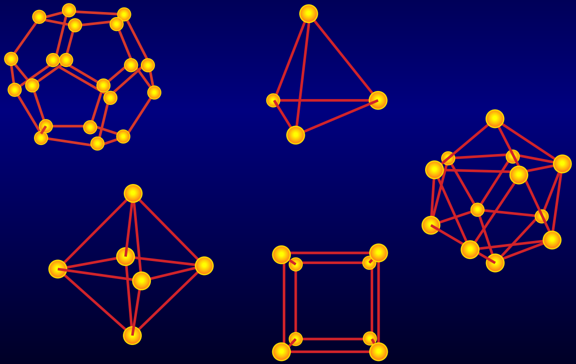
Die historische Betrachtung der Platonischen Körper

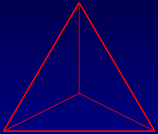
Prof. Dr. Herbert Henning, Christian Hartfeldt

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
eMail: herbert.henning@mathematik.uni-magdeburg.de
christian.hartfeldt@t-online.de

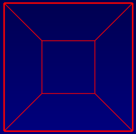
Die Platonischen Körper



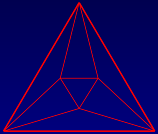
Die Platonischen Körper



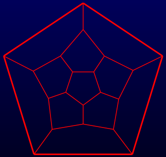
Tetraeder



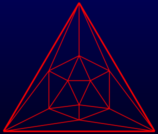
Würfel



Oktaeder

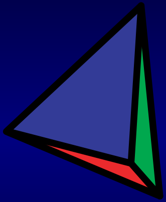


Dodekaeder

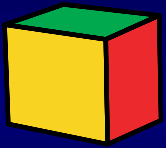


Ikosaeder

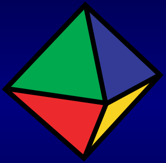
Die Platonischen Körper



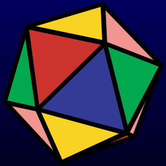
Tetraeder



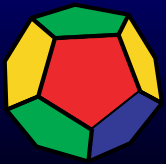
Würfel



Oktaeder



Ikosaeder



Dodekaeder

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Historische Betrachtung der Platonischen Körper

Die erste Definition der Platonischen Körper geht auf Platon zurück. Im Dialog „Timaios" beschreibt er die Definition am Beispiel des Tetraeders. Er versteht unter einem regelmäßigen Körper:

Definition (zurückgehend auf Platon, Platonischer Körper)

„einen festen Körper, vermittels dessen die ganze (um ihn beschriebene) Kugel in gleiche und ähnliche Teile zerlegbar ist".

Historische Betrachtung der Platonischen Körper

Der Dialog „Timaios“ erklärt die Entstehung des sichtbaren Kosmos aus 2 Hauptprinzipien:

1. aus dem zweckhaften Guten und
2. dem stofflichen Notwendigen.

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Nach ihm haben die regulären Körper ihren Namen: Platonische Körper. Er ordnet den Elementen Feuer, Erde, Luft und Wasser diese Körper zu.

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde,

- unbewegt, feste Grundflächen
- beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
- zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
- am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze

Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze

Würfel

Tetraeder

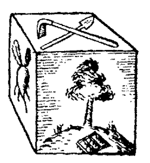
Oktaeder

Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze



Würfel

Tetraeder

Oktaeder

Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze

Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze

Würfel

Tetraeder

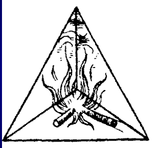
Oktaeder

Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze



Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze

Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

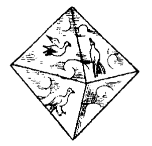
1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze

Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze



Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze

Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

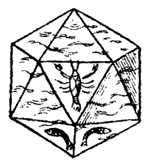
1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze

Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Erde, Feuer, Luft, Wasser

1. unbewegt, feste Grundflächen
2. beweglichste, kleinste, spitzestete, schneidenste, leichteste
3. zweitwenigste Grundflächen, zweitschärfste Spitze
4. am wenigsten beweglich, die am wenigsten scharfe Spitze



Würfel
Tetraeder
Oktaeder
Ikosaeder

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Dodekaeder: Da aber noch eine fünfte Zusammenfügung übrig war, so benutzte Gott diese das Weltganze. Jeder der zwölf Seitenflächen entspricht eines der zwölf Sternbilder.

Dieses war die Geburtsstunde für die Bezeichnung **Platonische Körper**, welche seitdem so bezeichnet werden.

Platon (427 – 347 v. Chr.), Philosoph

Dodekaeder: Da aber noch eine fünfte Zusammenfügung übrig war, so benutzte Gott diese das Weltganze. Jeder der zwölf Seitenflächen entspricht eines der zwölf Sternbilder.
Dieses war die Geburtsstunde für die Bezeichnung **Platonische Körper**, welche seitdem so bezeichnet werden.

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon

Die 5 regulären Körper konstruiert Platon mit Hilfe von 2 Dreiecken, dabei gilt eines als das schönste aller Dreiecke.
Beschreibung Platons: *„Es ist das, aus deren zwei das gleichseitige Dreieck als drittes entstanden ist.“*

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon

Die 5 regulären Körper konstruiert Platon mit Hilfe von 2 Dreiecken, dabei gilt eines als das schönste aller Dreiecke. Beschreibung Platons: *„Es ist das, aus deren zwei das gleichseitige Dreieck als drittes entstanden ist.“*

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon

Die 5 regulären Körper konstruiert Platon mit Hilfe von 2 Dreiecken, dabei gilt eines als das schönste aller Dreiecke. Beschreibung Platons: *„Es ist das, aus deren zwei das gleichseitige Dreieck als drittes entstanden ist.“*

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon

Übertragung in die Mathematik:
rechtwinkliges Dreieck, bei dem die Seiten 2, $\sqrt{3}$ und 1 Längeneinheiten lang sind.

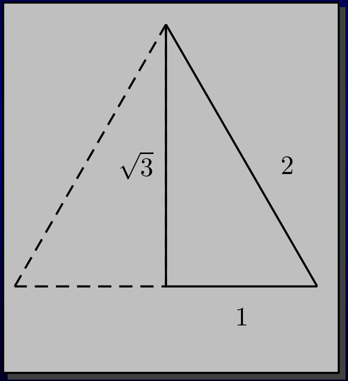


Abbildung: Platons Urdreiecke.

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon

Übertragung in die Mathematik:
gleichschenkliges Dreieck, mit den Seitenlängen 1, 1 und $\sqrt{2}$.

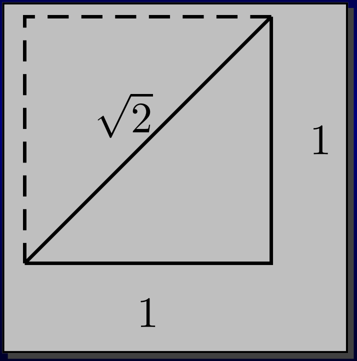


Abbildung: Platons Urdreiecke.

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Tetraeders

Wie konstruiert man die Platonischen Körper?

Antwort Platons zum Tetraeder: *„Den Anfang wird, denn also die erste Art machen, die aus den kleinsten Teilen zusammengesetzt ist; ihr Bauelement ist das Dreieck, dessen Hypothenuse doppelt so lang ist wie die kleinere Kathete“.* Diese Tetraeder, zusammengesetzt aus 24 Elementardreiecken, bezeichnet er als „die Pyramide“ und diese ist für ihn das kleinste und spitzeste Polyeder der „Baustein und Same des Feuers“.

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Tetraeders

Wie konstruiert man die Platonischen Körper?

Antwort Platons zum Tetraeder: *„Den Anfang wird, denn also die erste Art machen, die aus den kleinsten Teilen zusammengesetzt ist; ihr Bauelement ist das Dreieck, dessen Hypothenuse doppelt so lang ist wie die kleinere Kathete“.* Diese Tetraeder, zusammengesetzt aus 24 Elementardreiecken, bezeichnet er als „die Pyramide“ und diese ist für ihn das kleinste und spitzeste Polyeder der „Baustein und Same des Feuers“.

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Tetraeders

Wie konstruiert man die Platonischen Körper?

Antwort Platons zum Tetraeder: *„Den Anfang wird, denn also die erste Art machen, die aus den kleinsten Teilen zusammengesetzt ist; ihr Bauelement ist das Dreieck, dessen Hypothenuse doppelt so lang ist wie die kleinere Kathete".*

Diese Tetraeder, zusammengesetzt aus 24 Elementardreiecken, bezeichnet er als „die Pyramide" und diese ist für ihn das kleinste und spitzeste Polyeder der „Baustein und Same des Feuers".

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Tetraeders

Wie konstruiert man die Platonischen Körper?

Antwort Platons zum Tetraeder: *„Den Anfang wird, denn also die erste Art machen, die aus den kleinsten Teilen zusammengesetzt ist; ihr Bauelement ist das Dreieck, dessen Hypothenuse doppelt so lang ist wie die kleinere Kathete“.* Diese Tetraeder, zusammengesetzt aus 24 Elementardreiecken, bezeichnet er als „die Pyramide“ und diese ist für ihn das kleinste und spitzeste Polyeder der „Baustein und Same des Feuers“.

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Oktaeders

Etwas größere gleichseitige Dreieck ist zusammengesetzt aus 8 der „schönsten“ Grunddreiecke.

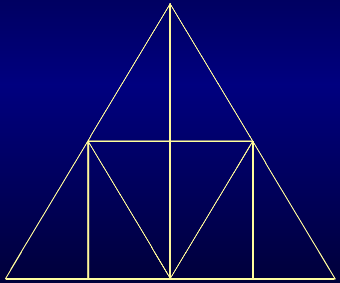


Abbildung: Oktaederseitenfläche.

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Ikosaeders

Das Ikosaeder konstruiert Platon aus 20 gleichseitigen Dreiecken, von denen jedes wie beim Tetraeder aus 6 Grunddreicken zusammengesetzt wird.

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Würfels

Den Würfel konstruiert Platon so:

„Nachdem nun das eine dieser beiden Grunddreiecke diese 3 Körper hervorgebracht hatte, war es seiner Aufgabe ledig. Dagegen brachte nun das gleichschenklige Dreieck die Natur des vierten Körpers hervor: je vier solche traten zusammen; ihre rechten Winkel vereinigten sich im Mittelpunkt und bildeten so ein einziges gleichseitiges Viereck.“

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Würfels

Den Würfel konstruiert Platon so:
„Nachdem nun das eine dieser beiden Grunddreiecke diese 3 Körper hervorgebracht hatte, war es seiner Aufgabe ledig. Dagegen brachte nun das gleichschenklige Dreieck die Natur des vierten Körpers hervor: je vier solche traten zusammen; ihre rechten Winkel vereinigten sich im Mittelpunkt und bildeten so ein einziges gleichseitiges Viereck.“

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Ikosaeders

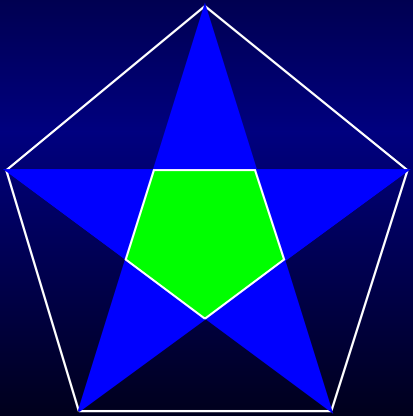
Die Konstruktion des Ikosaeders bedeutet für Platon:

„Der Erde wollen wir also die kubische Form zuweisen; denn sie ist die unbeweglichste von den vier Gattungen und der bildsamste von allen Körpern.“

Konstruktion der Platonischen Körper nach Platon – Konstruktion des Ikosaeders

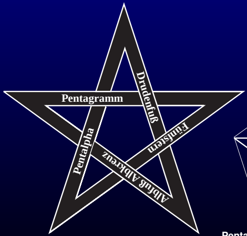
Die Konstruktion des Ikosaeders bedeutet für Platon:
„Der Erde wollen wir also die kubische Form zuweisen; denn sie ist die unbeweglichste von den vier Gattungen und der bildsamste von allen Körpern."

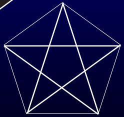
Pentagramm



Pentagramm

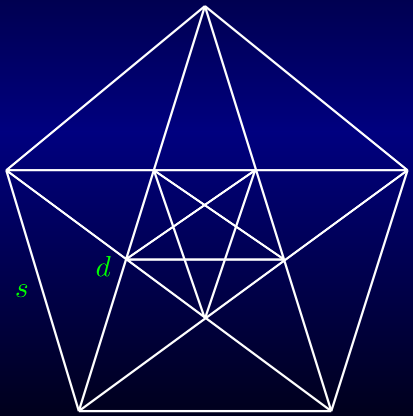
Zeichnet man in ein regelmäßiges Fünfeck die Diagonalen ein oder verlängert man die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks, so entsteht ein fünfzackiger Stern, welchen man auch Fünfstern nennt. Andere Bezeichnungen für den Fünfstern sind Pentagramm, Drudenfuß, Albfuß bzw. Albkreuz.





Pentagramm im Pentagon

Das regelmäßige Fünfeck



Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks

- Zwei sich schneidene Diagonalen teilen sich im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Die äußeren Zacken des Pentagramms (Fünfsterns) sind (spitze) Goldene Dreiecke.
- Das sich zwischen den Diagonalen bildende kleine Fünfeck ist ebenfalls regelmäßig. Sein Flächeninhalt verhält sich dem der Ausgangsfigur wie $1 : \mu^2$.
- Einer der fünf Platonischen Körper, der Dodekaeder, besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken.

Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks

- Zwei sich schneidende Diagonalen teilen sich im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Die äußeren Zacken des Pentagramms (Fünfsterns) sind (spitze) Goldene Dreiecke.
- Das sich zwischen den Diagonalen bildende kleine Fünfeck ist ebenfalls regelmäßig. Sein Flächeninhalt verhält sich dem der Ausgangsfigur wie $1 : \mu^2$.
- Einer der fünf Platonischen Körper, der Dodekaeder, besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken.

Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks

- Zwei sich schneidene Diagonalen teilen sich im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Die äußeren Zacken des Pentagramms (Fünfsterns) sind (spitze) Goldene Dreiecke.
- Das sich zwischen den Diagonalen bildende kleine Fünfeck ist ebenfalls regelmäßig. Sein Flächeninhalt verhält sich dem der Ausgangsfigur wie $1 : \mu^2$.
- Einer der fünf Platonischen Körper, der Dodekaeder, besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken.

Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks

- Zwei sich schneidene Diagonalen teilen sich im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Die äußeren Zacken des Pentagramms (Fünfsterns) sind (spitze) Goldene Dreiecke.
- Das sich zwischen den Diagonalen bildende kleine Fünfeck ist ebenfalls regelmäßig. Sein Flächeninhalt verhält sich dem der Ausgangsfigur wie $1 : \mu^2$.
- Einer der fünf Platonischen Körper, der Dodekaeder, besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken.

Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks

- Zwei sich schneidene Diagonalen teilen sich im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Die äußeren Zacken des Pentagramms (Fünfsterns) sind (spitze) Goldene Dreiecke.
- Das sich zwischen den Diagonalen bildende kleine Fünfeck ist ebenfalls regelmäßig. Sein Flächeninhalt verhält sich dem der Ausgangsfigur wie $1 : \mu^2$.
- Einer der fünf Platonischen Körper, der Dodekaeder, besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken.

Goldener Schnitt

Johannes Kepler:

„Die Geometrie birgt zwei große Schätze: der eine ist der Satz von Pythagoras, der andere ist der Goldene Schnitt. Den ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den zweiten dürfen wir ein kostbares Juwel nennen."

Feststellung am Pentagramm:

Pythagoreisches Weltbild, Hippasos von Metapont

- Alle Harmonien basieren auf Verhältnissen natürlicher Zahlen, also auf rationalen Zahlen. Die Schlussfolgerung war, dass es für je 2 Strecken ein gemeinsames m geben muss, das in beide Strecken genau reinpasst.
- Nachweis, dass das Verhältnis von Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks irrational ist.

Feststellung am Pentagramm:

Pythagoräisches Weltbild, Hippasos von Metapont

1. Alle Harmonien basieren auf Verhältnissen natürlicher Zahlen, also auf rationalen Zahlen. Die Schlussfolgerung war, dass es für je 2 Strecken ein gemeinsames m geben muss, das in beide Strecken genau reinpasst.
2. Nachweis, dass das Verhältnis von Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks irrational ist.

Feststellung am Pentagramm:

Pythagoräisches Weltbild, Hippasos von Metapont

1. Alle Harmonien basieren auf Verhältnissen natürlicher Zahlen, also auf rationalen Zahlen. Die Schlussfolgerung war, dass es für je 2 Strecken ein gemeinsames m geben muss, das in beide Strecken genau reinpasst.
2. Nachweis, dass das Verhältnis von Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks irrational ist.

Nachweis von Hippasos von Metapont

Man verkettet regelmäßige Fünfecke so, dass die Seite s_n eines Fünfecks die Diagonale d_{n+1} des nächsten Fünfecks wird. Wenn man dieses mathematisch übersetzt, ergibt sich

$$d_{n+1} = s_n$$

und daraus folgt

$$s_{n+1} = d_n - s_n.$$

Nachweis von Hippasos von Metapont

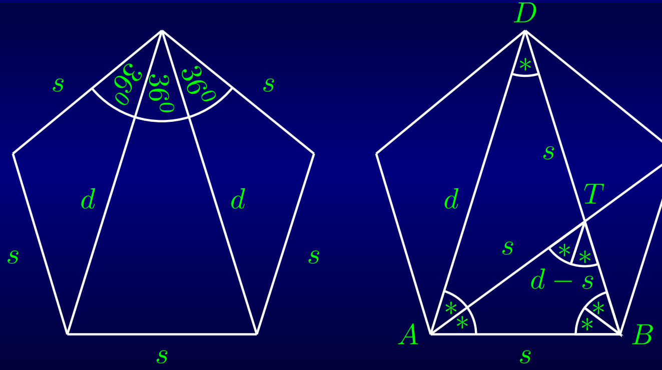


Abbildung: Zur Erklärung von $\sigma = \frac{s}{d}$ und $\tau = \frac{d}{s}$. Beachte dabei, dass $\Delta ABD \sim \Delta BTA$ und $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$ ist.

Nachweis von Hippasos von Metapont

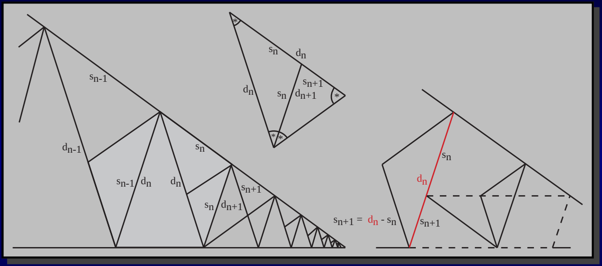


Abbildung: Zur Herleitung von $d_{n+1} = s_n$ und $s_{n+1} = d_n - s_n$.

Annahme: s_n und d_n haben ein gemeinsames Maß m.
Dann müsste das gemeinsame Maß aber auch s_{n+1} und d_{n+1} haben.

Nachweis von Hippasos von Metapont

Nun werden aber die Fünfecke und damit auch ihre Seiten und Diagonalen entsprechend klein. Wenn man dieses Verfahren so fortsetzt, so stößt man auf ein Fünfeck, dessen Seite kleiner ist als das angenommene Maß m. Also kann es kein gemeinsames Maß geben. Diese geometrische Interpretation kann man nun algebraisch übersetzen. Dann ist

$$\sigma = \frac{\text{Seite}}{\text{Diagonale}} = \frac{s_n}{d_n} \qquad \text{und} \qquad \tau = \frac{\text{Diagonale}}{\text{Seite}} = \frac{d_n}{s_n}$$

irrational.

Nachweis von Hippasos von Metapont

Die Streckenverhältnisse σ und τ, was ja $\tau = \frac{1}{\sigma}$ ist, sind in der Geometrie auch in anderen Zusammenhängen bekannt geworden. T teilt die Strecke d so, dass sich die ganze Strecke d zum längeren Abschnitt s genauso verhält wie der größere Abschnitt s zum kleineren Abschnitt $d - s$.

Nachweis von Hippasos von Metapont

Anders gesagt: Der Punkt T teilt die Strecke stetig oder nach dem *Goldenen Schnitt*.
Im Folgenden berechnen wir σ und τ. Es gilt, gemäß Vorüberlegung

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s} \Rightarrow \frac{d}{s} = \frac{1}{\frac{d}{s} - 1}$$

und somit

$$\tau = \frac{1}{\tau - 1} \iff \tau^2 - \tau - 1 = 0.$$

Nachweis von Hippasos von Metapont

Diese quadratische Gleichung kann gelöst werden, wobei $\tau > 0$ sein muss. Es ergibt sich

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618,$$

was die Zahl des Goldenen Schnittes darstellt.
Für σ ergibt sich damit

$$\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma^2 + \sigma - 1 = 0$$

und mit $\sigma > 0$ ergibt sich

$$\sigma = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \tau - 1 \approx 0.618.$$

Nachweis von Hippasos von Metapont

Wenn man diese Zahlen σ und τ näher betrachtet, stellt man fest, dass sich jede von ihnen um 1 von ihrem Kehrwert unterscheidet. Aber es gilt noch mehr. Betrachtet man die Wurzelfolge für τ

$$\tau^2 = 1 + \tau \text{ und } \tau > 0,$$

also

$$\tau = \sqrt{1+\tau} = \sqrt{1+\sqrt{1+\tau}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}}$$
$$= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$$

Nachweis von Hippasos von Metapont

und für σ ergibt sich ein Kettenbruch

$$1 = \sigma^2 + \sigma \Longrightarrow \frac{1}{\sigma} = \sigma + 1,$$

$$\sigma = \frac{1}{1+\sigma}\sigma = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\sigma}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sigma}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}.$$

Nachweis von Hippasos von Metapont

Im Folgenden betrachten wir die Näherungsbrüche für σ, welche sich mit Kettenbruchentwicklung ergeben:

$$\sigma_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad \sigma_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{1 + \sigma_1} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1 + \sigma_2} = \frac{2}{3}, \quad \sigma_4 = \frac{1}{1 + \sigma_3} = \frac{3}{5}, \quad \sigma_5 = \frac{5}{8}$$

$$\sigma_6 = \frac{8}{13}, \quad \sigma_7 = \frac{13}{21} \approx 0.619.$$

σ_7 ist näherungsweise fast $\sigma = 0.618$.

Nachweis von Hippasos von Metapont

Betrachtet man die Zähler und Nenner, so stellt man fest, dass die Summe des Zählers und Nenners des vorausgegangenen Bruches den neuen Bruch ergeben, also

Zähler	1	1	2	3	5	8	13 ...
Nenner	1	2	3	5	8	13	21 ...

Tabelle: Die Fibonacci Zahlen.

Fibonacci

- „Fibonacci" ist eine Verkürzung von „Filius Bonacci" und heißt „Sohn des Bonacci"
- hieß Leonardo von Pisa, geboren um 1170 in Pisa, gestorben nach 1240 in Pisa
- gilt als der erste bedeutende Mathematiker in Europa
- Das Todesjahr von Fibonacci ist nicht bekannt. Die letzte Nachricht über ihn ist ein Dektret aus dem Jahre 1240, in welchem ihm die Republik ein jährliches Gehalt aussetzte.

Fibonacci-Zahlen

Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

heißt Fibonaccifolge, benannt nach Fibonacci (1170 – 1240, Pisa), die a_n bezeichnen wir mit Fibonacci Zahlen. Diese Zahlen sehen so aus:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	$\cdots$

Die Frage, die sich stellt, ist, ob man die Folgenglieder a_n direkt berechnen kann. Diese Frage kann mit ja beantwortet werden. Lösung der Rekursionsgleichung:

Fibonacci-Zahlen

Setze $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Dann ist

$$a_{n+2} = q^{n+2} = a_{n+1} + a_n = q^{n+1} + q^n.$$

Durchdividieren dieser Gleichung mit q^n liefert

$$q^2 = q + 1 \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0$$

und somit

$$q_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Damit erhält man

$$s(n) = a_1 q_1^n + a_2 q_2^n = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Fibonacci-Zahlen

Setzt man die ersten Werte der Rekursion ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= s(0) = a_1 + a_2 \\ 1 &= s(1) = a_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + a_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und Addition der zweiten Gleichung liefert

$$1 = a_2 \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = a_2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$= -a_2\sqrt{5} \qquad \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Fibonacci-Zahlen

Damit erhält man

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right).$$

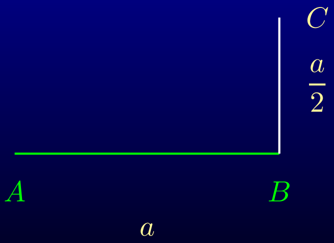
Dies ist eine geschlossene Gleichung.

Konstruktion der stetigen Teilung

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.

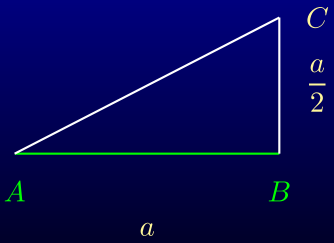
Konstruktion der stetigen Teilung

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



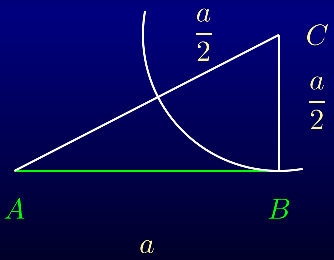
Konstruktion der stetigen Teilung

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



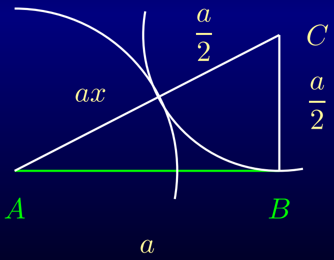
Konstruktion der stetigen Teilung

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



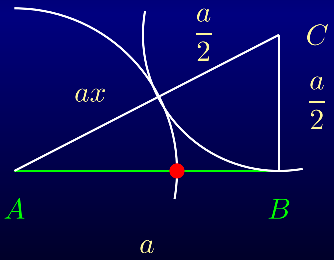
Konstruktion der stetigen Teilung

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



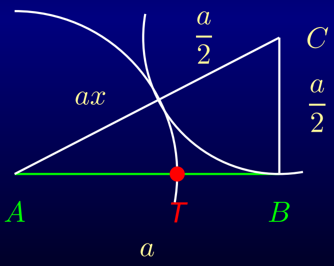
Konstruktion der stetigen Teilung

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



Konstruktion der stetigen Teilung

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



Konstruktion der stetigen Teilung

Begründung: $\overline{AT} = ax$. Nach dem Pythagoras im Dreieck ABC folgt

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(ax + \frac{a}{2}\right)^2 \iff a^2 = a^2x^2 + a^2x \ \Big| : a^2$$

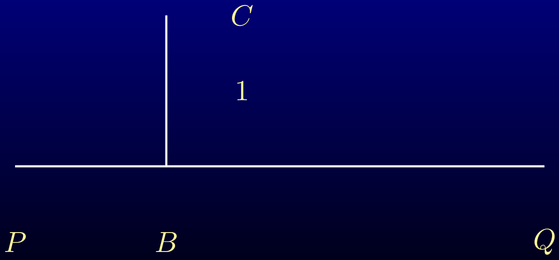
$$1 = x^2 + x \text{ oder } x^2 + x - 1 = 0.$$

Das ist genau die Bestimmungsgleichung für σ. Damit erhält man

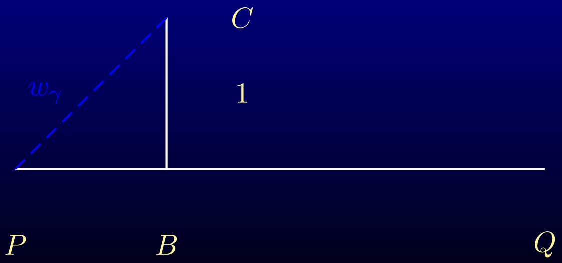
$$\overline{AT} : \overline{AB} = \sigma a : a, \text{ also } \overline{AT} : \overline{AB} = \sigma.$$

Konstruktion von σ und μ

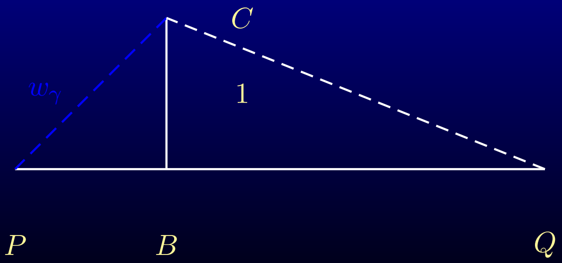
Konstruktion von σ und μ



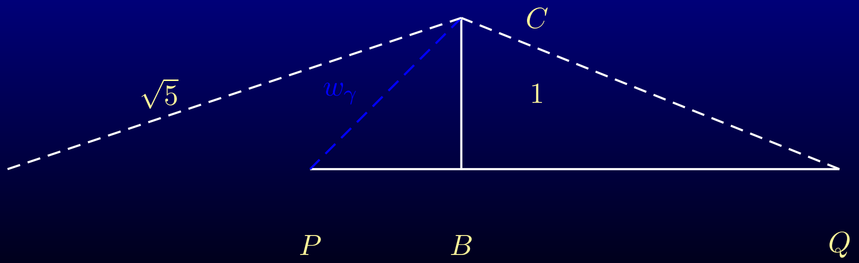
Konstruktion von σ und μ



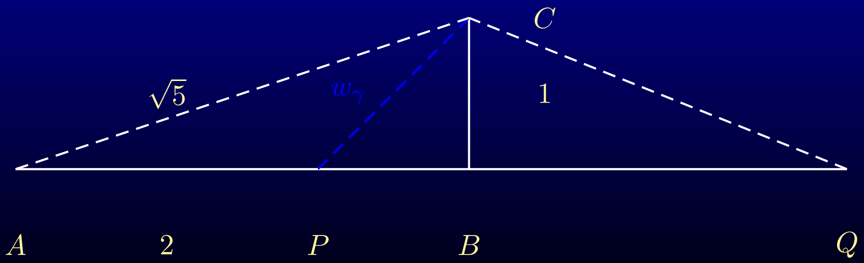
Konstruktion von σ und μ



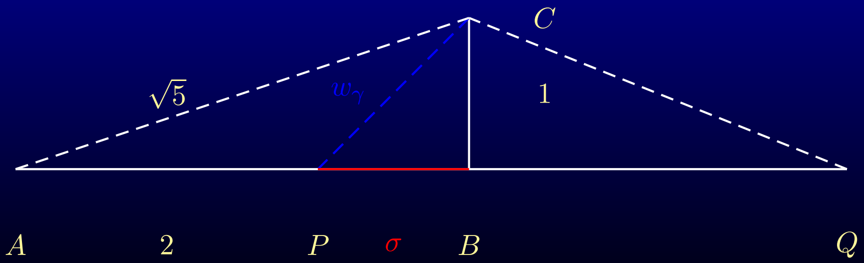
Konstruktion von σ und μ



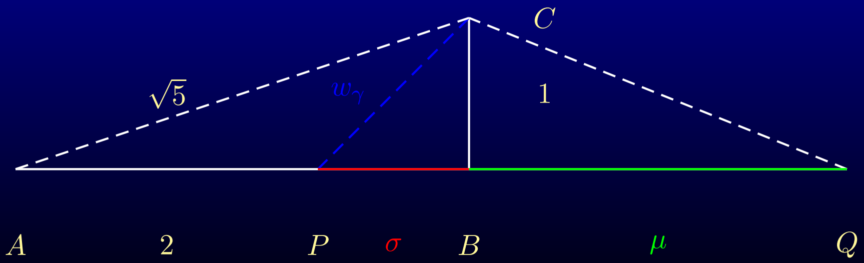
Konstruktion von σ und μ



Konstruktion von σ und μ



Konstruktion von σ und μ



Konstruktion von σ und μ

Begründung: Nach Pythagoras ist $\overline{AC} = \sqrt{5}$. Die Winkelhalbierende w_γ teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis der anliegenden Seiten. Mit $\overline{PB} = x$ ergibt sich

$$\frac{x}{2-x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \iff \sqrt{5}x = 2 - x \iff x(\sqrt{5}+1) = 2$$

$$\iff x = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sigma .$$

Konstruktion von σ und μ

Begründung: ...

Q teilt $\overline{AB}$ außen im selben Verhältnis. Mit $\overline{QB} = y$ ergibt sich

$$\frac{y}{2+y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Longleftrightarrow \sqrt{5}y = 2 + y \Longleftrightarrow y(\sqrt{5}-1) = 2$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \mu.$$

$\blacksquare$

Archimedische Körper

Die 13 Archimedischen Körper entstehen, wenn von einem Platonischen Körper Ecken oder Kanten so abgeschnitten werden, dass Stümpfe mit regelmäßigen Vielecken als Grenzflächen entstehen.

Gemeinsamkeit mit den Platonischen Körpern, Unterschied zu Platonischen Körpern

- In jeder Ecke treffen gleichviel Kanten, sodass die Ecken kongruent sind.
- Es kommen jetzt zwei oder drei verschiedene regelmäßige Vielecke in einem Körper vor.

Archimedische Körper

Die 13 Archimedischen Körper entstehen, wenn von einem Platonischen Körper Ecken oder Kanten so abgeschnitten werden, dass Stümpfe mit regelmäßigen Vielecken als Grenzflächen entstehen.

Gemeinsamkeit zu Platonischen Körpern, Unterschied zu Platonischen Körpern

- In jeder Ecke treffen gleichviel Kanten, sodass die Ecken kongruent sind.
- Es kommen jetzt zwei oder drei verschiedene regelmäßige Vielecke in einem Körper vor.

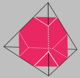
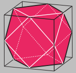
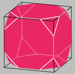
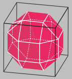
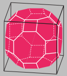
Archimedische Körper

Die 13 Archimedischen Körper entstehen, wenn von einem Platonischen Körper Ecken oder Kanten so abgeschnitten werden, dass Stümpfe mit regelmäßigen Vielecken als Grenzflächen entstehen.

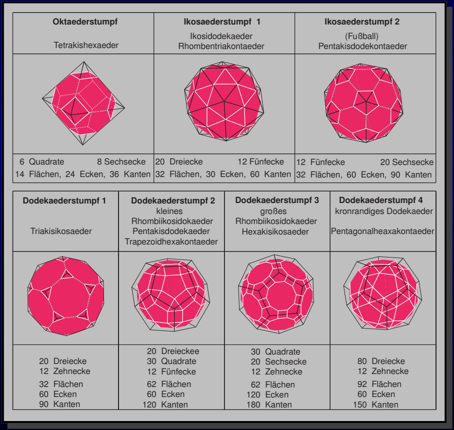
Gemeinsamkeit zu Platonischen Körpern, Unterschied zu Platonischen Körpern

- In jeder Ecke treffen gleichviel Kanten, sodass die Ecken kongruent sind.
- Es kommen jetzt zwei oder drei verschiedene regelmäßige Vielecke in einem Körper vor.

Die 13 Archimedischen Körper – Teil 1

Tetraederstumpf Triakistetraeder	**Würfelstumpf 1** Kubooktaeder Rhombendodekaeder	**Würfelstumpf 2** Triakisoktaeder
		
4 Dreiecke 4 Sechsecke 8 Flächen 12 Ecken 18 Kanten	8 Dreiecke 6 Quadrate 14 Flächen 12 Ecken 24 Kanten	8 Dreiecke 6 Achtecke 14 Flächen 24 Ecken 36 Kanten
Würfelstumpf 3 kleines Rhombikubooktaeder Trapezoidikositetraeder	**Würfelstumpf 4** großes Rhombikubooktaeder Hexakisoktaeder	**Würfelstumpf 5** kronrandiger Würfel Pentagonalikositetraeder
		
8 Dreiecke 18 Quadrate 26 Flächen 24 Ecken 48 Kanten	12 Quadrate 8 Sechsecke 6 Achtecke 26 Flächen 48 Ecken 72 Kanten	32 Dreiecke 6 Quadrate 38 Flächen 24 Ecken 60 Kanten

Die 13 Archimedischen Körper – Teil 2



Oktaederstumpf Tetrakishexaeder	**Ikosaederstumpf 1** Ikosidodekaeder Rhombentriakontaeder	**Ikosaederstumpf 2** (Fußball) Pentakisdodekontaeder
6 Quadrate 8 Sechsecke 14 Flächen, 24 Ecken, 36 Kanten	20 Dreiecke 12 Fünfecke 32 Flächen, 30 Ecken, 60 Kanten	12 Fünfecke 20 Sechsecke 32 Flächen, 60 Ecken, 90 Kanten

Dodekaederstumpf 1 Triakisikosaeder	**Dodekaederstumpf 2** kleines Rhombiikosidokaeder Pentakisdodekaeder Trapezoidhexakontaeder	**Dodekaederstumpf 3** großes Rhombiikosidokaeder Hexakisikosaeder	**Dodekaederstumpf 4** kronrandiges Dodekaeder Pentagonalheaxakontaeder
20 Dreiecke 12 Zehnecke 32 Flächen 60 Ecken 90 Kanten	20 Dreieckee 30 Quadrate 12 Fünfecke 62 Flächen 60 Ecken 120 Kanten	30 Quadrate 20 Sechsecke 12 Zehnecke 62 Flächen 120 Ecken 180 Kanten	80 Dreiecke 12 Zehnecke 92 Flächen 60 Ecken 150 Kanten

Albrecht Dürer

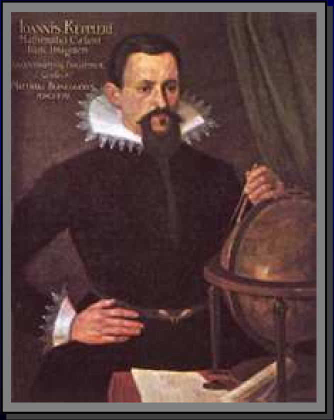
- geboren 21. Mai 1471 in Nürnberg, gestorben 6. April 1528 in Nürnberg
- Kupferstich „MELENCOLIA I“ 1514

„Melencolia I“ von Albrecht Dürer

„Melencolia I“ von Albrecht Dürer

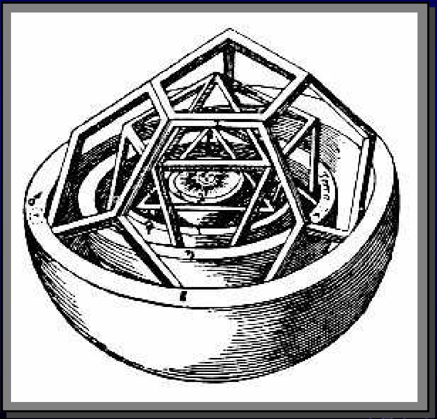
Der Körper, der wie ein Polyeder aussieht, entsteht, indem man zuerst einen Würfel in der Richtung zweier völlig entgegengesetzter gegenüberliegender Ecken hin zu einem von jeweils Rhomben begrenzten Parallelepipeds streckt und ansschließend die beiden Spitzen, welche sich oben und unten senkrecht zu dieser Achse befinden, abschneidet.
Der Würfel verlor seine entscheidende Eigenschaft, dass er eine Umkugel besitzt. Dieses erreicht man aber durch geeignetes Abschneiden der Spitzen.

Johannes Kepler



- geboren 27. Dezember 1571 in Weilderstadt in Würtemberg, gestorben 15. November 1630 in Regensburg
- Planetenbewegung
- Keplersche Vermutung

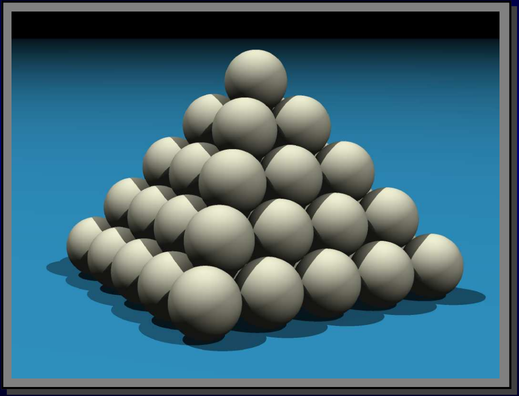
Keplers Planetenmodell für die Anordnung der Planeten in den Ecken regelmäßiger Körper



Planetenmodell von Johannes Kepler

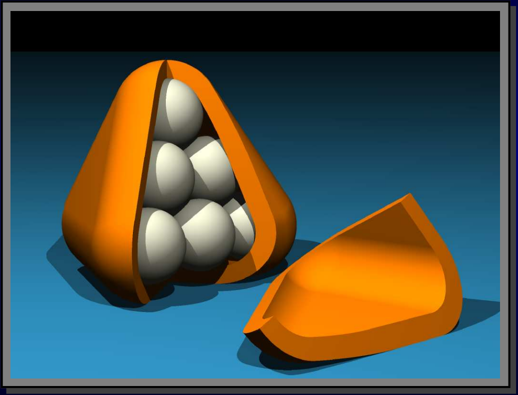
Otto I. und seine Frau Editha, Dom zu Magdeburg, 13. Jahrhundert

Ausschnitt aus einer Kugelpackung



(Schürmann, 2003)

Parametrische Packung

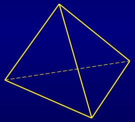


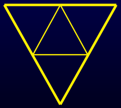
(Schürmann, 2003)

Gliederung

Platonische Körper – Tetraeder

Ein regelmäßiges Tetraeder besteht aus 4 Flächen, 4 Ecken und 6 Kanten.





Tetraeder

Oberflächeninhalt:

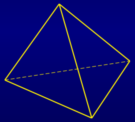
$$A_0 = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

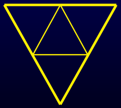
Volumen:

$$V = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}$$

Platonische Körper – Tetraeder

Ein regelmäßiges Tetraeder besteht aus 4 Flächen, 4 Ecken und 6 Kanten.





Tetraeder

Oberflächeninhalt:

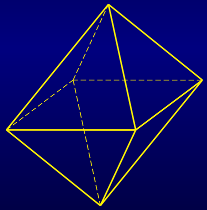
$$A_0 = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

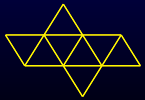
Volumen:

$$V = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}$$

Platonische Körper – Oktaeder

Ein regelmäßiges Oktaeder besteht aus 8 Flächen, 6 Ecken und 12 Kanten.





Oktaeder

Oberflächeninhalt:

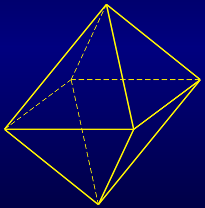
$$A_0 = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

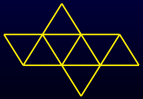
Volumen:

$$V = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2}$$

Platonische Körper – Oktaeder

Ein regelmäßiges Oktaeder besteht aus 8 Flächen, 6 Ecken und 12 Kanten.





Oktaeder

Oberflächeninhalt:

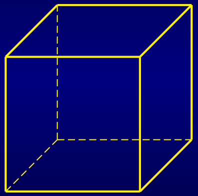
$$A_0 = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

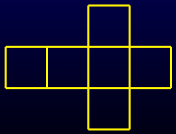
Volumen:

$$V = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2}$$

Platonische Körper – Hexaeder (=Würfel)

Ein regelmäßiges Hexaeder besteht aus 6 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten.





Hexaeder

Oberflächeninhalt:

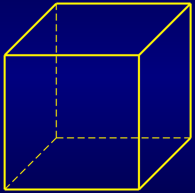
$$A_0 = 6 \cdot a^2$$

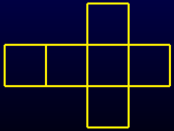
Volumen:

$$V = a^3$$

Platonische Körper – Hexaeder (=Würfel)

Ein regelmäßiges Hexaeder besteht aus 6 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten.





Hexaeder

Oberflächeninhalt:

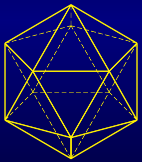
$$A_0 = 6 \cdot a^2$$

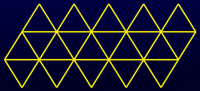
Volumen:

$$V = a^3$$

Platonische Körper – Ikosaeder

Ein regelmäßiges Ikosaeder besteht aus 20 Flächen, 12 Ecken und 30 Kanten.





Ikosaeder

Oberflächeninhalt:

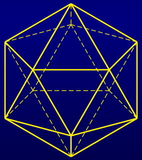
$$A_0 = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

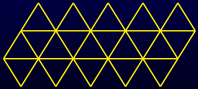
Volumen:

$$V = \frac{5}{12} \cdot a^3 \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)$$

Platonische Körper – Ikosaeder

Ein regelmäßiges Ikosaeder besteht aus 20 Flächen, 12 Ecken und 30 Kanten.





Ikosaeder

Oberflächeninhalt:

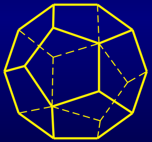
$$A_0 = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

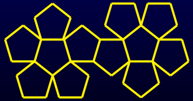
Volumen:

$$V = \frac{5}{12} \cdot a^3 \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)$$

Platonische Körper – Dodekaeder

Ein regelmäßiges Dodekaeder besteht aus 12 Flächen, 20 Ecken und 30 Kanten.





Dodekaeder

Oberflächeninhalt:

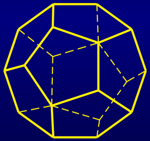
$$A_0 = 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{5 \cdot \left(5 + 2 \cdot \sqrt{5}\right)}$$

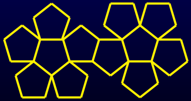
Volumen:

$$V = \frac{a^3}{4} \cdot \left(15 + 7 \cdot \sqrt{5}\right)$$

Platonische Körper – Dodekaeder

Ein regelmäßiges Dodekaeder besteht aus 12 Flächen, 20 Ecken und 30 Kanten.





Dodekaeder

Oberflächeninhalt:

$$A_0 = 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{5 \cdot \left(5 + 2 \cdot \sqrt{5}\right)}$$

Volumen:

$$V = \frac{a^3}{4} \cdot \left(15 + 7 \cdot \sqrt{5}\right)$$

Platonische Körper – Zusammenfassung

a: Kantenlänge n: Anzahl der Seiten einer Begrenzungsfläche
m: Anzahl der Kanten einer körperlichen Ecke
e: Anzahl der Ecken des Polyeders
f: Anzahl der Seitenfächen
k: Anzahl aller Kanten

	n	m	e	f	k	Oberfläche	Volumen
Tetraeder	3	3	4	4	6	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{3}$
Hexaeder	4	3	8	6	12	$6a^2$	a^3
Oktaeder	3	4	6	8	12	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$
Dodekaeder	5	3	20	12	30	$3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$	$\frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$
Ikosaeder	3	5	12	20	30	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3\left(3+\sqrt{5}\right)$

Weiter zu Fußball . . .

Gliederung

Regelmäßige Polyeder

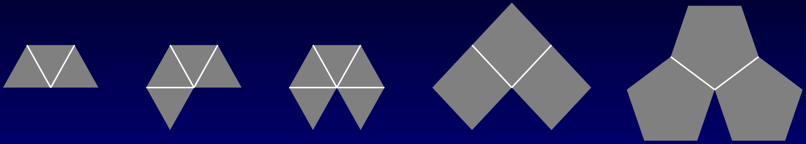
Theorem

Die Summe der Winkel, die zwischen den Kanten einer konvexen Ecke entstehen, ist immer kleiner als $360°$.

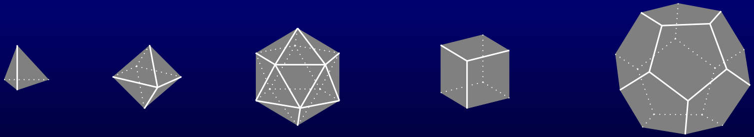
1. Bei der Begrenzung des Polyeders durch *gleichseitige Dreiecke* kann nämlich eine Ecke, da ihre Kantenwinkel je $60°$ sind, nur aus drei oder vier oder fünf Seitenflächen gebildet sein. Bei 6 Seitenflächen wäre die Summe der Kantenwinkel bereits $6 \cdot 60° = 360°$, was ein Widerspruch zum Theorem darstellt.
2. Bei der Begrenzung des Polyeders durch *Quadrate* (Kantenwinkel je $90°$).
3. Durch *regelmäßige Fünfecke* (Kantenwinkel jeweils $108°$) kann eine Ecke nur aus 3 Seitenflächen gebildet werden.

1. Bei der Begrenzung des Polyeders durch *gleichseitige Dreiecke* kann nämlich eine Ecke, da ihre Kantenwinkel je $60°$ sind, nur aus drei oder vier oder fünf Seitenflächen gebildet sein. Bei 6 Seitenflächen wäre die Summe der Kantenwinkel bereits $6 \cdot 60° = 360°$, was ein Widerspruch zum Theorem darstellt.
2. Bei der Begrenzung des Polyeders durch *Quadrate* (Kantenwinkel je $90°$).
3. Durch *regelmäßige Fünfecke* (Kantenwinkel jeweils $108°$) kann eine Ecke nur aus 3 Seitenflächen gebildet werden.

1. Bei der Begrenzung des Polyeders durch *gleichseitige Dreiecke* kann nämlich eine Ecke, da ihre Kantenwinkel je 60° sind, nur aus drei oder vier oder fünf Seitenflächen gebildet sein. Bei 6 Seitenflächen wäre die Summe der Kantenwinkel bereits $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$, was ein Widerspruch zum Theorem darstellt.
2. Bei der Begrenzung des Polyeders durch *Quadrate* (Kantenwinkel je 90°).
3. Durch *regelmäßige Fünfecke* (Kantenwinkel jeweils 108°) kann eine Ecke nur aus 3 Seitenflächen gebildet werden.



$3 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ $4 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ $5 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ $3 \cdot 90^\circ < 360^\circ$ $3 \cdot 108^\circ < 360^\circ$



Tetraeder Oktaeder Ikosaeder Würfel Dodekaeder

Abbildung: Die Summe der Winkel zwischen den Kanten einer konvexen Ecke.

- Regelmäßige Sechsecke können regelmäßige Polyeder nicht begrenzen, da $3 \cdot 120°$ nicht mehr kleiner als $360°$ ist.
- weiteres Merkmal Platonischer Körper: einbeschriebene und umbeschriebene Kugeln. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Polyeders ist zugleich gemeinsamer Mittelpunkt dieser Kugeln. Oberfläche der umbeschriebenen Kugel geht durch alle Ecken des Polyeders und die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel berührt jede Seitenfläche in ihrem Mittelpunkt.

- Regelmäßige Sechsecke können regelmäßige Polyeder nicht begrenzen, da $3 \cdot 120°$ nicht mehr kleiner als $360°$ ist.
- weiteres Merkmal Platonischer Körper: einbeschriebene und umbeschriebene Kugeln. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Polyeders ist zugleich gemeinsamer Mittelpunkt dieser Kugeln. Oberfläche der umbeschriebenen Kugel geht durch alle Ecken des Polyeders und die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel berührt jede Seitenfläche in ihrem Mittelpunkt.

Es folgt

Theorem

Die in den Mittelpunkten der Seitenflächen errichteten Senkrechten schneiden sich im Mittelpunkt des Polyeders.

Rund um den Fußball

Rund um den Fußball

- vor 30 Jahren war Fußball ein 12-Flächner mit der Oktaedergruppe als Symmetriegruppe.
- Nach Einzug des Farbfernsehens wurde Fußball verändert und nahm die Form eines 32-Flächners mit der Symmetriegruppe der Ikosaedergruppe ein, wobei das Fünfeck die Farbe schwarz und das Sechseck die Farbe weiß bekam.
- Grund: Zuschauer, die im Besitz eines Farbfernsehers waren, konnten den Fußball besser vom Grün des Rasens unterscheiden.

Eigenschaften des Fußballs

Ein Fußball besitzt

- 12 Fünfecke und
- 20 Sechsecke.

An jedes schwarze Fünfeck grenzen 5 Sechsecke.
An jedes weiße Sechseck grenzen 3 Fünfecke.

Überprüfung der Eigenschaften des Fußballs mittels Eulerschen Polyederformel

Jede Ecke hängt an einem Fünfeck und keine zwei Fünfecke haben eine Ecke gemeinsam. Also ist die Anzahl E der Ecken gleich der fünffachen Anzahl der Fünfecke:

$$E = 5 \cdot 12 = 60.$$

Überprüfung der Eigenschaften des Fußballs mittels Eulerschen Polyederformel – Flächen und Kanten

- Anzahl der Flächen: 12 Fünfecke und 20 Sechsecke ergeben $F = 32$.
- Jedes Fünfeck hat 5 Kanten. Die ergibt ingesamt $5 \cdot 12 = 60$ Kanten.
- Jedes Sechseck hat 6 Kanten. Also kommen noch $6 \cdot 20 = 120$ Kanten hinzu.
- Aber! Wir haben jede Kante doppelt gezählt. Also hat der Fußball $K = 90$ Kanten.

Überprüfung der Eigenschaften des Fußballs mittels Eulerschen Polyederformel – Anwendung

- Die Eulersche Polyederformel lautet

$$E - K + F = 2,$$

  wobei E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen bezeichnet.

Platonische Körper

- Also erhalten wir für den Fußball:

$$E - K + F = 60 - 90 + 32 = 2.$$

Überprüfung der Eigenschaften des Fußballs mittels Eulerschen Polyederformel – Anwendung

- Die Eulersche Polyederformel lautet

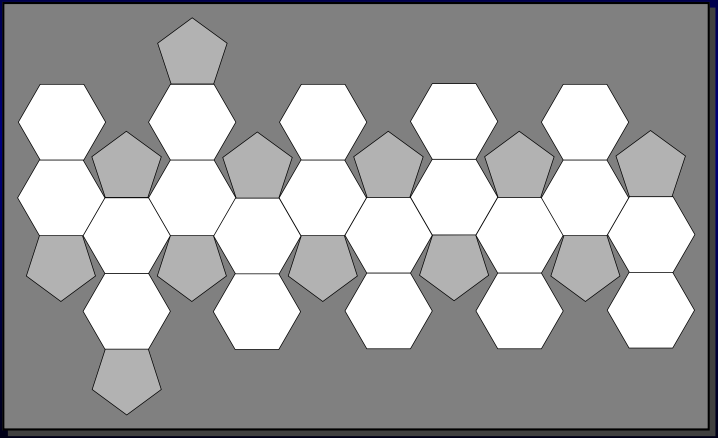
$$E - K + F = 2,$$

wobei E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen bezeichnet. Platonische Körper

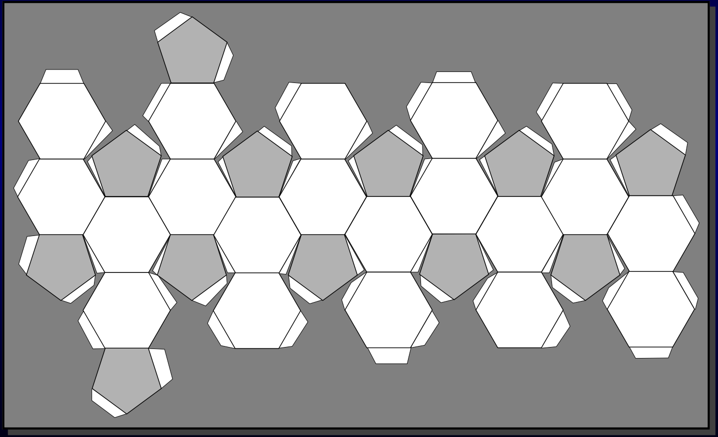
- Also erhalten wir für den Fußball:

$$E - K + F = 60 - 90 + 32 = 2.$$

Das Netz des Fußballs



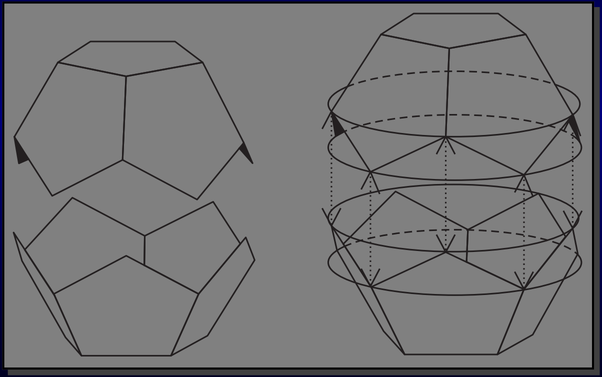
Das Netz des Fußballs mit Klebekante



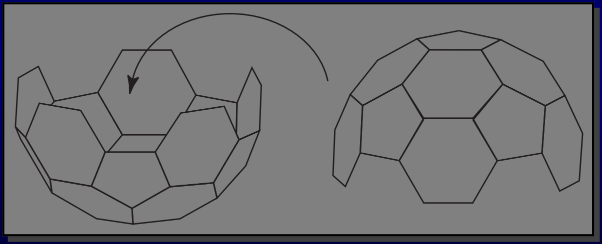
Weitere Konstruktionen zur Herstellung des Fußballs

Wir betrachten einen Dodekaeder. Zunächst stellt man 2 Hälften her, welche rotationssymmetrisch mit dem Drehwinkel $\alpha = 360^\circ/5 = 72^\circ$ sind. Die Randlinie stellt eine Zickzacklinie dar. Obere Punkte liegen auf einem Kreis um die Symmetrieachse, untere ebenfalls. Beide Kreise mit dem Radius $\varrho = 1/\tan 36^\circ$ sind kongruent. Anschließend setze man die beiden Hälfte zusammen und erhält einen Dodekaeder. Verfährt man beim Fußball analog, so erhält man den Fußball.

Zwei Hälften eines Dodekaeders



Zwei Hälften eines Fußballs



Gliederung

Kristalle

Die regulären Körper (bis auf Dodekaeder und Ikosaeder) tauchen in vielfältiger Weise als Formen in der belebten Natur auf.

Natriumchloridstruktur

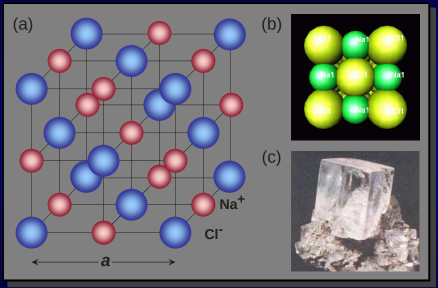


Abbildung: a) jedes Na-Atom ist von 6 Cl-Atomen umgeben,
b) NaCl-Struktur mit realistischen Ionenradien,
c) natürlicher NaCl-Kristall (kubische Form).

Diamantstruktur

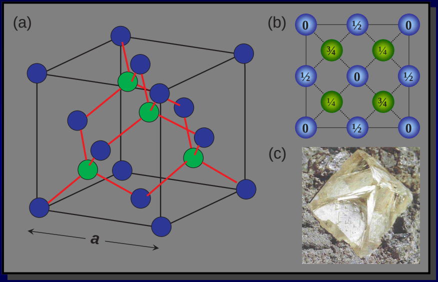
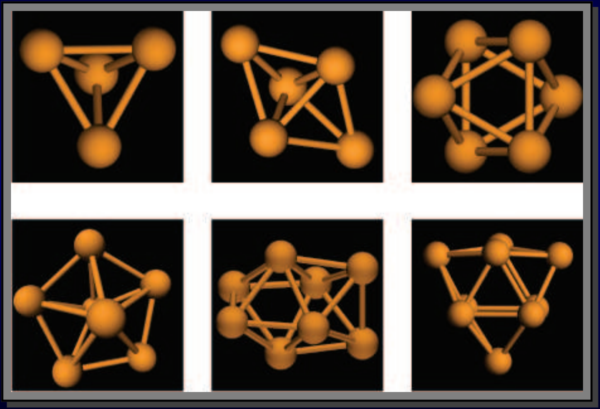


Abbildung: a)Kristallstruktur von Diamant mit der tetraedrischen Anordnung der Bindungen. Die beiden Kohlenstoffatome der Basis sind unterschiedlich gezeichnet, b) zeigt die Atompositionen in der Einheitszelle projiziert auf die Grundfläche des Würfels, c) zeigt das Bild eines Diamanten.

Cluster



(Schürmann, 2003)

Cluster

(Schürmann, 2003)

Gliederung

Lernziele

Die Schüler und Schülerinnen kennen:

- den Begriff regelmäßiges oder reguläres Polyeder,
- die 5 Platonischen Körper mit ihren entscheidenden Eigenschaften,
- kennen die Formel für den Oberflächeninhalt und das Volumen eines Tetraeders, bei vorgegebener Kantelänge,
- kennen verschiedene Anwendungen der Platonischen Körper.

Könnensziele

Die Schüler und Schülerinnen können:

- die 5 Platonischen Körper im Schrägbild konstruieren,
- die Netze der 5 Platonischen Körper konstruieren,
- die Zweitafelprojektion der 5 Platonischen Körper ausführen,
- Oberflächeninhaltsformeln und Voluminaformeln ausgewählter Platonischer Körper herleiten.

Zeitlicher Ablauf des Stoffgebietes

Es werden folgende Themen behandelt:

1. Einführung des Begriffes Regelmäßiges Polyeder (1 Std.)
2. Vorstellung der 5 Platonischen Körper mit ihren Eigenschaften (4 Std.)
3. Schrägbild und Aufriss des Würfels und Tetraeders (2 Std.)
4. Netze der Platonischen Körper (4 Std.)
5. Herleitung der Förmel für den Oberflächeninhalt und Volumens (5 Std.)
6. Klassenarbeit (2 Std.)

Einführung des Begriffes Regelmäßiges Polyeder

Definition

Unter einem regelmäßigen Polyeder versteht man einen konvexen Körper, bei dem seine Flächen regelmäßige Vielecke sind und in jeder Ecke gleichviel Kanten zusammenfließen.

Diese Definition sollte bei den Schülern gefestigt werden. Dieses kann durch die folgende Aufgabe geschehen:

Einführung des Begriffes Regelmäßiges Polyeder

Beispiel

1. Sicherlich kennst du verschiedene regelmäßige Vielecke, deren Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders sein könnten. Gib alle an!
2. Untersuche, wie viele Vielecke an einer Polyederecke mindestens zusammenstoßen und wie viele es höchstens sind!
3. Kann man aus (a) und (b) eine Schlussfolgerung ziehen? Wenn ja, gib diese an, ansonsten begründe, warum nicht!

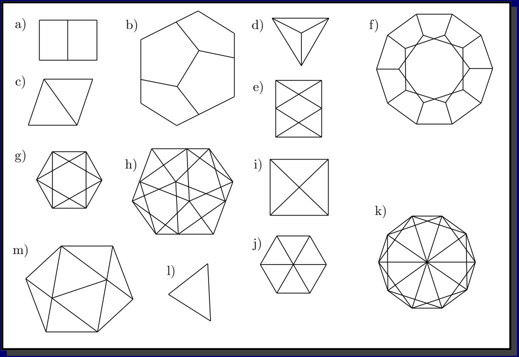
Schrägbild und Aufriss des Würfels und Tetraeders

Beispiel

Die nachstehenden Bilder zeigen verschiedene Ansichten von Platonischen Körpern als Drahtmodelle. Zunächst sollen die Schüler diese benennen und die Projektionsrichtung beschreiben. Welche der Kanten und Winkel sind in wahrer Größe dargestellt?

Schrägbild und Aufriss des Würfels und Tetraeders

Beispiel



Voraussetzungen

Die Schüler und Schülerinnen haben bereits umfassende Kenntnisse in folgenden Gebieten der Linearen Algebra gewonnen:

- Vektorraumbegriff
- Darstellung von Punkten und Vektoren auf analytischer Betrachtungsweise
- Begriff Teilverhältnis, Schwerpunkt, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit
- kennen verschiedene Anwendungen der Platonischen Körper.

Könnensziele

Die Schüler und Schülerinnen können:

- die Begriffe Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit auf verschiedene geometrische Beispiele anwenden und einfache Behauptungen beweisen
- das Verfahren des geschlossenen Vektorzuges anwenden und ausführen

Zeitlicher Ablauf des Stoffgebietes

Es werden folgende Themen behandelt:

1. Einführung des Begriffes Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, sowie dessen Festigung
2. Verfahren des geschlossenen Vektorzuges

Geschlossener Vektorzug

Aus dem Geometrieunterricht ist den Schülern folgender Satz bekannt:

Theorem

Die Verbindungsstrecken von der Ecke und der Schwerpunkt der entsprechenden Gegenflächen teilen sich in einem Tetraeder im Verhältnis $3:1$, wenn man von der entsprechenden Ecke ausgeht.

Dieses Theorem lässt sich sehr leicht mithilfe des geschlossenen Vektorzuges beweisen.

Geschlossener Vektorzug

Im Folgenden sei noch ein weiteres Beispiel angegeben, bei dem die Schüler den Begriff „windschiefe Geraden" kennen müssen.

Theorem

Die Strecken, welche die Mitten windschiefer Kanten verbinden, halbieren sich im Tetraeder.

Hat man das Vektorprodukt eingeführt, so lässt sich

Theorem

Die Summe der jeweils nach außen gerichteten Flächenvektoren ist im Tetraeder gleich dem Nullvektor.

zeigen.

Geschlossener Vektorzug

Im Folgenden sei noch ein weiteres Beispiel angegeben, bei dem die Schüler den Begriff „windschiefe Geraden“ kennen müssen.

Theorem

Die Strecken, welche die Mitten windschiefer Kanten verbinden, halbieren sich im Tetraeder.

Hat man das Vektorprodukt eingeführt, so lässt sich

Theorem

Die Summe der jeweils nach außen gerichteten Flächenvektoren ist im Tetraeder gleich dem Nullvektor.

zeigen.

Ende

Vielen Dank für Ihr Interesse