kritisch geprüft werden und passende Aufgabenstellungen regen die Schülerrinnen und Schüler zum Nachdenken an. Sie können ein Modell verändern, indem sie zum Beispiel eine andere Sättigungsgrenze annehmen oder sich selbst fragen, worin Gründe für das veränderte Verkehrsverhalten liegen.

Die Funktionsanpassung als Unterrichtseinheit bietet den Schülerinnen und Schülerein vielfältiges Betätigungsfeld und kann sehr flexibel im Bezug auf das Leistungsniveau einer Schülergruppe in den Unterricht eingebunden werden.

Quellen

http://www.destatis.de/jetspeed/portal/cms/Sites/destatis/Internet/DE/Content/Statistken/Zeitreihen/LangeReihen/Bevoelkerung/Content75/lrbev03a,templateId=renderPrint.psml

http://www.kba.de/

Adresse der Autorin:

Vera Reinhard
Fachbereich: Didaktik der Mathematik
Otto von Guericke Universität Magdeburg
Vera.Reinhard@student.uni-magdeburg.de

„Mit 100 € Millionär werden ?“

Eric Wesenberg

Vorbetrachtungen

Dieses Projekt zielt auf einen Zeitraum von ca. 3 - 4 Unterrichtsstunde ab. Es dient der Anwendung von Exponentialfunktionen als Mathematisierungsmuster zur   mathematischer Modellbildung in Klasse 10.

Im **Fach Geschichte** wird das Thema der Weimarer Republik parallel zur Behandlung der Exponentialfunktionen im **Fach Mathematik** behandelt.

Die Problemstellung ist fächerübergreifend und kann im Mathematikunterricht und im Geschichtsunterricht fächerverbindend thematisiert werden.

Ziel dieses Projektes ist die Herausbildung von mathematischen Modellbildungskompetenzen bei der Lösung eines gesellschaftliche relevanten Problems aus der „Finanzwelt“. Dabei soll das Phänomen der **Inflation** thematisiert und Ursachen, Erscheinungen und Auswirkungen einer Inflation mathematisch beschrieben und bewertet werden. Hierzu müssen die Schülerinnen und Schüler selbstständig Möglichkeiten der mathematischen Beschreibung erkunden und verschiedenen (Wachstums)-Modelle hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit zur Modellierung der ablaufenden Prozesse testen und bewerten.

Voraussetzungen dafür sind Begrifflichkeiten wie:

- Exponentielles Wachstum
- Logistisches Wachstum
- Auswerten von Grafen und zeichnerische Darstellung von Funktionsläufen

Gruppenarbeit ist hier ausdrücklich erwünscht. Argumentieren, Kommentieren, Begründen und Kommunizieren sollen hier geübt werden. Die Schüler sollen sich gedanklich mit den Ergebnissen auseinandersetzen und sie auf die Realität abbilden und interpretieren.

Problemstellung als Arbeitsauftrag

Den Schülerinnen und Schülern wird folgende Problemstellung gegeben:

Du verrichtest dein Praktikum bei einem Wirtschaftsinstitut. Dein Betreuer beauftragt dich mit der Untersuchung der Inflation in Deutschland ab 1950. Dein Zeitplan umfasst dafür 3 Stunden und du sollst am Ende die Ergebnisse deiner Recherchen und Berechnungen präsentieren.

Arbeitsmaterial

Das Arbeitsmaterial wird dem Team zur Verfügung gestellt. Dabei handelt es sich ausschließlich um eine Tabelle in der das Jahr und das Niveau der Preisentwicklung in % dargestellt wird. Diese Tabelle ist ausreichend um die komplette Aufgabenstellung zu bearbeiten. Der Begriff des Preisniveaus bezieht sich dabei auf die Kosten für lebensnotwendige Lebensmittel.

Jahr	Preisniveau W in %
1952	100
1955	100
1960	109,6
1965	125,52
1970	141,44
1975	190,639
1980	232,13
1985	280,48
1990	300,3
1993	341,5
1995	356,69
1998	372,25

2000	379,86
2003	396,96
2005	411,39

Arbeitsauftrag

- Informiere dich über Begrifflichkeiten der Inflation, insbesondere über die Inflationsrate und das Inflationstempo!
- Übertrage die gegebene Tabelle in dein Heft und trage die Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem ein!
- Folgende Funktion ist gegeben:

Y= a + (b-a)/(1+exp((x-x0)/dx))

mit: a = 446,66
b = 80,61
x0 = 1984,15
dx = 10,04

◦ Zeichne den Graph der Funktion in das Koordinatensystem!

- Welches Wachstum liegt vor? (Begründung!) Was kannst du daraus für die Zukunft schließen? (Hinweis: Berechne die Änderungsrate der Preisniveau-entwicklung und trage diese in einem neuen Koordinatensystem ein. Was kannst du feststellen?
- Berechne die Inflationsrate für jedes Jahr. Zeichne ein Balkendiagramm für diesen Zusammenhang!
- Welche Art der Inflation ist erkennbar?
-
-
-
-

- Bereite einen geeigneten Schülervortrag vor, indem du deine Ergebnisse geeignet präsentierst!

Folgende Begriffe und Definitionen sind vom Schüler selbstständig unter Nutzung des Internets und anderer Nachschlagewerke zu erarbeiten.

Definition **Inflation**

- lat. Inflatio: „das Sichaufblasen“ „das Anschwellen“
- Anhaltender Prozess der Geldentwertung
- Daraus folgt ein allgemeiner Anstieg des Preisniveaus

Definition der **Inflationsrate:**

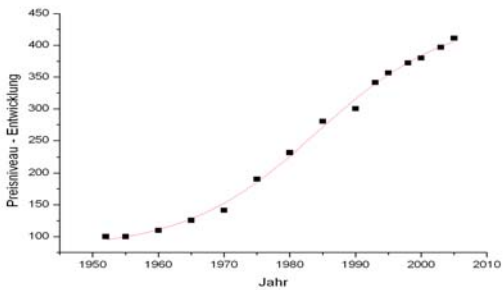
- Prozentuale Anstieg des Preisniveaus
- Beispiel: Steigt der Preisindex um 10 Indexpunkte von 200 auf 210, so errechnet sich eine Inflationsrate von 5%

Definition des **Inflationstempos:**

- Geschwindigkeit bzw. Stärke der Inflation
- ◦ Schleichende Inflation: 0-10% jährlich
- Beschleunigte Inflation: 10-20% jährlich
- Galoppierende Inflation: 20-50% jährlich
- Hyper-Inflation: >50% jährlich

Die Schülerinnen und Schüler können dabei in den Gruppen auch wirtschaftliche Fragen der Entwicklung sauf Finanzmärkten diskutieren.

Koordinatensystem und Graph der gegebenen Funktion:

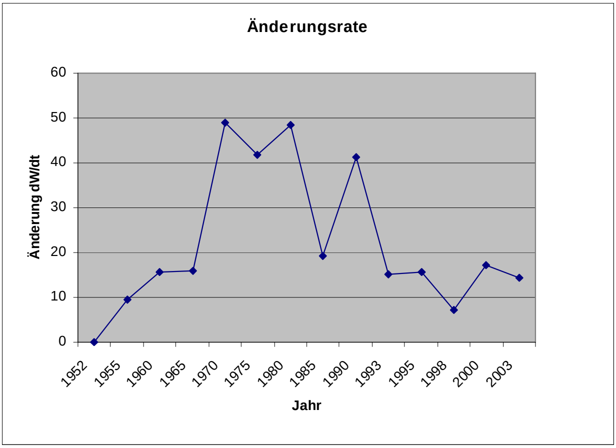


Der Schüler zeichnet den Graph in das Koordinatensystem und stellt fest, dass die Werte der Preisniveau-Entwicklung recht gut modelliert werden können mit dieser Funktion, weil sich der Graph der Funktion sich schön an die gegeben Punkte „anschmiegt".

Bestimmung des Wachstums:

Jahr	Änderungsrate dW/dt
1952	0
1955	0

1960	9,6
1965	15,65
1970	15,92
1975	48,95
1980	41,74
1985	48,35
1990	19,28
1993	41,2
1995	15,19
1998	15,56
2000	7,16
2003	17,1
2005	14,43

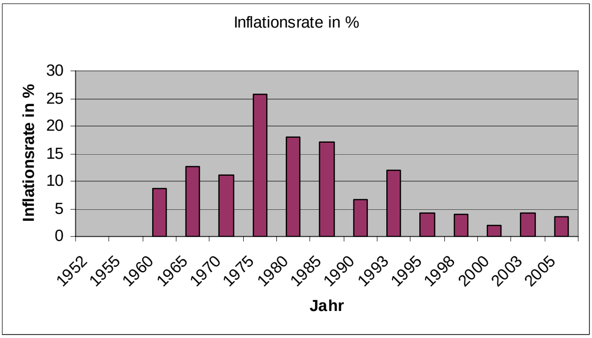


Der Schüler stellt fest, dass sich die Änderungsrate erst erhöht und dann wieder abfällt, was charakteristisch ist für ein **logistisches Wachstum.**

Bestimmung der Inflationsrate:

Jahr	Inflationsrate in %	Inflationstempo
1952	0	-
1955	0	-
1960	8,7	Schleichend
1965	12,6	Beschleunigt
1970	11,2	Beschleunigt
1975	25,7	Galoppierend
1980	17,9	Beschleunigt
1985	17,2	Beschleunigt
1990	6,6	Schleichend

1993	12	Beschleunigt
1995	4,2	Schleichend
1998	4,1	Schleichend
2000	2	Schleichend
2003	4,3	Schleichend
2005	3,5	Schleichend



Der Schüler erstellt eine neue Tabelle mit Jahr und der zu berechnenden Inflationsrate. Die Inflationsrate wird als Balkendiagramm dargestellt, der Schüler beschreibt den Verlauf und bestimmt aus der Definition des Inflationstempos die jeweiligen Stufen der Inflation.

Schülervortrag:

Schülergruppen sollen ihre Ergebnisse in einem Schülervortrag präsentieren, die anderen Ausarbeitungen sollen vom Lehrer eingesammelt und ebenfalls benotet werden. Dabei ist die komplette bearbeitete Aufgabenstellung zu präsentieren, mit sämtlichen Darstellungen, Interpretationen, etc.

Erweiterung der Aufgabe unter fächerübergreifenden Aspekten:

Die Thematik der Inflation spielt auch historisch eine wichtige Rolle. Man könnte alternativ zu der Untersuchung von 1950 bis 2005 auch eine Untersuchung von 1915 bis 1923 in Deutschland machen. Diese Thematik ist vor allem im Vergleich zu der Inflation von 1950 bis 2005 interessant, weil es dort Inflationsraten bis zu 105,8 Millionen Prozent gab.

Hier einige Anregungen für weiterführende Themen **(Schülervorträge):**

- **Wieso „heizt“ eine Frau ihren Ofen mit Geldscheinen?**

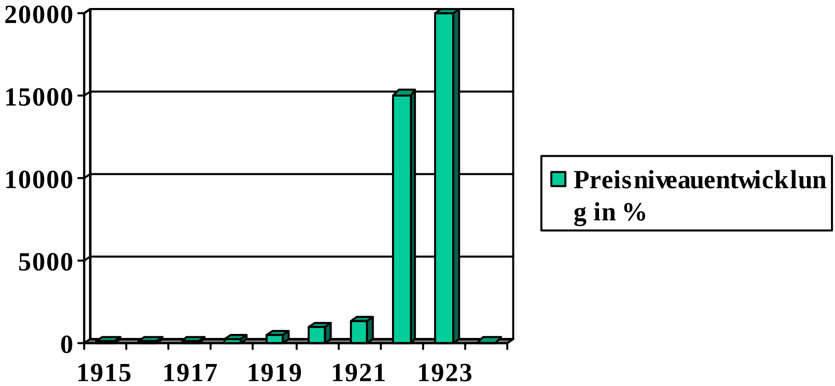
- **Sind wir Milliardär nur weil wir einen „50-Milliarden-Mark“-Schein in den Händen halten?**

Unter Verwendung der folgenden Materialien können die Schülerinnen und Schüler zu den o.g. Fragen **argumentieren.**

Tabelle : Zusammenhang zwischen Preisniveau und Inflationsrate

Jahr	Preisniveau in %	Inflationsrate in %
1914	100	0
1915	135	35,0
1916	180	33,3
1917	225	25,0
1918	310	37,8
1919	490	58,1
1920	1044	113,1
1921	1337	28,1
1922	15036	1024,6
1923	15897*10^9	105,8*10^6

Mit diesen Daten lässt sich folgende Darstellung erarbeiten:



Durch Interpretation der Tabelle und der Darstellung lassen sich die gegeben Fragen folgendermaßen beantworten:

- Die Frau befeuert ihren Ofen mit Geldscheinen, weil diese nichts mehr Wert waren. Zu dieser Zeit verlor das Geld so schnell an Wert, dass die Reichsdruckerei mit dem Drucken von neuen Geldscheinen gar nicht mehr hinterherkam, und einige Geldscheine einfach einen Stempel mit dem neuen Geldwert bekamen.
- Ein **50-Milliarden-Mark Schein** war zu der Zeit um 1923 nichts mehr wert, allerhöchstens vielleicht noch ein **Laib Brot**!

Der Schülervortrag lässt sich gut mit dem **Fach Geschichte** in Verbindung bringen, wo man die genaueren Gründe für die Inflation in dieser Zeit erörtern kann.