Mathematik zwischen Himmel und Erde
Probleme – Modelle – Lösungen

Prof. Dr. Herbert Henning, Thomas Kubitza, Christian Hartfeldt
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
eMail: herbert.henning@mathematik.uni-magdeburg.de

Luft-Nummer

Luft-Nummer

Viel heiße Luft bringt einen mit Sicherheit nach oben. Niemand weiß das besser als **Ian Ashpole**. Der 43-jährige stand in England auf der Spitze eines Heißluftballons. Die Luft-Nummer in 1500 Meter Höhe war noch der ungefährlichste Teil der Aktion. Kritischer war der Start. Nur durch ein Seil gesichert, musste sich Asphole auf dem sich füllenden Ballon halten. Bei der Landung strömte dann die heiße Luft aus einem Ventil direkt neben seinen Beinen vorbei. Doch außer leichten Verbrennungen trug der Ballonfahrer keine Verletzungen davon.

- Wie viel Liter Luft sind wohl in diesem Heißluftballon?

Wie weit ist es bis zum Horizont?

In der Nordsee steht ein 25 m hoher Leuchtturm.

Wie weit ist es bis zum Horizont?

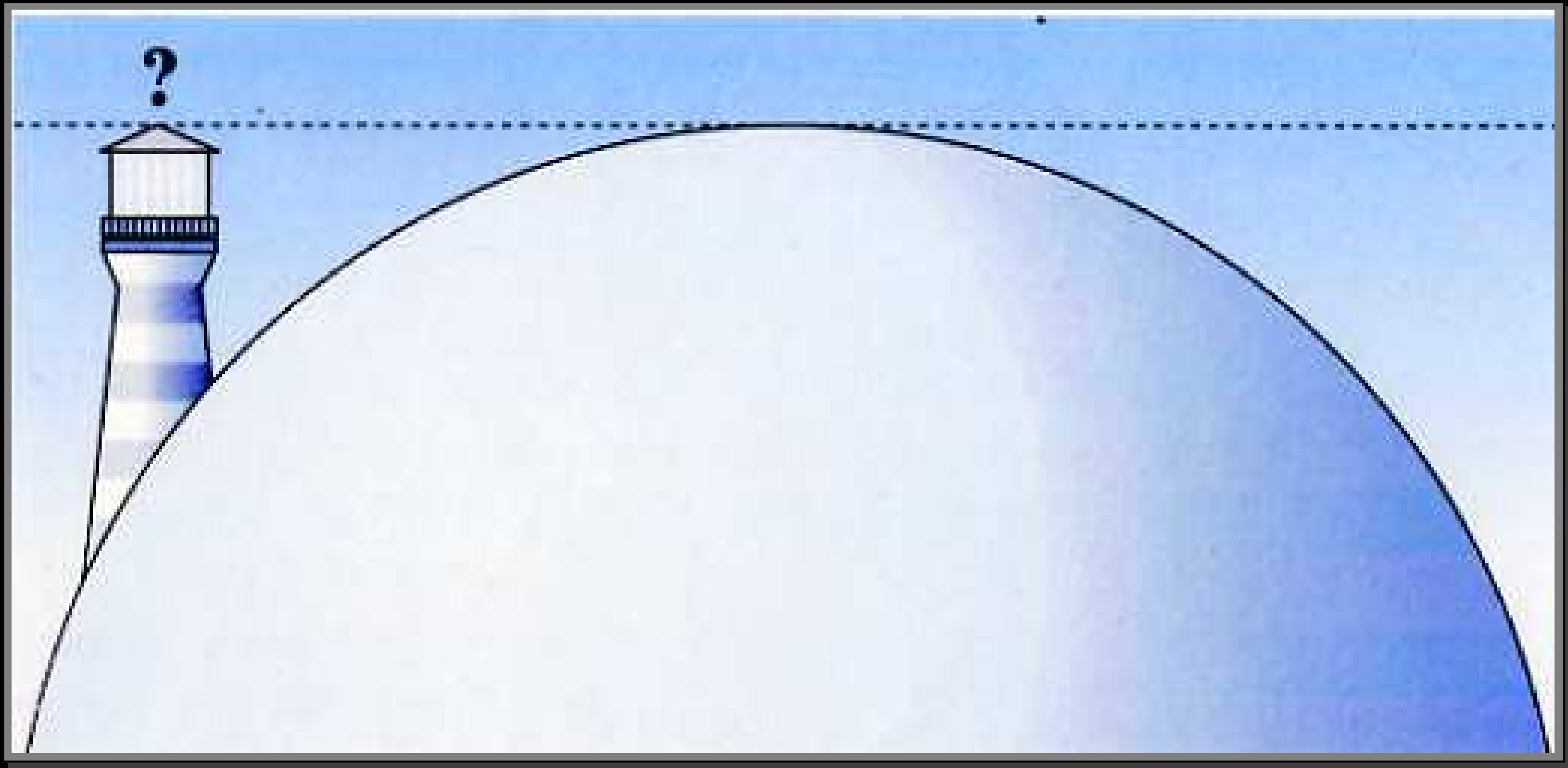
In der Nordsee steht ein 25 m hoher Leuchtturm.

Wie weit kann man von der obersten Plattform bei bester Sicht sehen?

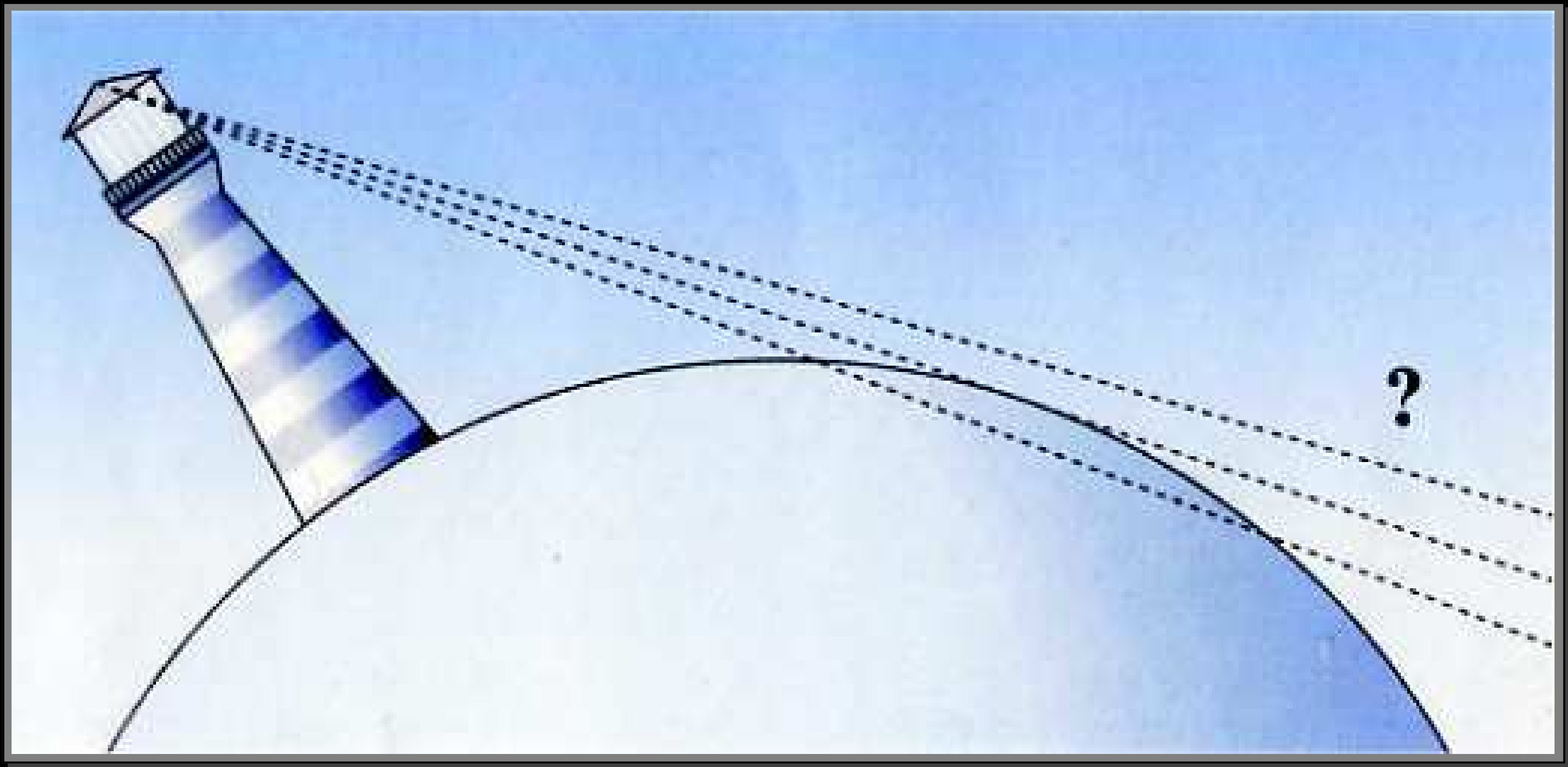
Wie weit kann man von der obersten Plattform bei bester Sicht sehen?

Überlege auch, von welchen Faktoren die Sichtweise abhängt!

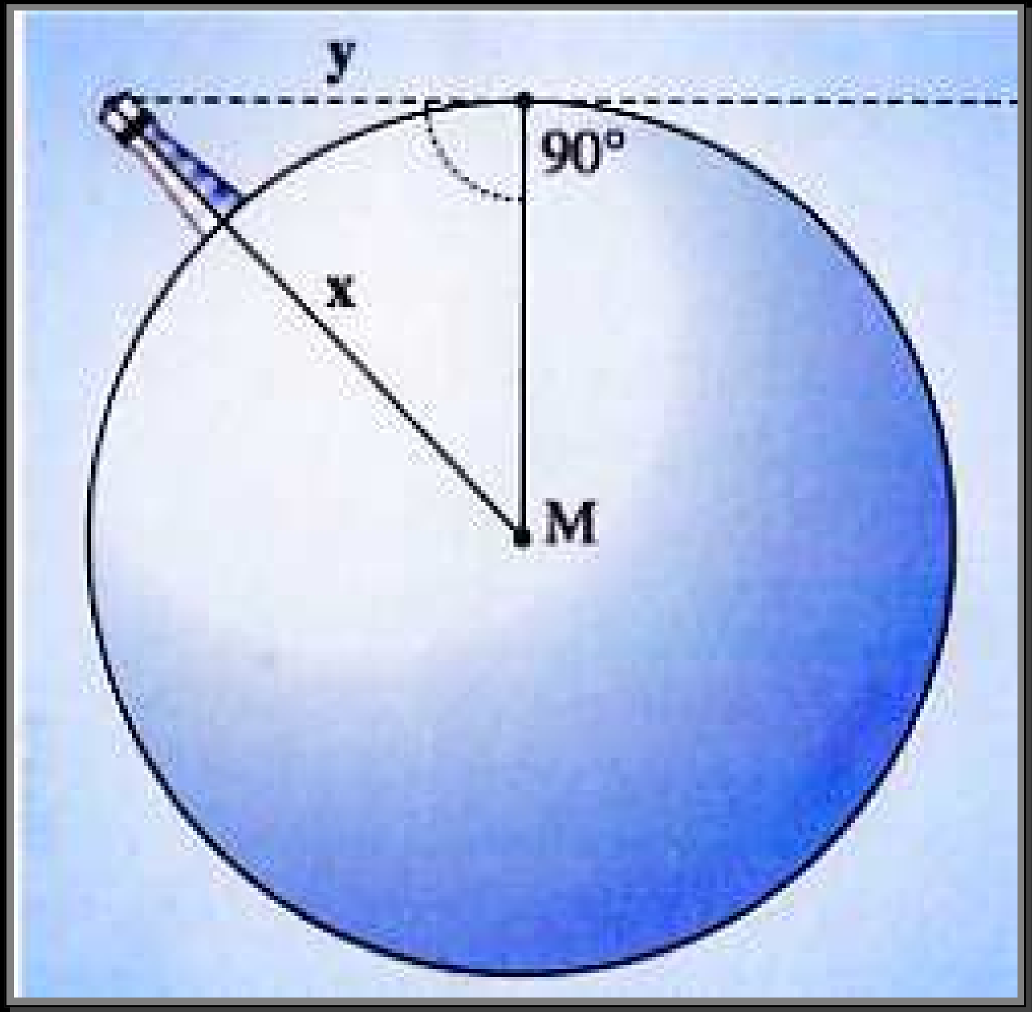
Hier ist die Erdkrümmung noch nicht in die Vorstellung eingeflossen, ein wirklicher Horizont ist noch nicht erkennbar.



Hier kommt zwar die Erdkrümmung mit ins Spiel, aber der Turm hat noch keine Beziehung mit der Erde



Jetzt steht auch der Turm richtig, aber ein neues Problem taucht auf. Wie finde ich genau den Berührpunkt der Sichtlinie mit dem Erdkreis?



Jetzt wird auch der Lösungsweg sichtbar.

Mathematische Kompetenzen

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und Lösungswege reflektieren.

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und Lösungswege reflektieren.

K 3 Mathematisch modellieren

K 3 Mathematisch modellieren

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,

K 3 Mathematisch modellieren

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in den jeweiligen mathematischen Modellen arbeiten,

K 3 Mathematisch modellieren

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in den jeweiligen mathematischen Modellen arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.

K 4 Mathematische Darstellungen verwenden

K 4 Mathematische Darstellungen verwenden

K 5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

K 4 Mathematische Darstellungen verwenden

K 5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

K 6 Kommunizieren

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieses Niveau umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieses Niveau umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieses Niveau umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieses Niveau umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u. a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.

Modellbildung

Modellbildung

Situation
(Daten und Beziehungen)

Modellbildung

mathematisches Modell

Situation
(Daten und Beziehungen)

Modellbildung

mathematisches Modell

Situation
(Daten und Beziehungen)

Modellbildung

mathematisches Modell

↑ Mathematisieren

Situation
(Daten und Beziehungen)

Modellbildung

mathematisches Modell

mathematische Lösung

Mathematisieren

Situation
(Daten und Beziehungen)

Modellbildung

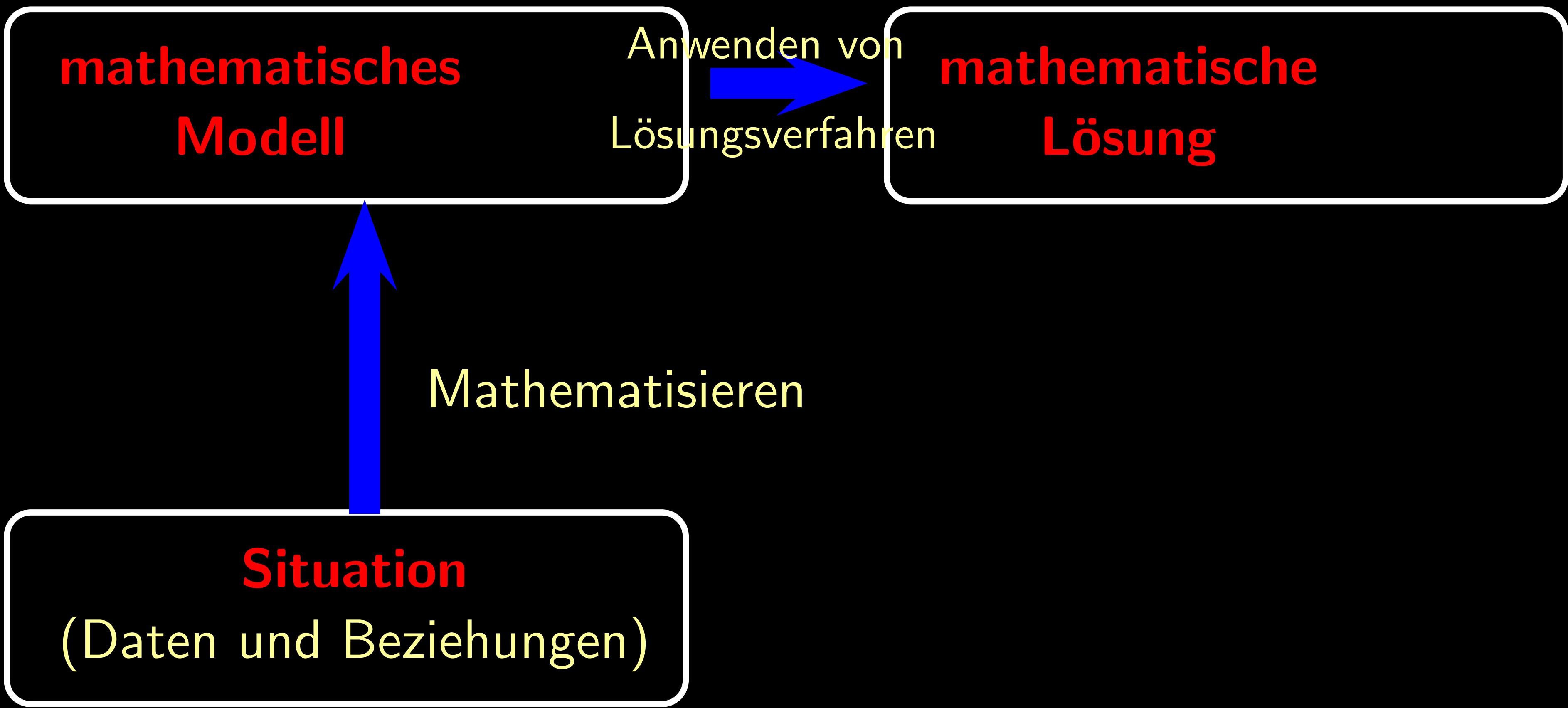
mathematisches Modell

mathematische Lösung

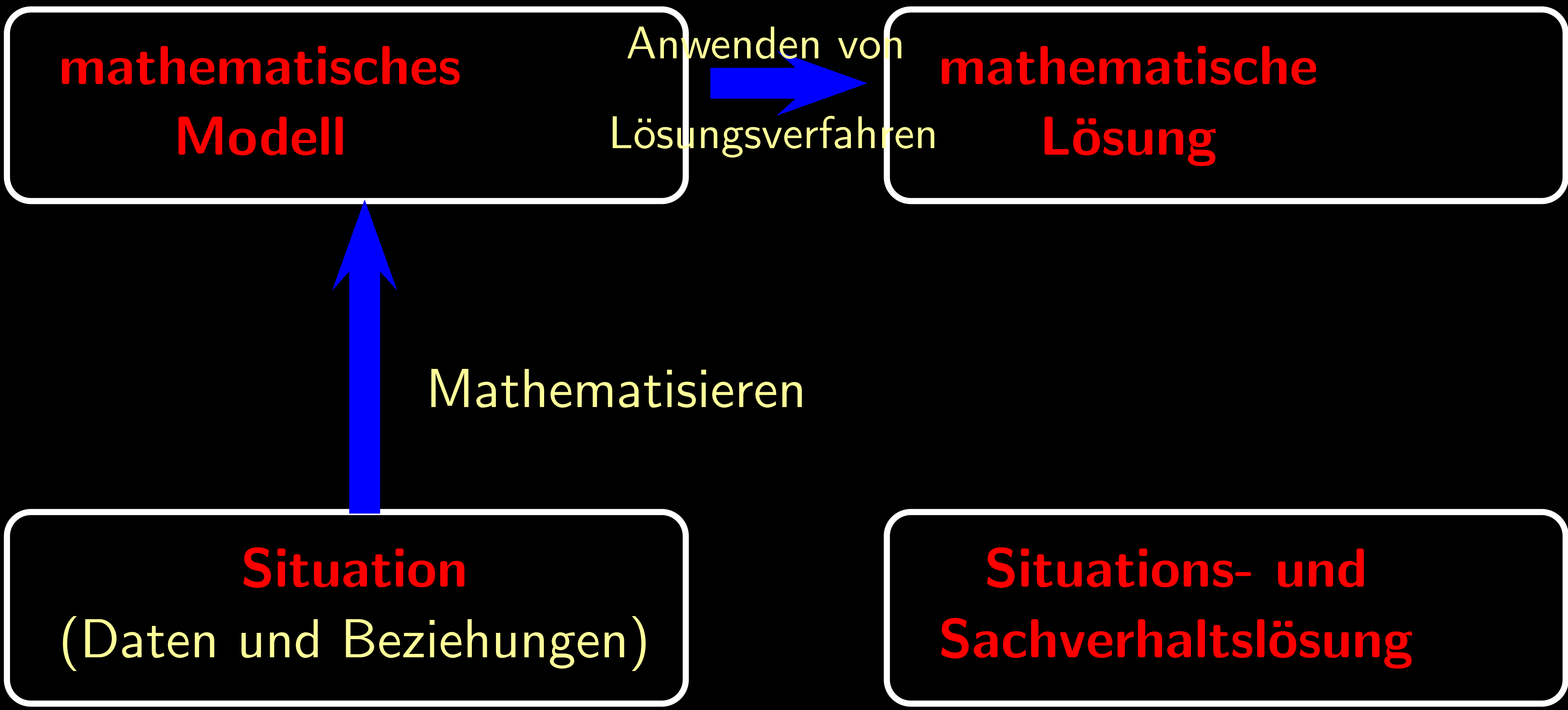
Mathematisieren

Situation
(Daten und Beziehungen)

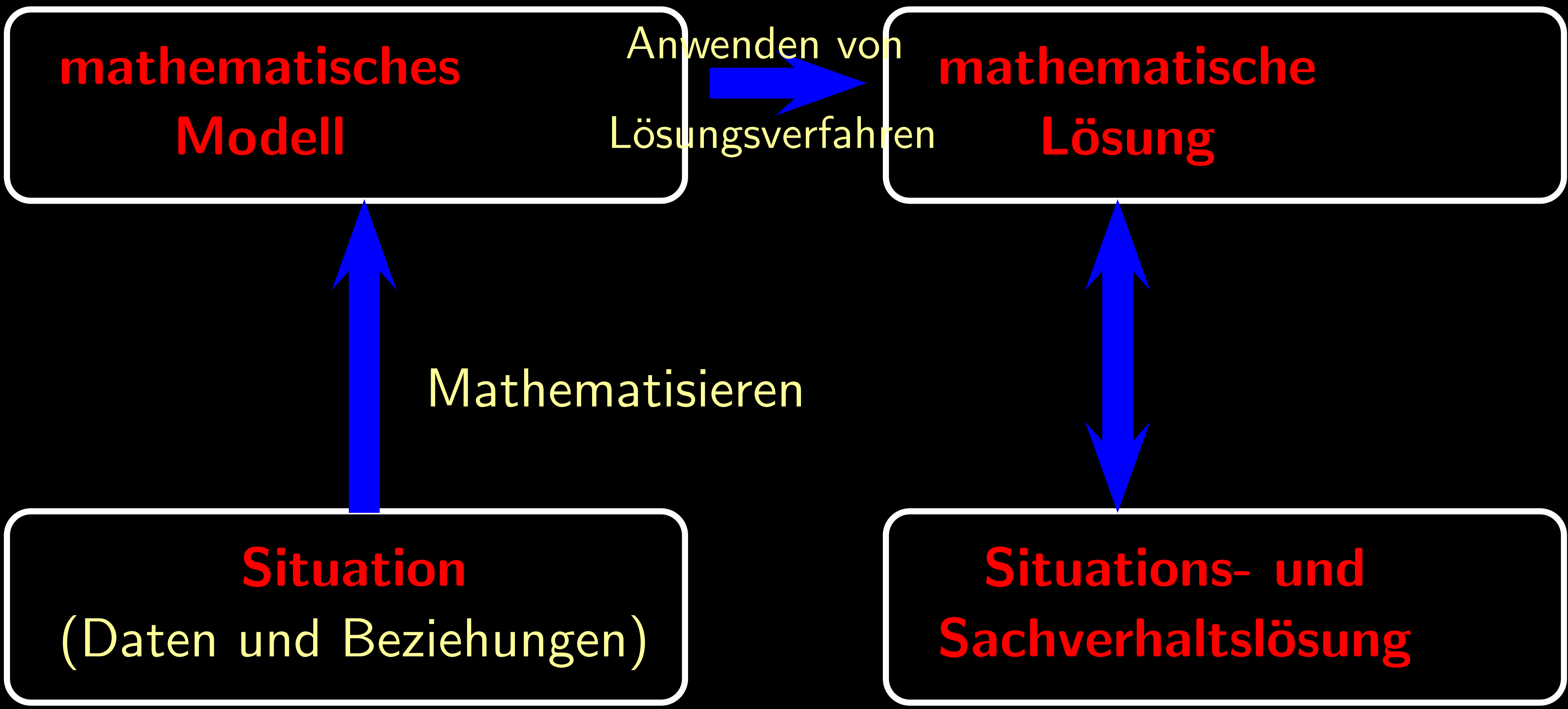
Modellbildung



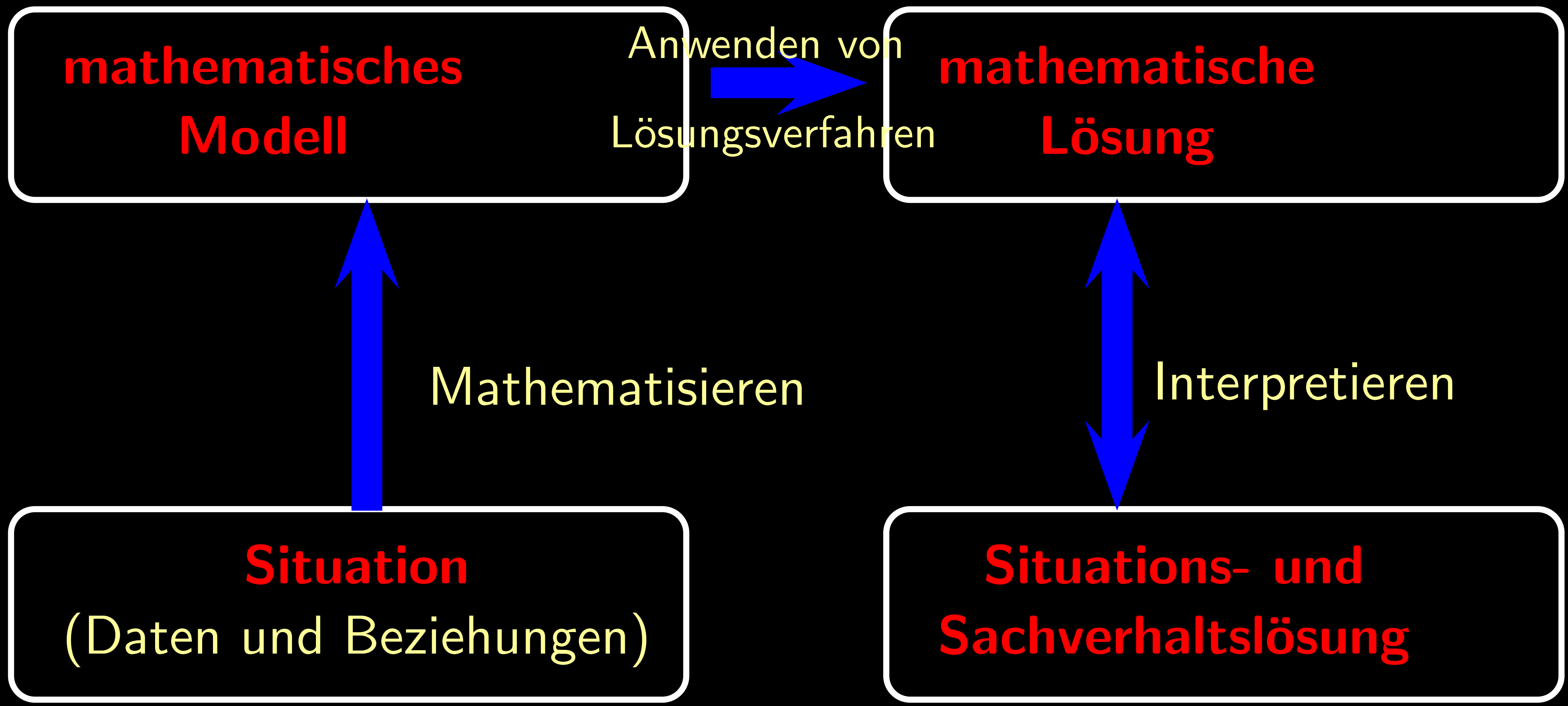
Modellbildung



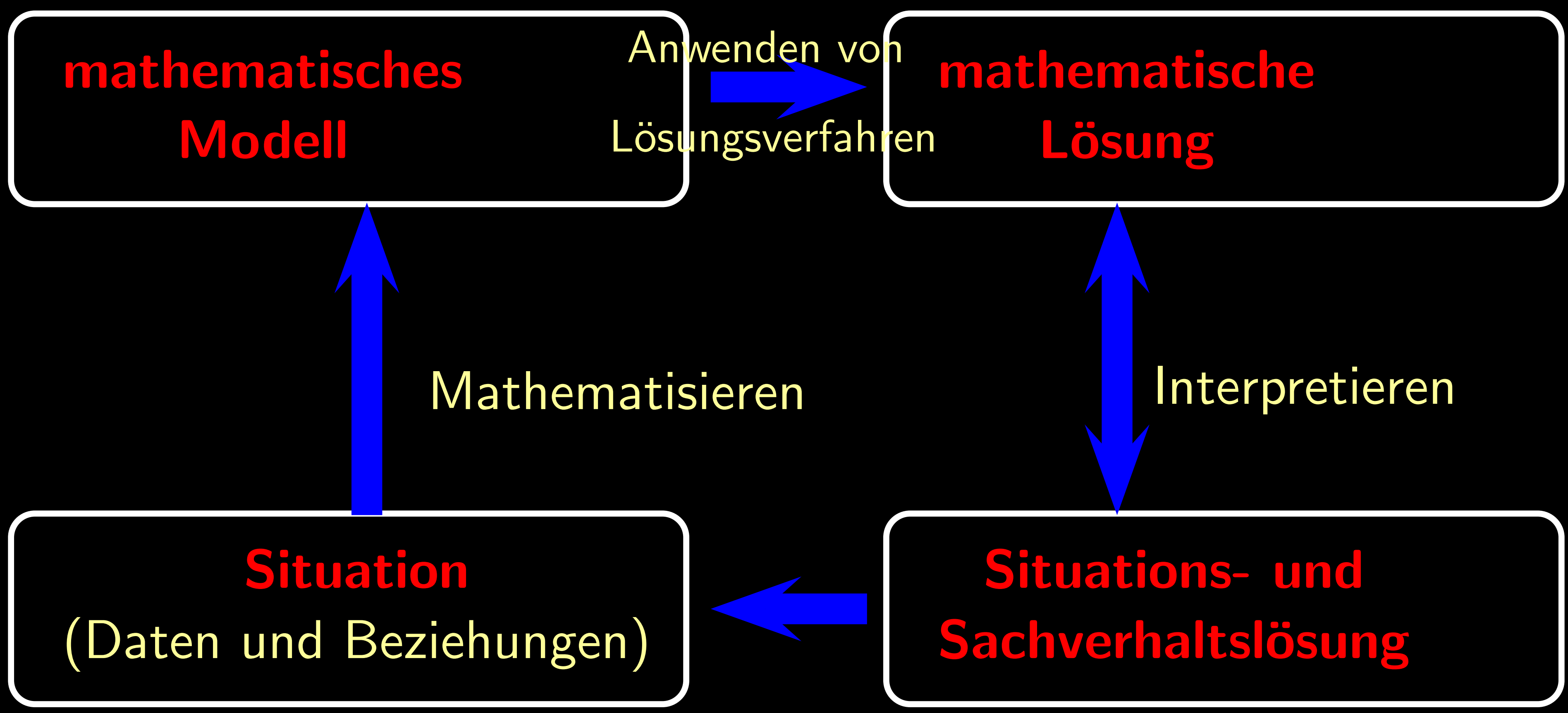
Modellbildung



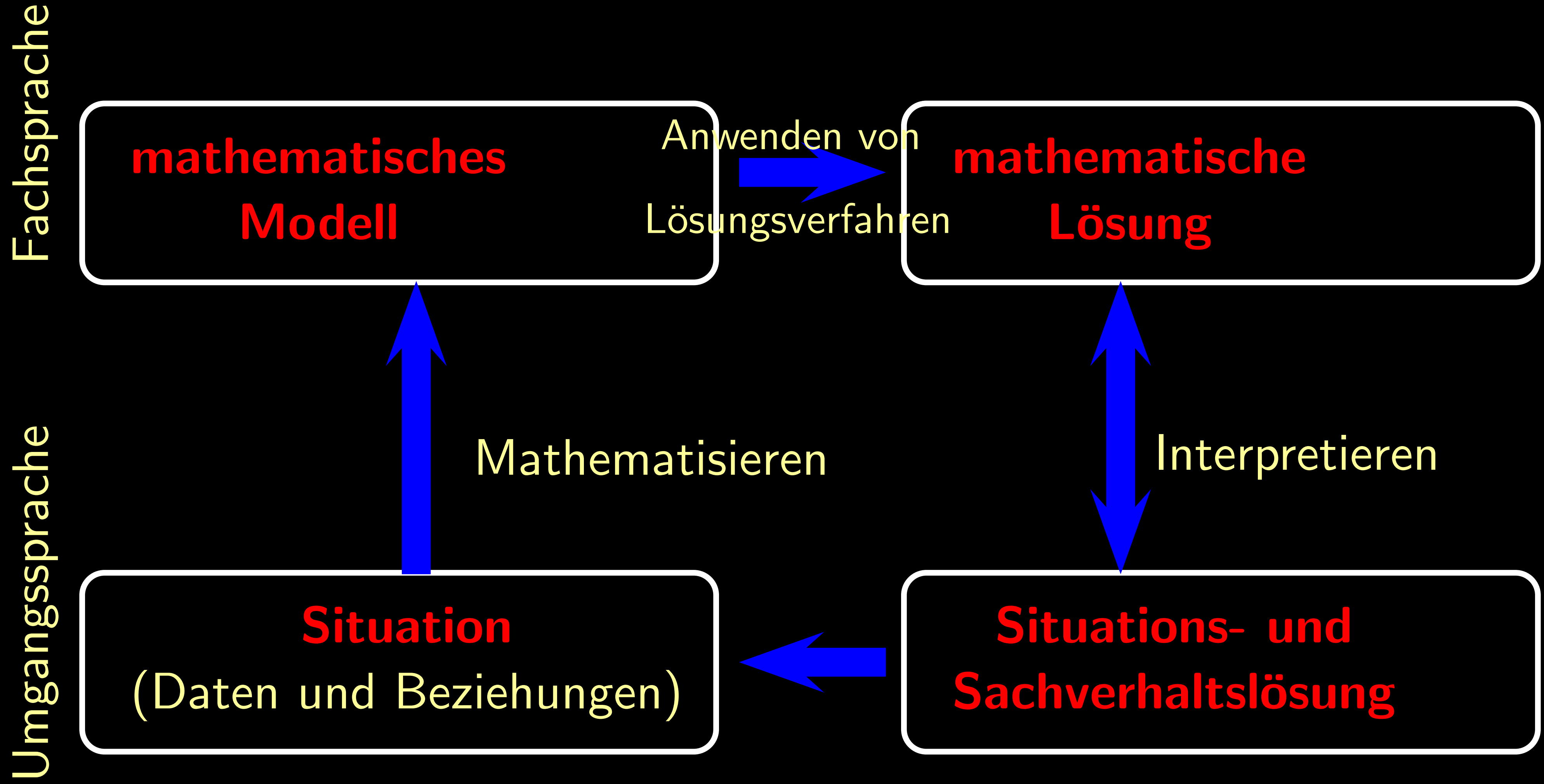
Modellbildung



Modellbildung



Modellbildung



Modellbildungskreislauf in 6 Phasen

Reale Welt

Reale Welt

Mathematische Welt

Reale Welt

Mathematische Welt

1. Phase

Problem-

situation

Reale Welt

Mathematische Welt

1. Phase

Problem-

situation

Reale Welt

Mathematische Welt

2. Phase

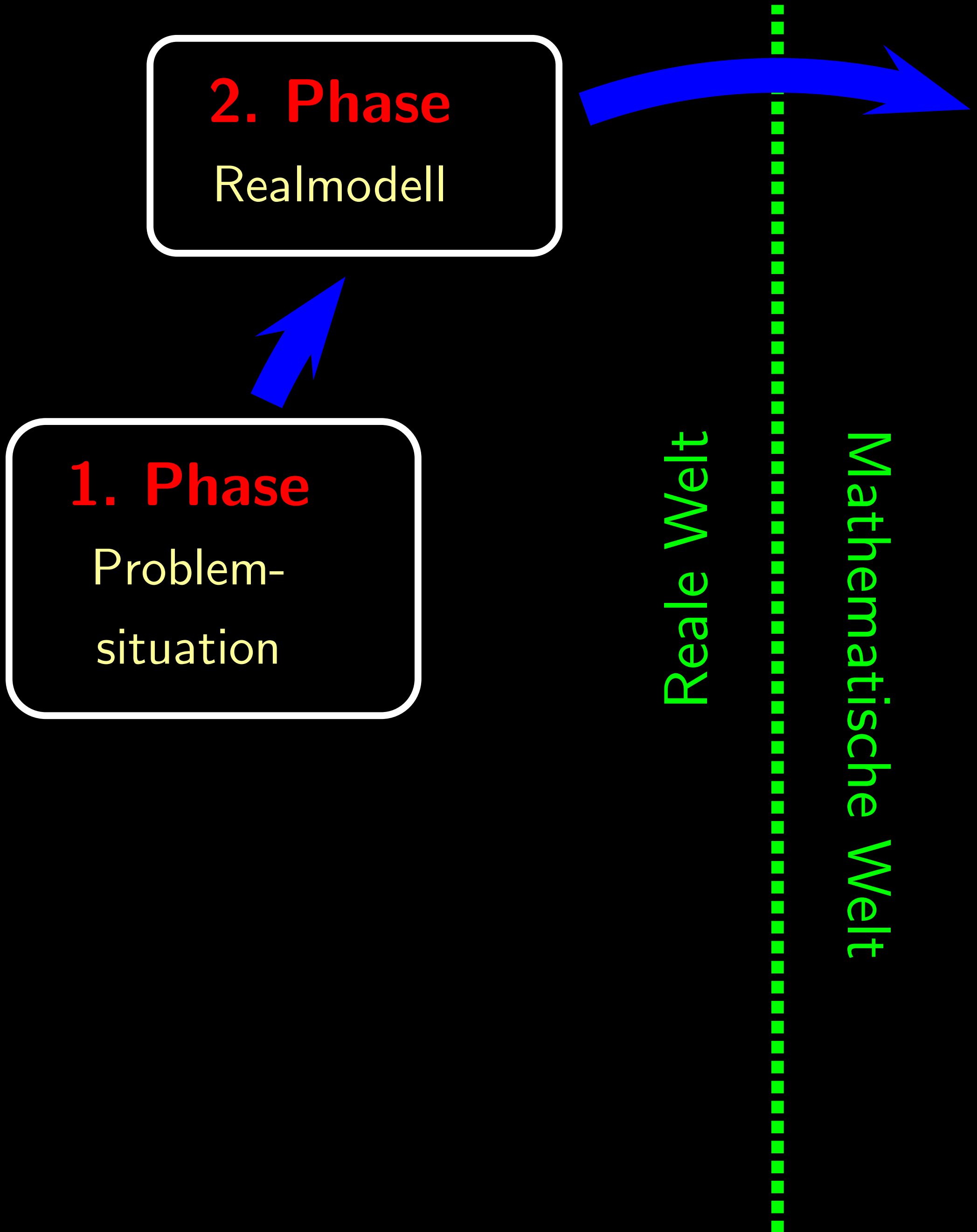
Realmodell

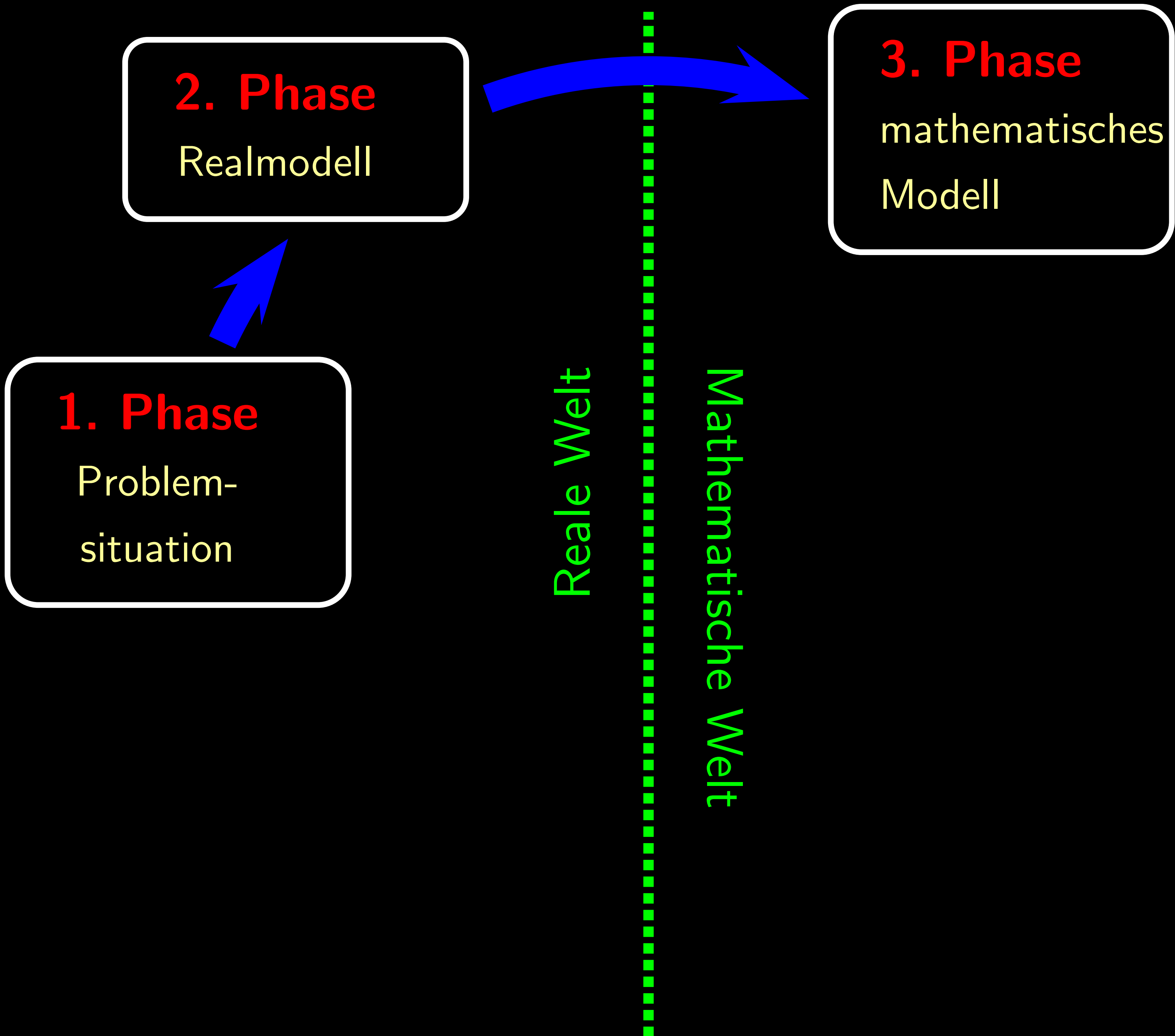
1. Phase

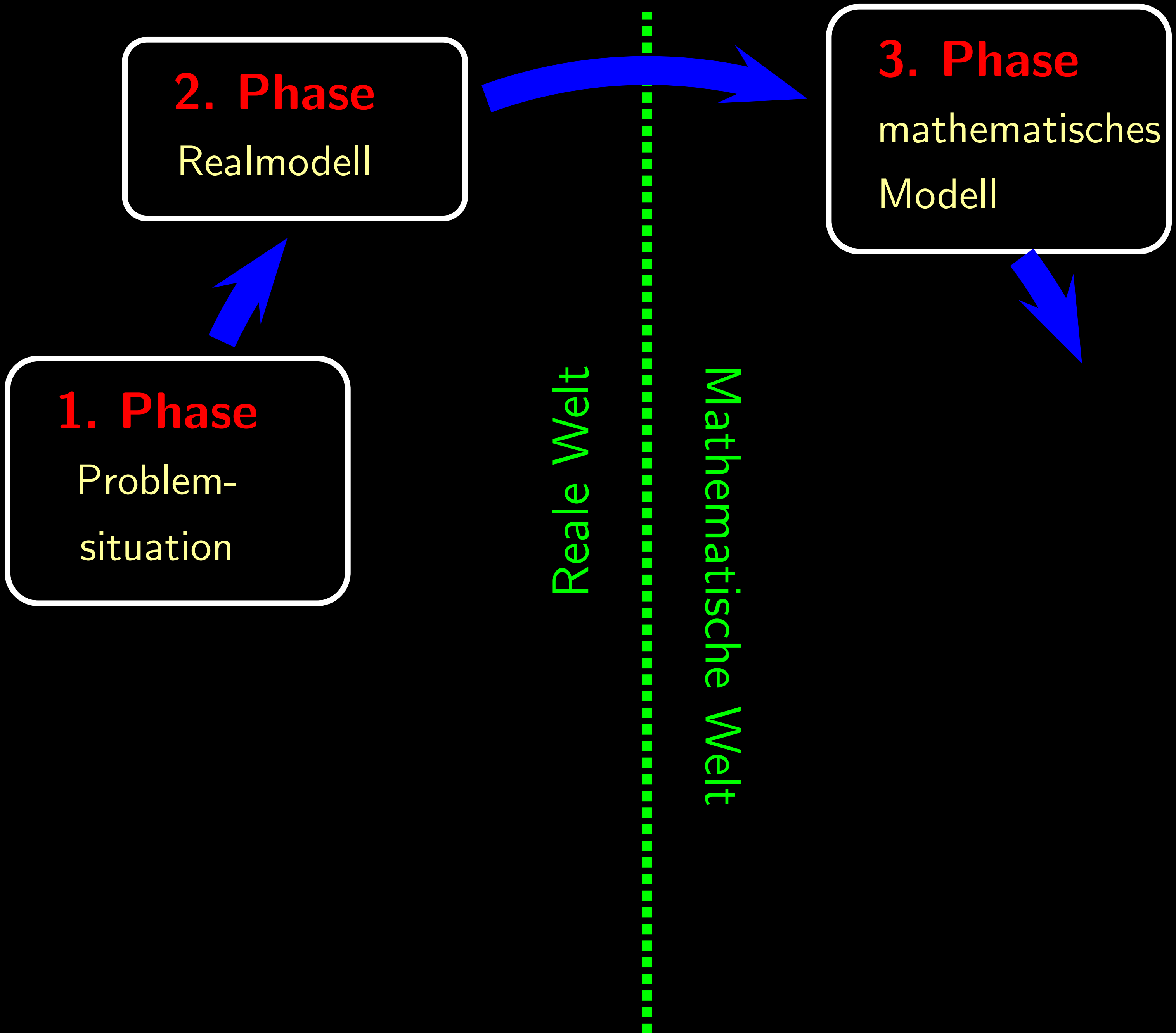
Problem-
situation

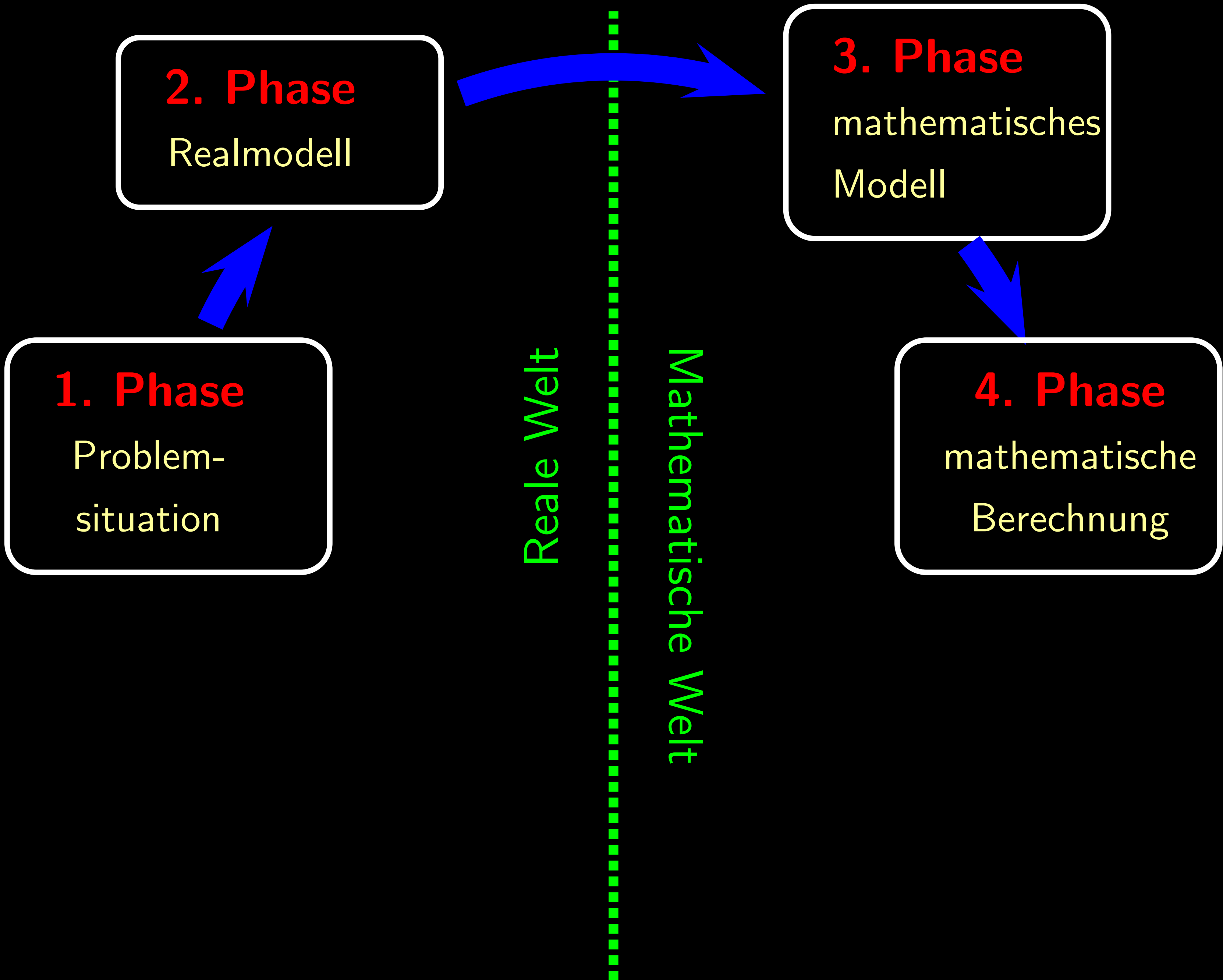
Reale Welt

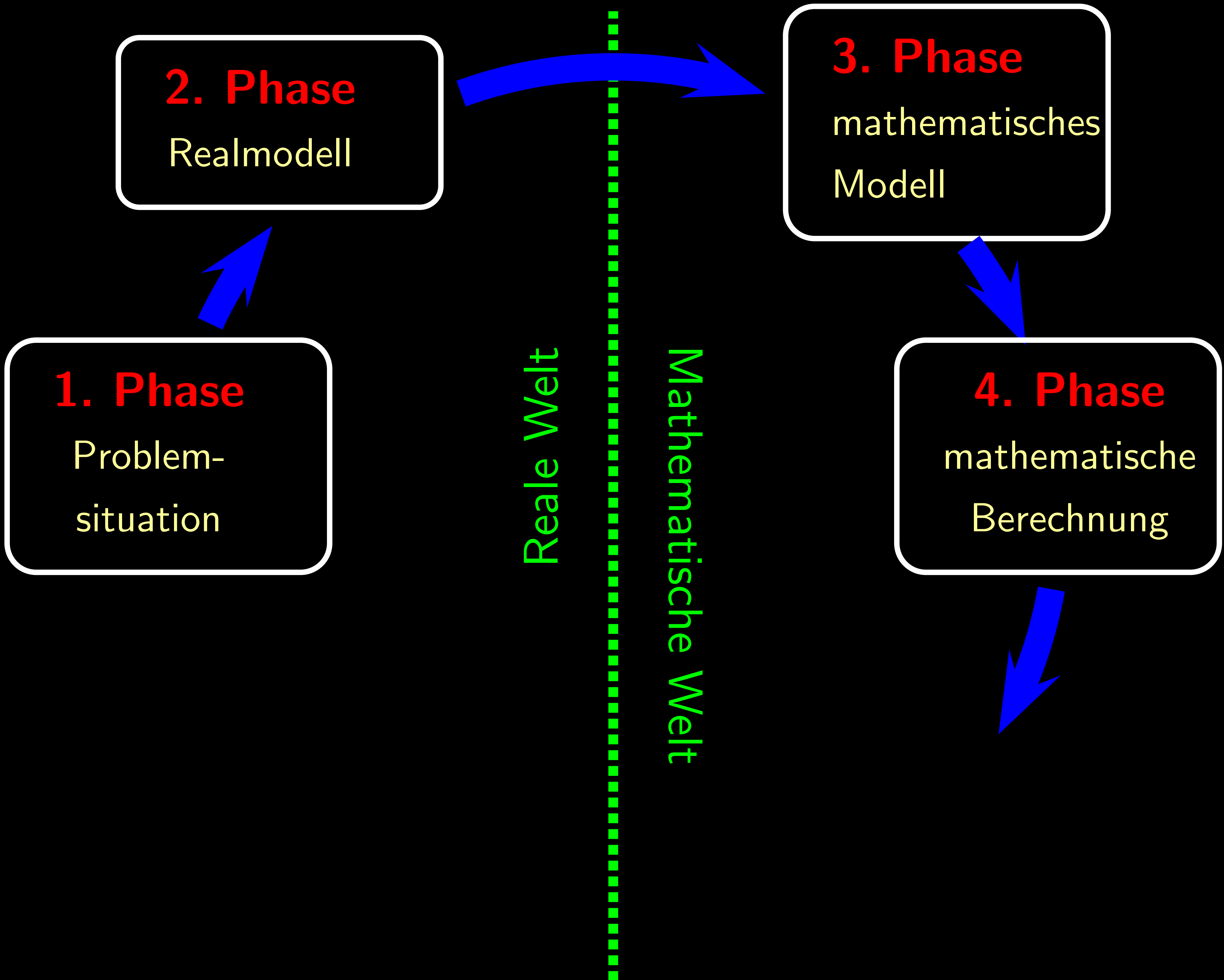
Mathematische Welt

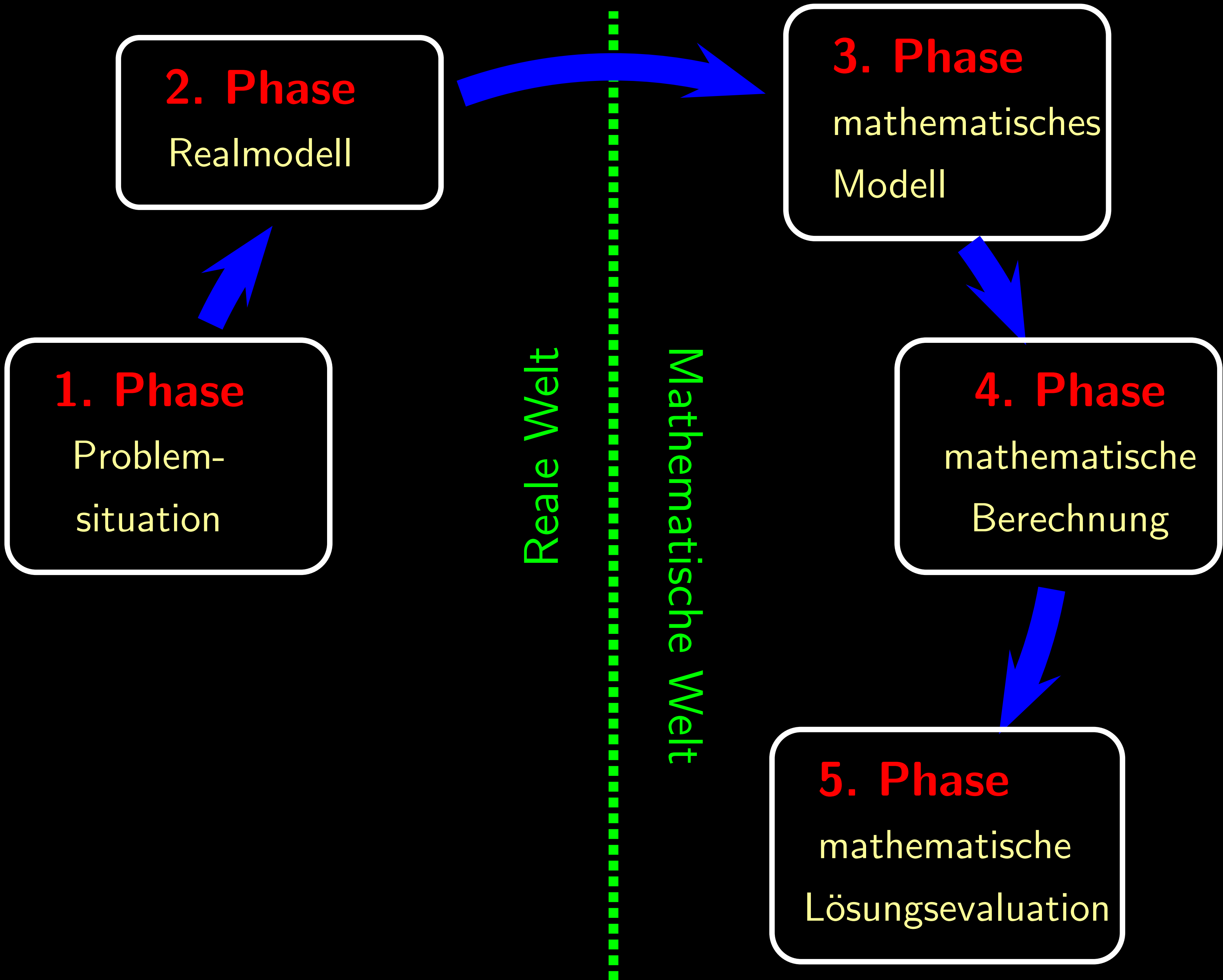

2. Phase
Realmodell
1. Phase
Problem-
situation
Reale Welt
Mathematische Welt

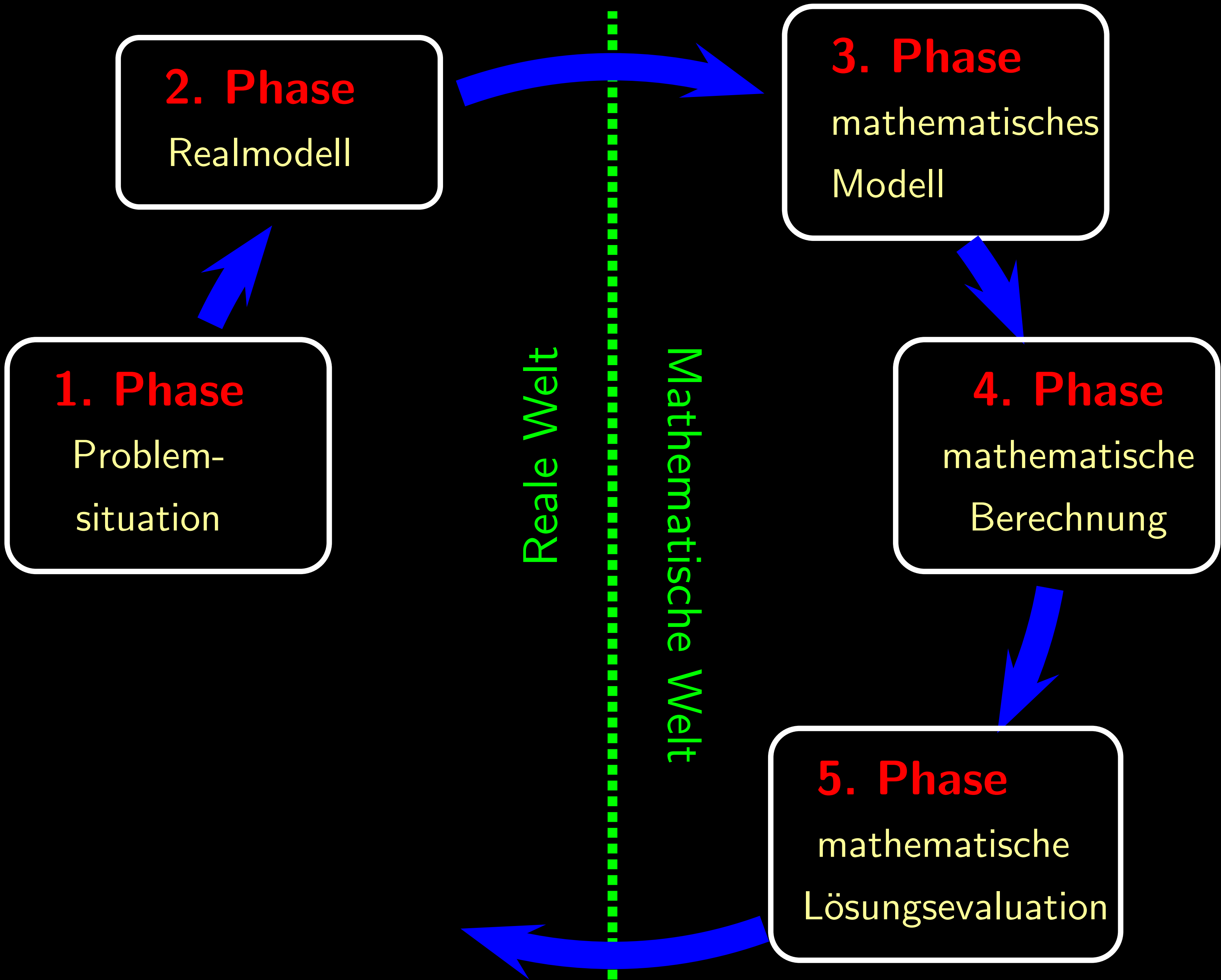

2. Phase
Realmodell
3. Phase
mathematisches
Modell
1. Phase
Problem-
situation
Reale Welt
Mathematische Welt

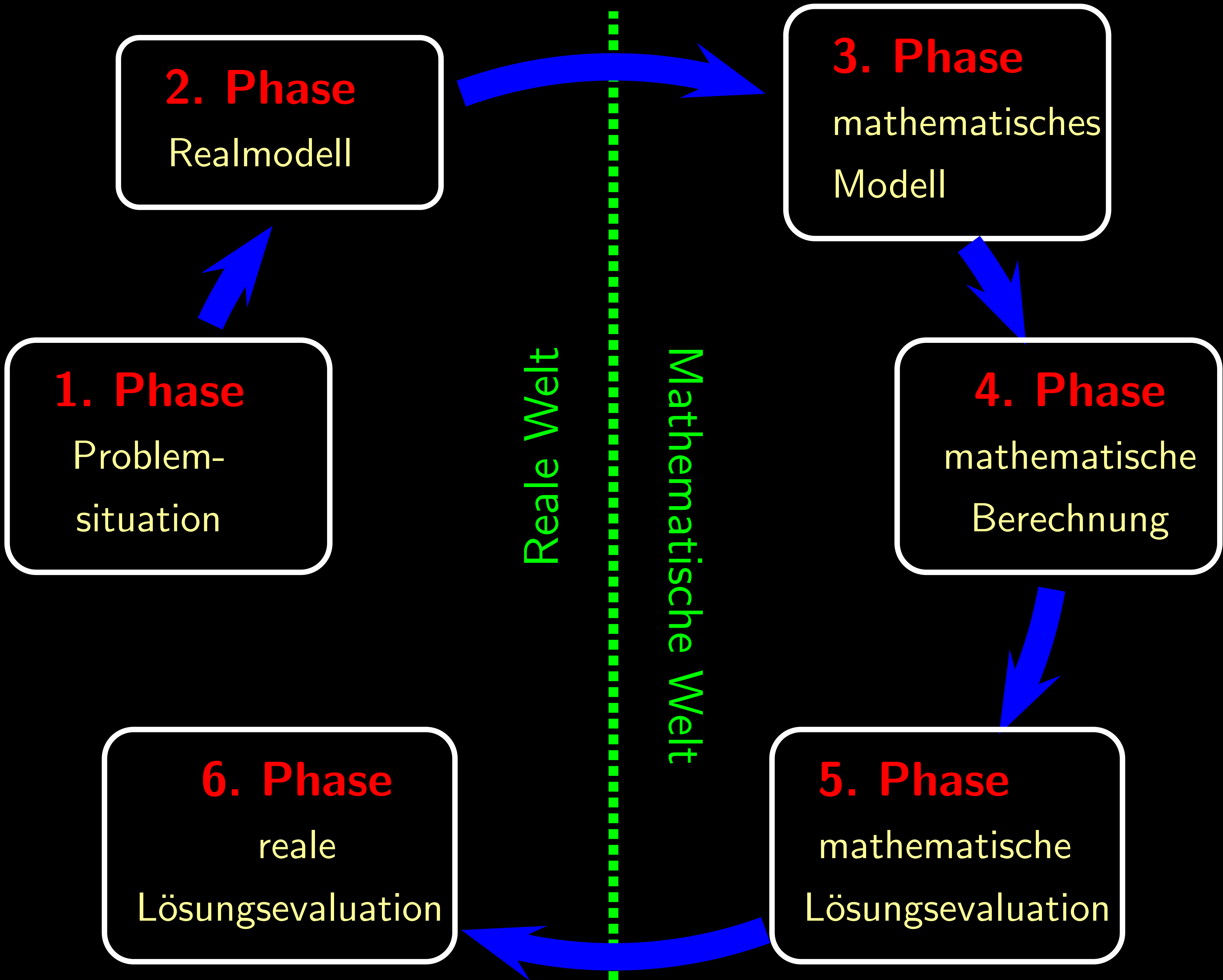

2. Phase
Realmodell
3. Phase
mathematisches
Modell
1. Phase
Problem-
situation
Reale Welt
Mathematische Welt


2. Phase
Realmodell
3. Phase
mathematisches
Modell
1. Phase
Problem-
situation
Reale Welt
Mathematische Welt
4. Phase
mathematische
Berechnung

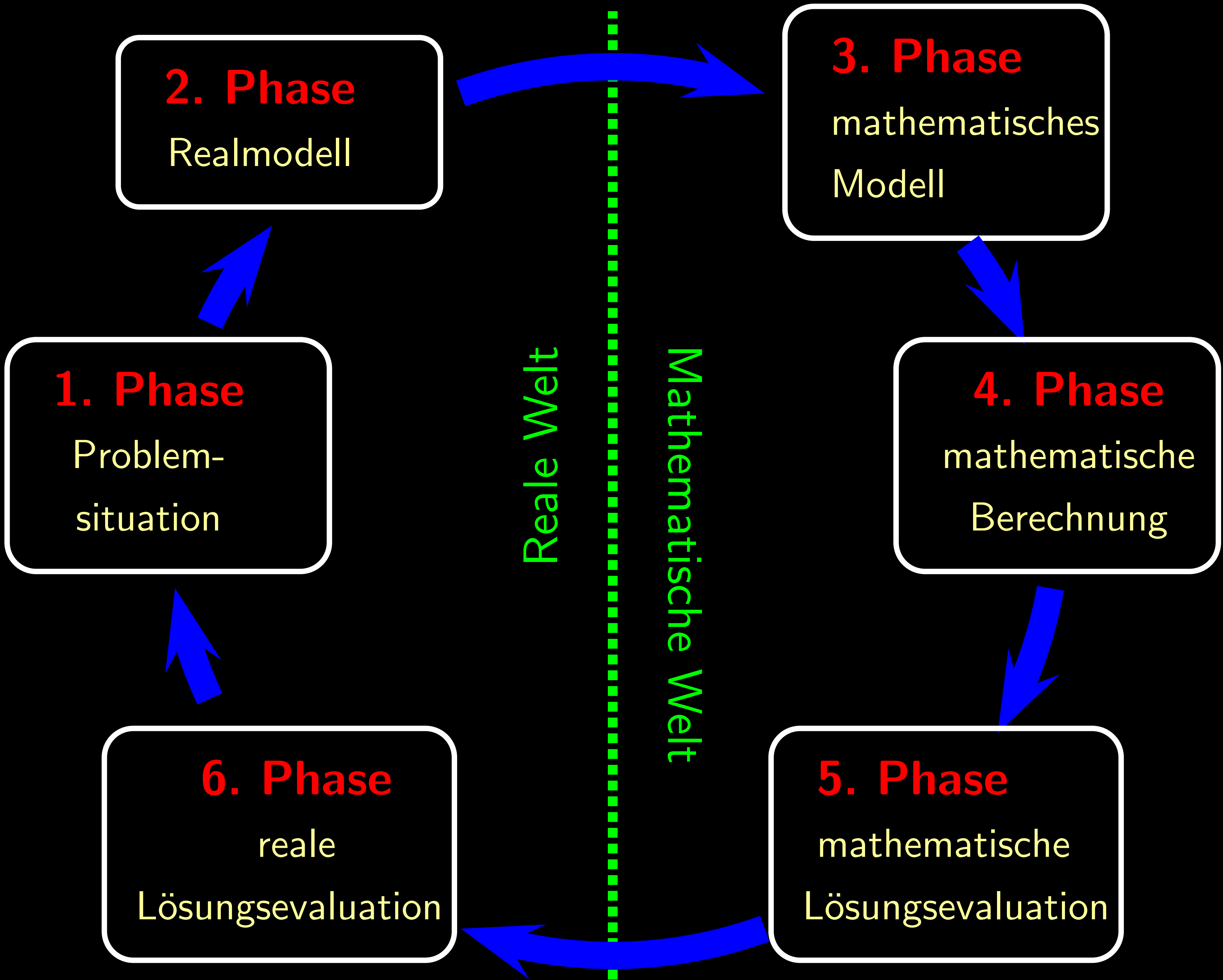

2. Phase
Realmodell
3. Phase
mathematisches
Modell
1. Phase
Problem-
situation
Reale Welt
Mathematische Welt
4. Phase
mathematische
Berechnung


2. Phase
Realmodell
1. Phase
Problem-
situation
Reale Welt
Mathematische Welt
3. Phase
mathematisches
Modell
4. Phase
mathematische
Berechnung
5. Phase
mathematische
Lösungsevaluation


2. Phase
Realmodell
3. Phase
mathematisches
Modell
1. Phase
Problem-
situation
Reale Welt
Mathematische Welt
4. Phase
mathematische
Berechnung
5. Phase
mathematische
Lösungsevaluation



2. Phase
Realmodell
3. Phase
mathematisches
Modell
1. Phase
Problem-
situation
Reale Welt
Mathematische Welt
4. Phase
mathematische
Berechnung
6. Phase
reale
Lösungsevaluation
5. Phase
mathematische
Lösungsevaluation


2. Phase
Realmodell
3. Phase
mathematisches Modell
1. Phase
Problem-situation
Reale Welt
Mathematische Welt
4. Phase
mathematische Berechnung
6. Phase
reale Lösungsevaluation
5. Phase
mathematische Lösungsevaluation

Radiomeldung: 3 km Stau auf der A 2

Radiomeldung: 3 km Stau auf der A 2

Wie viele Autos stecken wohl im Stau fest? Stelle eine Formel auf, mit der man die Anzahl der im Stau steckenden Autos bestimmen kann?

Radiomeldung: 3 km Stau auf der A 2

Wie viele Autos stecken wohl im Stau fest? Stelle eine Formel auf, mit der man die Anzahl der im Stau steckenden Autos bestimmen kann?

Wie könnte man die Anzahl der Fahrzeuge berechnen?

1. Festellen funktionaler Abhängigkeiten (Einflußgrößen)

1. Festellen funktionaler Abhängigkeiten (Einflußgrößen)

Einflußgröße	Bezeichnung	Typ
Länge des PKW von vorderer Stoßstange bis zur Stoßstange des nachfolgenden Kfz	$P(m)$	Eingangsgröße
Länge des LKW von vorderer Stoßstange bis zur Stoßstange des nachfolgenden Kfz	$L(m)$	Eingangsgröße
Wochentag		Eingangsgröße
Anzahl der Kfz im Stau	A	Ausgangsgröße

2. Modellannahmen (Idealisierung)

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.
- Es handelt sich um einen gewöhnlichen Werktag.

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.
- Es handelt sich um einen gewöhnlichen Werktag.
- P wird mit 6 m angenommen.

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.
- Es handelt sich um einen gewöhnlichen Werktag.
- P wird mit 6 m angenommen.
- Auf der linken Fahrspur stehen nur PKW. Auf der rechten Fahrspur kommen PKW und LKW (wozu auch Busse zählen) gemischt vor. Aus eigenen Erfahrungen schätzen die Schüler, dass auf zehn PKW im Schnitt ein LKW kommt.

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.
- Es handelt sich um einen gewöhnlichen Werktag.
- P wird mit 6 m angenommen.
- Auf der linken Fahrspur stehen nur PKW. Auf der rechten Fahrspur kommen PKW und LKW (wozu auch Busse zählen) gemischt vor. Aus eigenen Erfahrungen schätzen die Schüler, dass auf zehn PKW im Schnitt ein LKW kommt.
- Die Länge L wird mit 15 m angenommen.

3. Modellierung

3. Modellierung

Anzahl A (der Autos) ist

$$A = \text{Autos auf der linken Spur} \; + \; \text{Autos auf der rechten Spur.}$$

3. Modellierung

Anzahl A (der Autos) ist

$$A = \text{Autos auf der linken Spur} + \text{Autos auf der rechten Spur.}$$

4. Modell

3. Modellierung

Anzahl A (der Autos) ist

$$A = \text{Autos auf der linken Spur} \; + \; \text{Autos auf der rechten Spur.}$$

4. Modell

$$A = \frac{3000}{P} + \frac{3000}{\frac{10P+L}{11}}$$

5. Modelllösung

5. Modelllösung

$$A = \frac{3000}{6} + \frac{3000}{\frac{60+15}{11}} = 940.$$

5. Modelllösung

$$A = \frac{3000}{6} + \frac{3000}{\frac{60+15}{11}} = 940.$$

6. Modellevaluation

5. Modelllösung

$$A = \frac{3000}{6} + \frac{3000}{\frac{60+15}{11}} = 940.$$

6. Modellevaluation

- Da kein Fahrzeug kürzer als 3 m und nicht länger als 30 m ist, muss A (Anzahl der Autos) zwischen 200 und 2000 liegen.

- Stau am Wochenende bedingt LKW – freie Autobahnen (Modellansatz).

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

- Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben.

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

- Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben.
- Fähigkeit einzelne Phasen zu charakterisieren.

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

- Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben.
- Fähigkeit einzelne Phasen zu charakterisieren.
- Fähigkeit einzelne Phasen zu unterscheiden bzw. während eines Modellbildungsprozesses zu lokalisieren.

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

- Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln.

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

- Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln.
- Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven.

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

- Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln.
- Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven.
- Fähigkeit zur selbstständigen Modellbildung (Informationen aus einem Sachverhalt und Daten auswerten, Variabilisierung, Aufstellen eines Modells, Modelllösung, Bewertung der Modelllösung).

Stufe III: Reflexion über Modellbildung

Stufe III: Reflexion über Modellbildung

- Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses.

Stufe III: Reflexion über Modellbildung

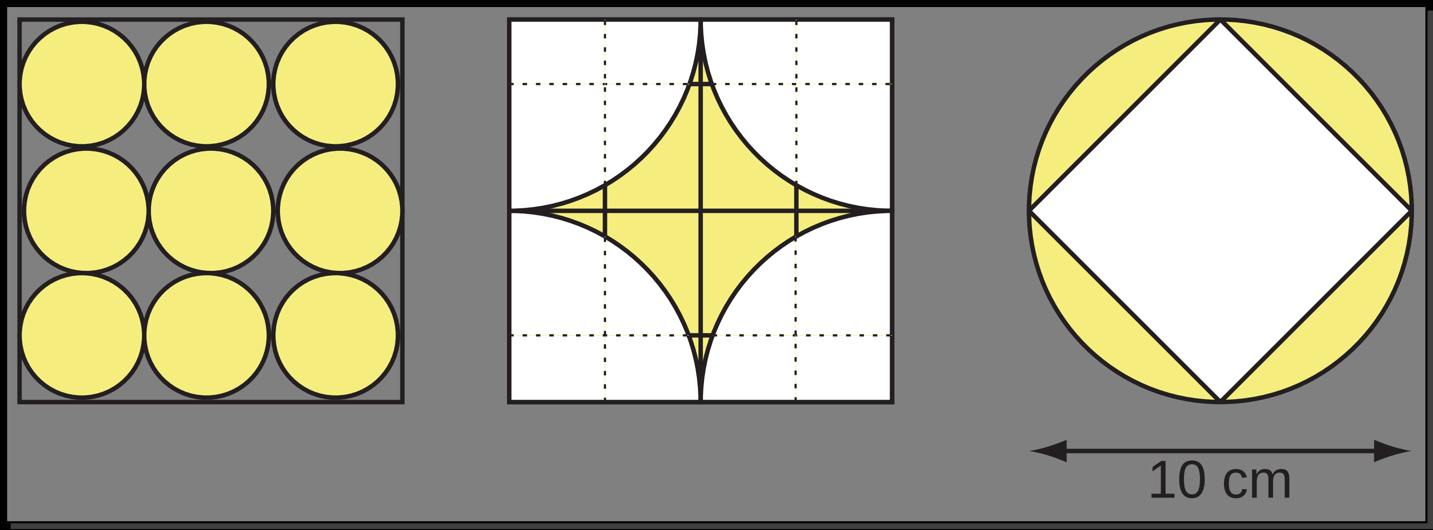
- Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses.
- Fähigkeit über den Anlass von Modellbildung zu reflektieren.

Stufe III: Reflexion über Modellbildung

- Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses.
- Fähigkeit über den Anlass von Modellbildung zu reflektieren.
- Fähigkeit Kriterien der Modellbildungsevaluation zu charakterisieren.

Flächen (Stufe II)

Gib jeweils eine Formel zur Berechnung der weißen Flächen an. Notwendige Annahmen, Vereinfachungen und Variablen sind explizit anzugeben.



Entfernungsmessung (Stufe III)

Mittels eines Laufrades werden Entfernungen (z. B. bei Verkehrsunfällen) gemessen.

a) Schildere stichpunktartig die Methode der Entfernungsmessung mittels Laufrad.

b) Wie könnte man die Qualität (Genauigkeit) der Entfernungsmessung mittels Laufrad überprüfen?

c) Von welchen Einflussgrößen hängt die Genauigkeit der Entfernungsmessung mittels Laufrad ab?

d) Welche der in Aufgabe c) genannten Einflussgrößen sind mathematisch leicht berechenbar und welche sind deiner Meinung nach eher schwer berechenbar?

Herzschlag

Während sportlicher Aktivitäten sollte die Herzfrequenz eines Menschen bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Diese maximale Grenze der Herzfrequenz hängt u. a. vom Lebensalter des Menschen, seiner körperlichen Fitness, dem Geschlecht und dem Ruhepuls (Herzfrequenz ohne Anstrengung) ab. Einige Beispieldaten sind in der Tabelle dargestellt.

max. Herzfrequenz	180	190	195	185
Lebensalter	40	30	18	35

Die Schüler einer 8-ten Klasse sollten in einem Mathematikprojekt eine Formel zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz aufstellen und erarbeiteten die Formel

$$f = 220 - a.$$

a) Beschreibe stichpunktartig, wie die Schüler die Formel erhalten haben könnten.

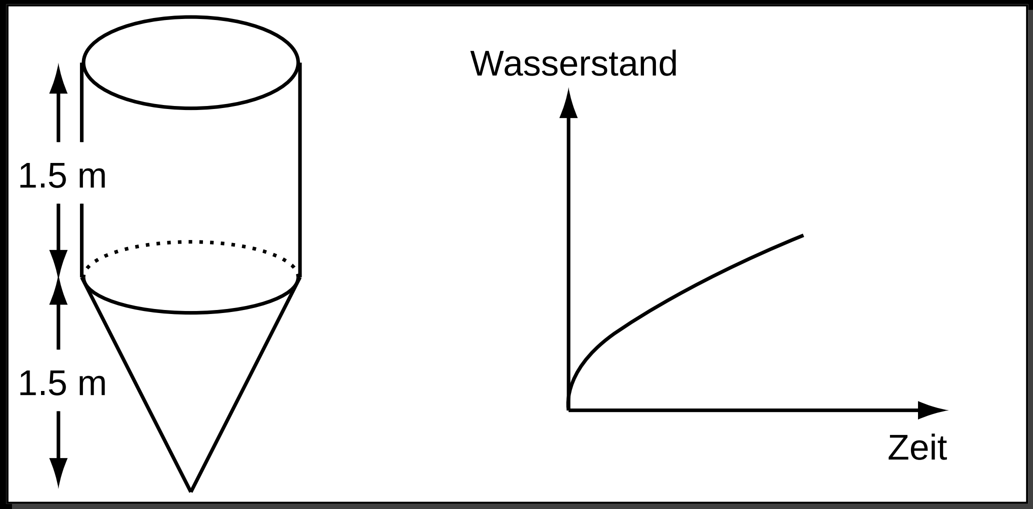
b) Welche Möglichkeiten könnten die Schüler genutzt haben, um die aufgestellte Formel zu überprüfen.
Auf der Basis weiterer Daten veränderten die Schüler die Berechnungsvorschrift und erhielten am Ende des Mathematikprojektes die Formel

$$f = 208 - (0.7a).$$

c) Wie könnten die Schüler auf die zweite Formel gekommen sein?

d) Welche weiteren Schritte könnten unternommen werden, um die Formel zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz zu verbessern.

Wassertank



In einer Mathematikstunde sollen die Schüler den Füllvorgang eines Wassertanks beschreiben. Der Wassertank ist insgesamt 1 Meter breit, zu Beginn leer und wird dann mit einer Rate von 1 Liter pro Sekunde gefüllt. Die Schüler erhalten vom Lehrer weitere Angaben zur Form und den Abmessungen des Wassertanks.

Du siehst hier das Ergebnis eines Schülers. Er hat den Wassertank skizziert und in einem Graphen dargestellt, wie sich der Wasserstand im Laufe der Zeit ändert.

a) Wie könnte der Schüler den Verlauf des Graphen ermittelt haben?

b) Gibt es Angaben, die der Schüler nicht verwendet hat? Wenn ja, welche? Der Lehrer bewertet das Ergebnis als gute Idee und ermutigt den Schüler eine Formel zur Berechnung des Wasserstandes aufzustellen.

c) Welche Schritte müsste der Schüler als nächstes unternehmen, um eine Formel zur Berechnung des Wasserstandes aufzustellen?

Alarmanlagen

Es werden von der Polizei jährlich Statistiken über die Anzahl der Wohnungs- und Hauseinbrüche in einer Stadt geführt. Aus dieser Statistik hat sich ein Hersteller von Alarmanlagen die folgenden Jahre herausgesucht:

Jahr	1960	1965	1970	1975	1980	1984
Zahl der Einbrüche	110	200	330	480	590	550

Der Hersteller der Alarmanlagen hat diese Daten genutzt, um folgenden Werbespruch zu begründen: *Alle 10 Jahre verdoppelt oder verdreifacht sich die Zahl der Einbrüche. Kaufen Sie jetzt eine Alarmanlage, bevor auch bei Ihnen eingebrochen wird!*

a) Ist der erste Satz des Werbeslogans korrekt? Begründe deine Antwort.

b) Warum könnte der Hersteller gerade diese Daten ausgewählt haben?

c) Warum könnte der Hersteller Daten gewählt haben, die mindestens 20 Jahre alt sind? Stell dir vor, deine Eltern arbeiten bei der Polizei und erzählen dir, dass solche Statistiken zukünftig vielleicht nicht mehr geführt werden.

d) Erkläre kurz, welche Vor- oder Nachteile solche Statistiken haben könnten.

Ein Auto – Zwei Bremsvorgänge

Die Messung des Bremsweges eines Autos hat in zwei verschiedenen Fällen folgende Werte ergeben:

Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	50	75	100	125	150	175
Bremsweg s in m	14	31	55	86	125	170

Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	50	75	100	125	150	175
Bremsweg s in m	23	55	98	153	220	300

a) Welche Umstände können zu diesen unterschiedlichen Messergebnissen geführt haben?

b) In der Fahrschule lernt man folgende Faustregel zur Berechnung des Bremsweges:

$$s \text{ [in m]} = \frac{\left(v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{]}\right)^2}{100}$$

Wie ist diese Regel mit den Messwerten zu vereinen? Stelle eine geeignetere Faustregel auf!

c) Wie verändern sich die durchgeführten Betrachtungen bei Berücksichtigung der Reaktionszeit des Fahrers?

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufs

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufs

Ideales Körpergewicht

Das ideale Körpergewicht eines Menschen kann über verschiedene Faustregeln bestimmt werden. Die beiden bekanntesten seinen im Folgenden angegeben:

Faustformeln:

$$G = K - 100 \tag{1}$$

$$G = \frac{K^2}{400} \tag{2}$$

K. . . Körpergröße in cm
G. . . Idealgewicht in kg

a) Welche Faktoren sollte eine Faustregel zur Berechnung des idealen Körpergewichtes berücksichtigen? Inwieweit werden diese Berücksichtigungen von den Faustregeln (1) und (2) vorgenommen?

b) Für welche Werte von K sind die Regeln (1) und (2) sinnvoll? Wie weit weicht das ideale Körpergewicht beider Regeln höchstens voneinander ab?

c) Überprüfe die Regeln mit Hilfe der folgenden Gewichtstabelle eines Arztes:

Körpergröße in cm	160	170	180	190	200	210
Idealgewicht in kg	59	70	81	91	102	114

Für welche der beiden Regeln würdest du dich entscheiden?

Problemsituation verstehen

1. Problemsituation verstehen

   Das ideale Körpergewicht hängt von der Körpergröße der Person ab, jedoch auch von deren Geschlecht, Alter und Gesundheitszustand. Die beiden Faustregeln berücksichtigen ausschließlich die Körpergröße (Teilaufgabe a).

2. Realmodell

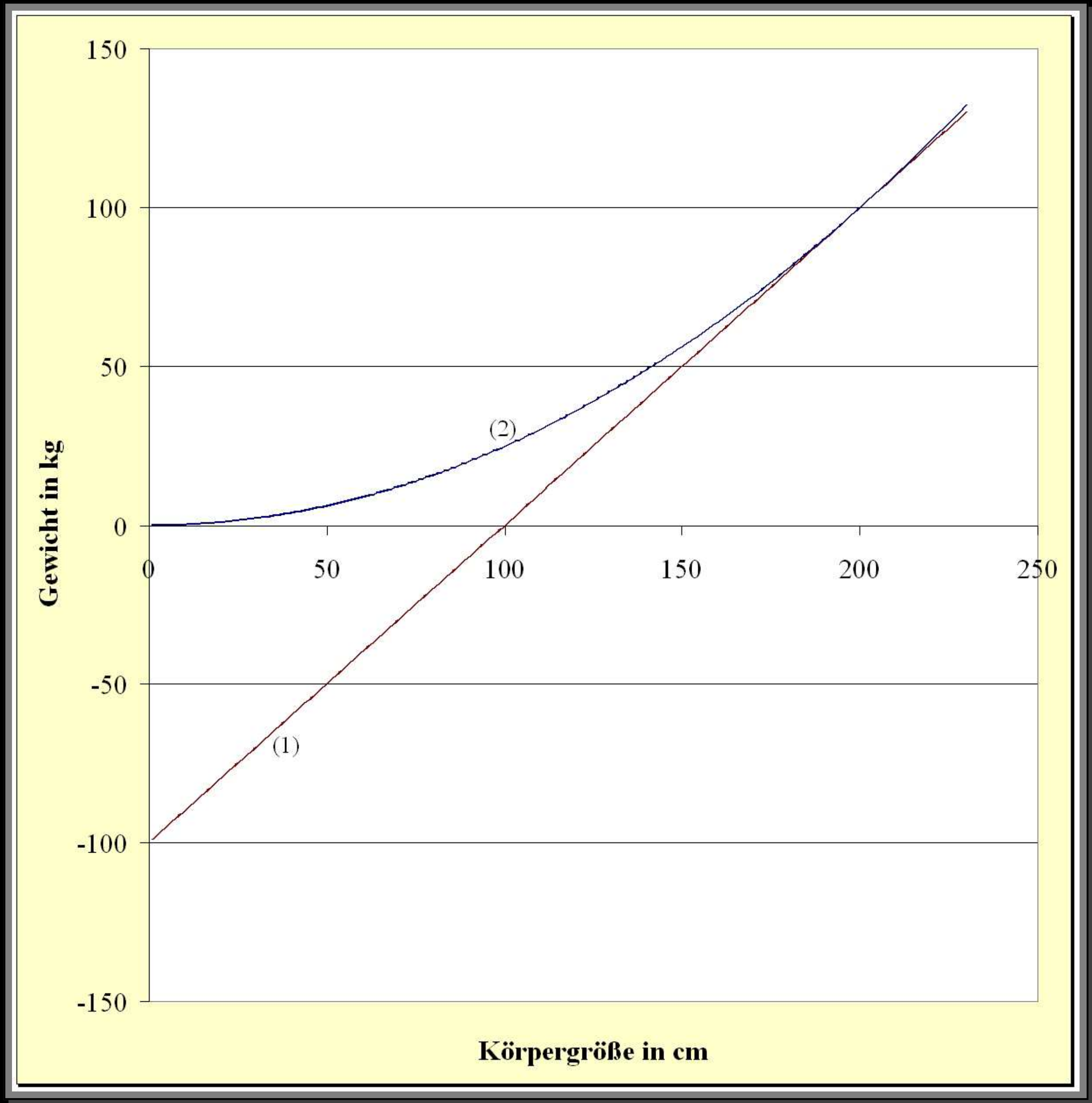
Das Realmodell entsteht durch die Entscheidung über durchzuführende Abstraktionen, wobei die Schüler thematisieren sollten, ob die Vernachlässigung von Geschlecht, Alter und Gesundheitszustand gerechtfertigt ist oder ob der reale Sachverhalt hierdurch verfälscht wird.

2. Realmodell

Das Realmodell entsteht durch die Entscheidung über durchzuführende Abstraktionen, wobei die Schüler thematisieren sollten, ob die Vernachlässigung von Geschlecht, Alter und Gesundheitszustand gerechtfertigt ist oder ob der reale Sachverhalt hierdurch verfälscht wird.

3. Mathematisches Modell

Die vorgegebene Gleichung liefert für $K < 100$ negative Werte für das Gewicht und darf somit für diese Werte nicht genutzt werden. Größere Werte von K liefern zwar ein positives Ergebnis für das Gewicht, weichen jedoch stark von den realen Erwartungen ab. Dies trifft auch auf Gleichung (2) zu und sollte zu der Entscheidung führen, dass beide Gleichungen nur für Erwachsene verwendet werden dürfen (Teilaufgabe b).


150
100
50
0
-50
-100
-150
0
50
100
150
200
250
(1)
(2)
Gewicht in kg
Körpergröße in cm

4. Mathematische Berechnungen

Aus der anzufertigenden graphischen Darstellung kann die maximale Abweichung des Idealgewichtes entnommen werden. Mit den beiden Gleichungen kann überprüft werden, dass der Abstand höchstens $25\ kg$ bei einer Körpergröße von $100\ cm$ beträgt. Da zuvor festgelegt wird, die Gleichungen nur für Erwachsene zu nutzen, ergibt sich für die Abweichung bei $150\ cm$ ein Betrag von $6,25\ kg$. Stärkere Abweichungen ergeben sich erst wieder bei Körpergrößen, die über $230\ cm$ liegen und somit ausgeschlossen werden können (Teilaufgabe b).

5. Mathematische Lösungsevaluation

Unter Berücksichtigung der Gültigkeitsbereiche beider Gleichungen ist deren Sinnhaftigkeit im Zusammenhang mit dem realen Problem nachgewiesen. Die Gewichtstabelle des Arztes liefert Ergebnisse für das ideale Körpergewicht, die für kleine Werte näherungsweise aus Gleichung (1) und für große Werte im festgelegten Gültigkeitsbereich aus beiden Gleichungen hervorgehen.

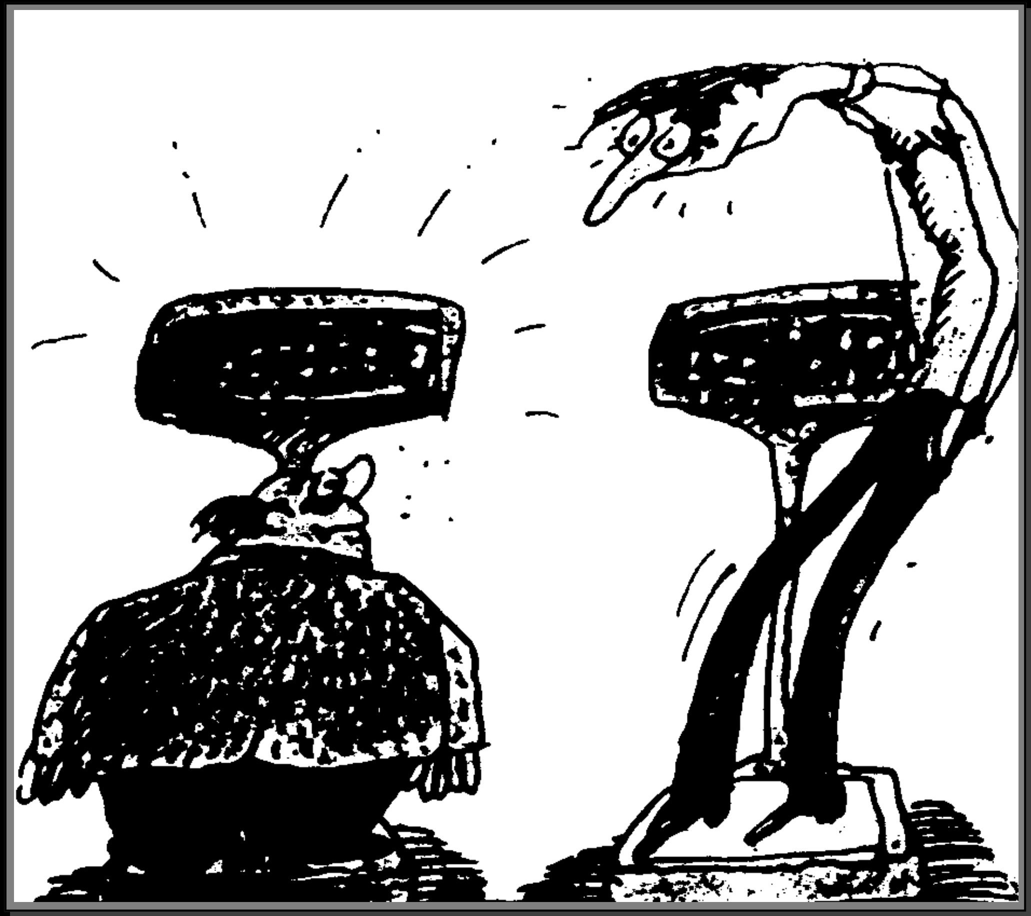
5. Mathematische Lösungsevaluation

Unter Berücksichtigung der Gültigkeitsbereiche beider Gleichungen ist deren Sinnhaftigkeit im Zusammenhang mit dem realen Problem nachgewiesen. Die Gewichtstabelle des Arztes liefert Ergebnisse für das ideale Körpergewicht, die für kleine Werte näherungsweise aus Gleichung (1) und für große Werte im festgelegten Gültigkeitsbereich aus beiden Gleichungen hervorgehen.

6. Reale Lösungsevaluation

Der Vergleich mit der Gewichtstabelle des Arztes, dass Faustregel (1) für kleinere Körpergrößen besser geeignet ist, wobei für große Personen ($K \geq 180$) beide Regeln geeignet sind und für Personen mit $K \geq 210$ liefert die Faustregel (2) genauere Ergebnisse (Teilaufgabe c).

Aus Lehrbuch Mathematik, Klasse 9, VVW



Für das ideale Körpergewicht eines Menschen gibt es verschiedene Faustregeln. Mancher kennt vielleicht die Regel (1): Wenn man von der Maßzahl der Körpergröße (in cm) die Zahl 100 abzieht, erhält man die Maßzahl des Idealgewichts (in kg). Weniger bekannt ist sicher Regel (2): Die Maßzahl des Idealgewichts (in kg) erhält man, indem man das Quadrat der Maßzahl der Körpergröße (in cm) durch 400 dividiert. In beiden Fällen ist das Idealgewicht eine Funktion der Körpergröße.

a) Geben Sie für beide Faustregeln eine Funktionsgleichung an, und überlegen Sie sich einen sinnvollen gemeinsamen Definitionsbereich! Stellen Sie beide Funktionen im gewählten Definitionsbereich in einem Koordinatensystem dar, und vergleichen Sie beide Graphen!

b) Wie weit weicht das Idealgewicht entsprechend den beiden Faustregeln Definitionsbereich maximal voneinander ab?

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

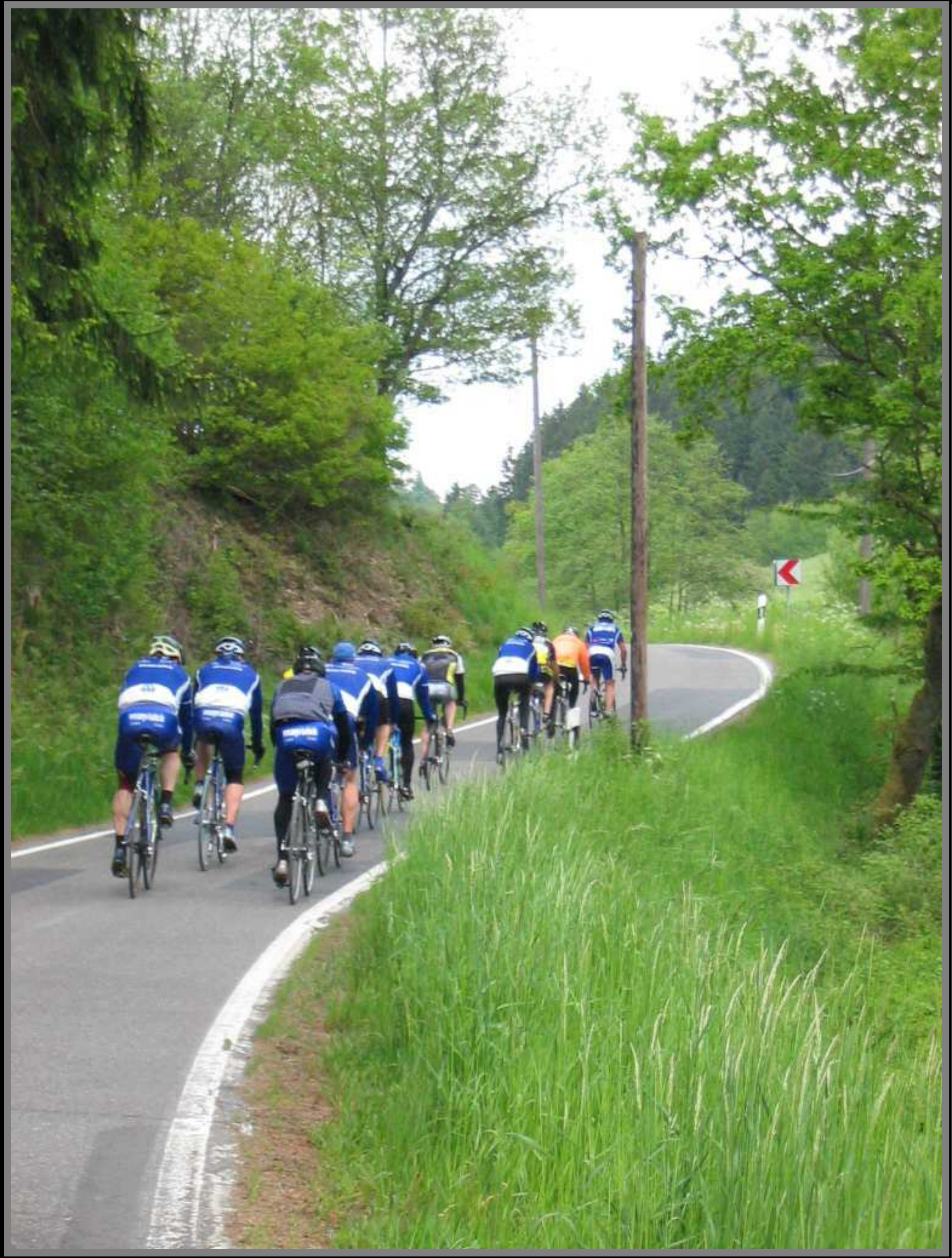
Radrennen

Bei einem Radrennen erhalten die Fahrer für das Erreichen von Zwischenstationen Zeitgutschriften, deren Höhe sich nach der Platzierung richtet:

Platzierung	1	2	3
Zeitgutschrift in s	180	165	140

a) Erkennst du ein System in der Vergabe der Zeitgutschriften? Stelle eine Formel zur Berechnung der Gutschriften aus der Platzierung auf!

b) Wie groß sind die Zeitgutschriften für die weiteren Platzierungen? Welchen Sinn macht dieses Vergabesystem?



1. Problemsituation verstehen

Die Zeitgutschriften sind in Wirklichkeit Abzüge vom jeweiligen Zeitstand im Gesamtklassement des Fahrers, da im Radsport eine geringere Zeit stets besser ist als eine höhere, da man eine festgelegte Strecke schneller zurückgelegt hat.

1. Problemsituation verstehen

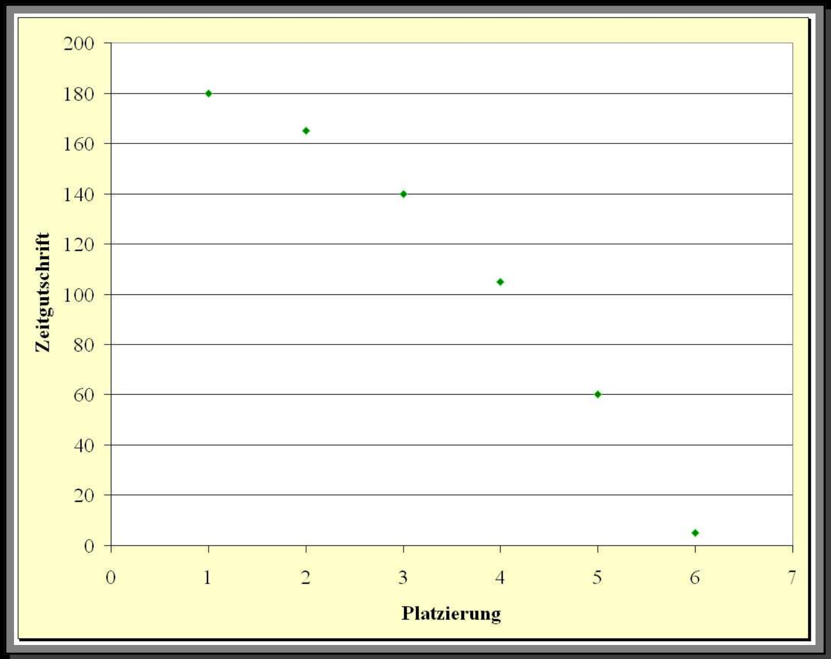
Die Zeitgutschriften sind in Wirklichkeit Abzüge vom jeweiligen Zeitstand im Gesamtklassement des Fahrers, da im Radsport eine geringere Zeit stets besser ist als eine höhere, da man eine festgelegte Strecke schneller zurückgelegt hat.

2. Realmodell

Je höher die Platzierung, umso geringer fällt die Zeitgutschrift aus. Der Abstand zwischen den Gutschriften beträgt zunächst 15 s und danach 25 s. Die Schüler können vermuten, dass sich die Abstände um jeweils 10 s erhöhen.

3. Mathematisches Modell

Wenn die Vermutungen graphisch dargestellt werden, ist der parabolische Verlauf zu erkennen. Da der Graph symmetrisch zur y-Achse ist, verschwindet der Parameter b in der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$.



4. Mathematische Berechnungen

Nun können die bekannten Punkte in $f(x) = ax^2 + c$ eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
180 &= a + c \\
165 &= 2^2 \cdot a + c \\
140 &= 3^2 \cdot a + c
\end{aligned}
$$

Man erhält $a = -5$, $c = 185$ und somit die Funktion $f(x) = -5x^2 + 185$, mit der die vermuteten Werte bestätigt werden können.

Platzierung	1	2	3	4	5	6
Zeitgutschrift in s	180	165	140	105	60	5

5. Mathematische Lösungsevaluation

Durch Einsetzen der Wertepaare können sowohl die Vermutung als auch die Funktionsgleichung in ihrer Richtigkeit nachgewiesen werden.

5. Mathematische Lösungsevaluation

Durch Einsetzen der Wertepaare können sowohl die Vermutung als auch die Funktionsgleichung in ihrer Richtigkeit nachgewiesen werden.

6. Reale Lösungsevaluation

Die Punkte im Koordinatensystem dürfen nicht verbunden werden, da Platzierungen stets ganzzahliger Natur sind. Somit handelt es sich nicht um eine Parabel, sondern um 6 Punkte einer Parabel.

Stufe III: Modellbildung und Reflexion über Modellbildung

Stufe III: Modellbildung und Reflexion über Modellbildung

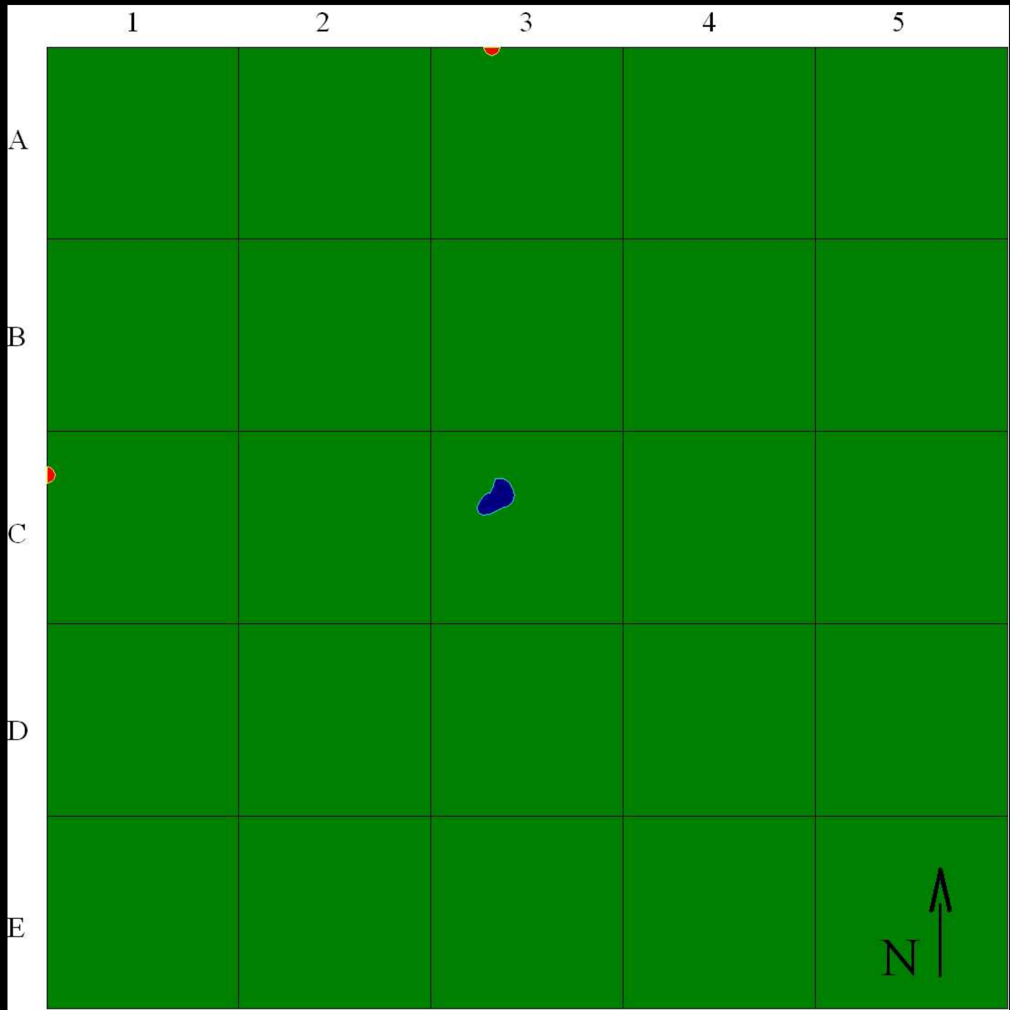
Ein lebenswichtiges Gerät: Das Radar

„Radar“ ist ein Kurzwort für die englische Bezeichnung „radio detecting and ranging“ und bedeutet, dass ein Objekt durch Funkwellen aufgefunden und die Entfernung bestimmt wird.

Ein Düsenjet (Typ A) tritt in A3 in das vom Radarschirm erfasste Gebiet ein, umfliegt auf schnellstem Wege einen in C3 befindlichen Felsen und tritt in C1 wieder aus dem Radarfeld aus.

Drei weitere Jets (Typ B) treten aus NO-Richtung in das Radarfeld ein und fliegen geradlinig in Richtung SW. Die drei Jets fliegen nebeneinander im gleichen Abstand von jeweils $500\ m$. Die Radar-Software berechnet automatisch, wie viele mögliche Kollisionspunkte mit dem Typ A – Jet existieren. Hierfür gibt die Software für jeden der drei Typ B – Jets eine andere Anzahl dieser möglichen Kollisionspunkte aus.

Wo befinden sich diese möglichen Kollisionspunkte?


1
2
3
4
5
A
B
C
D
E
N

1. Problemsituation verstehen

Es kann nur dann zu Kollisionen kommen, falls die Jets auf der gleichen Höhe fliegen. Deshalb werden die berechneten Punkte als „mögliche“ Kollisionspunkte bezeichnet.

1. Problemsituation verstehen

   Es kann nur dann zu Kollisionen kommen, falls die Jets auf der gleichen Höhe fliegen. Deshalb werden die berechneten Punkte als „mögliche“ Kollisionspunkte bezeichnet.

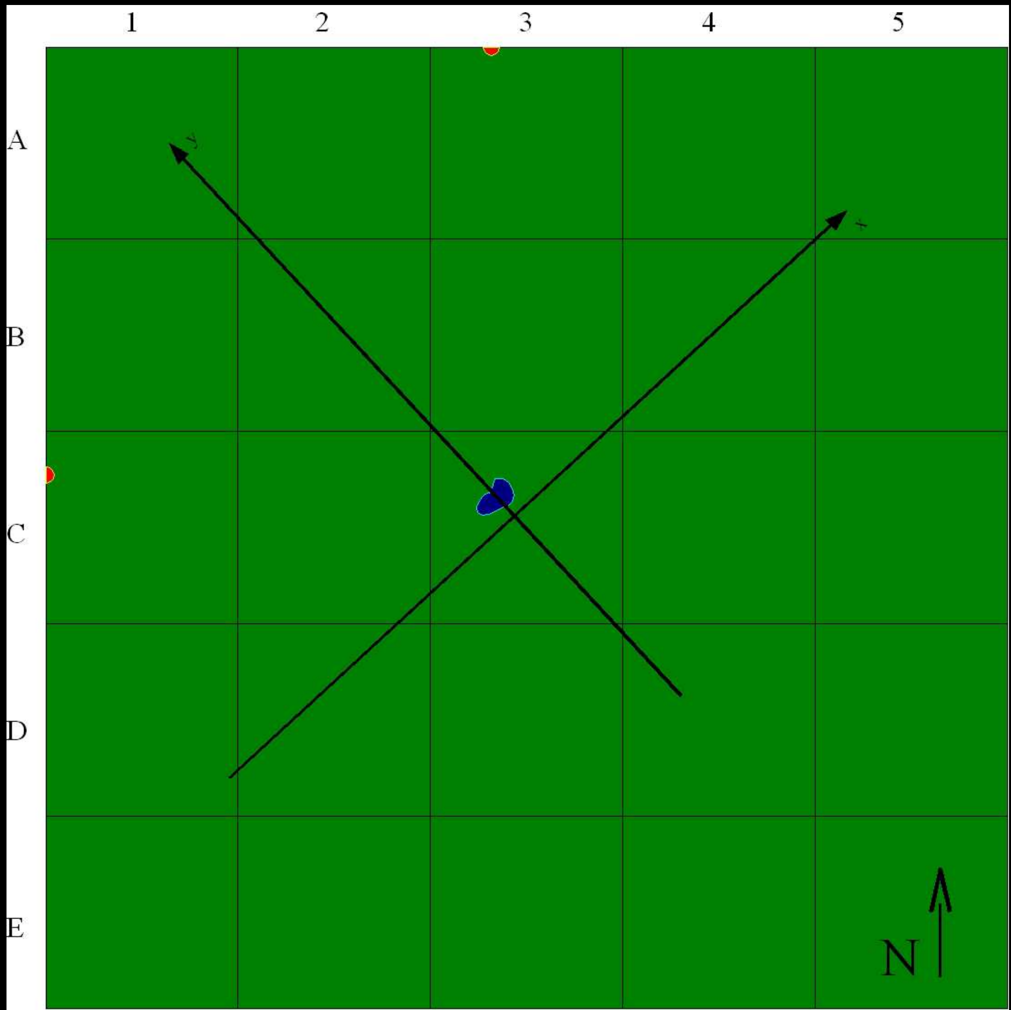
2. Realmodell

   Da Gerade und Parabel höchstens zwei Schnittpunkte haben können, müssen die drei Typ B -Jets mit der Route des Typ A - Jets keinen, einen und zwei mögliche Kollisionspunkte besitzen.

3. Mathematisches Modell

Es bietet sich an, den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt der Flugkurve des Typ A - Jets zu legen.

Aus geeigneten Punkten des Radars können nun die Funktionsgleichungen der Flugbahnen aufgestellt werden.

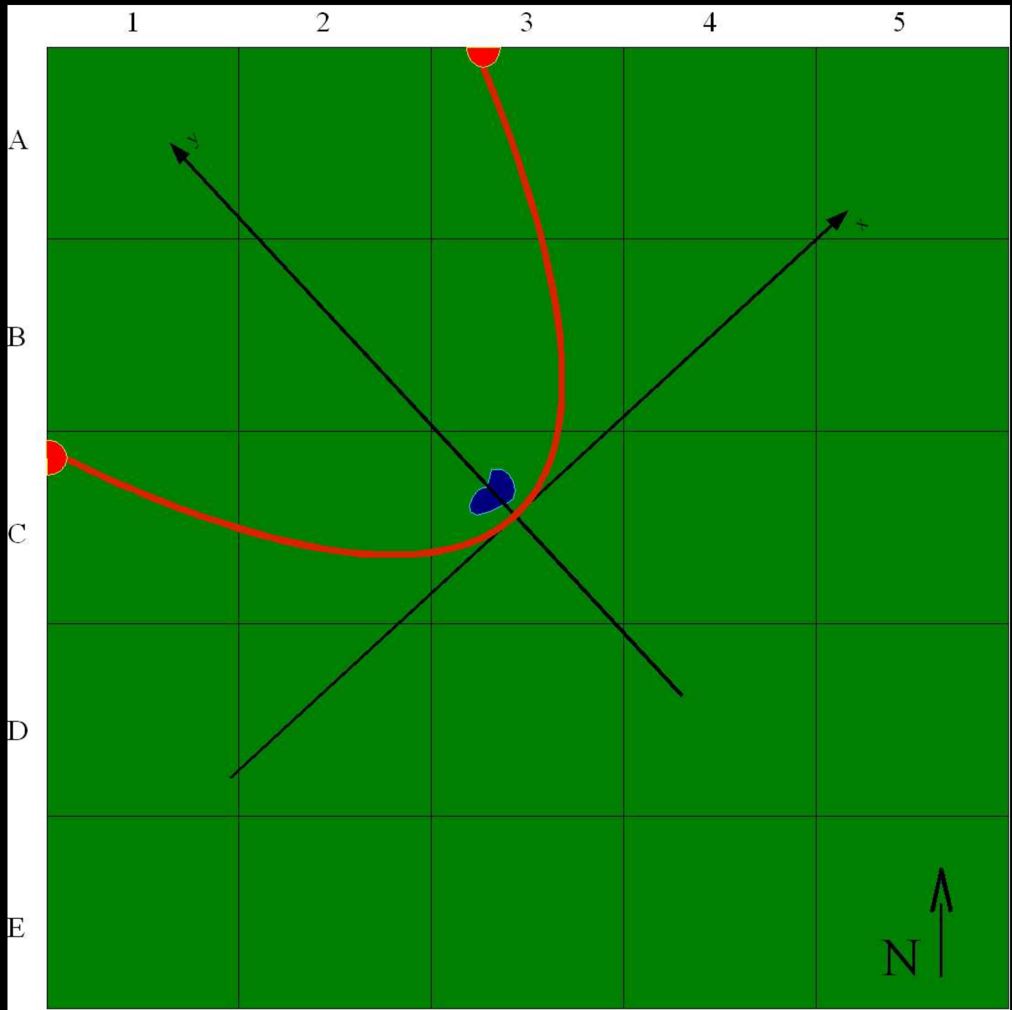

1
2
3
4
5
A
B
C
D
E
y
x
N

Typ A:

Es ergibt sich $f(x) = ax^2$ mit dem aus dem Koordinatensystem abgelesenen Eintrittspunkt $P(1580 \mid 1840)$. Analog hätte der Austrittspunkt aus dem Radarfeld gewählt werden können.

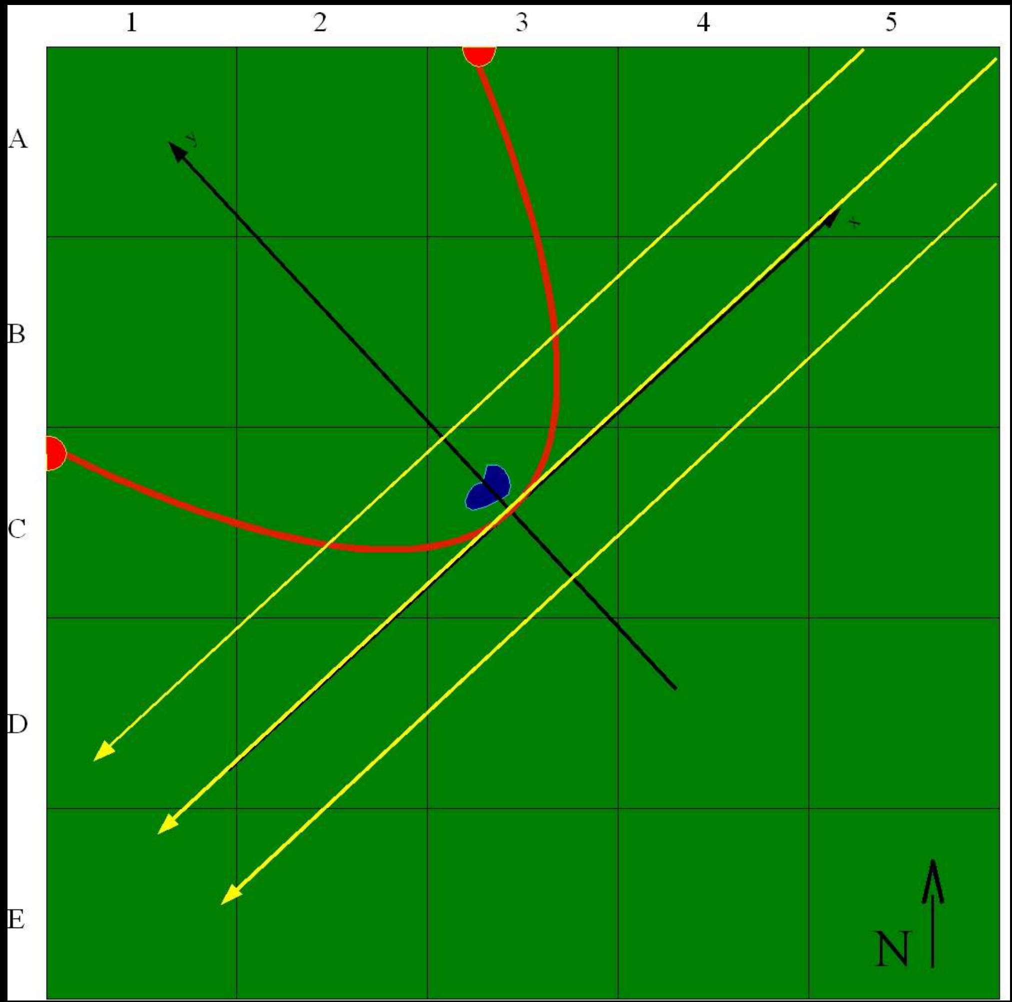
$$\begin{aligned} 1840 &= a \cdot 1580^2 \\ a &= 0,0007 \end{aligned}$$

$$f(x) = 0,0007 \cdot x^2$$


1
2
3
4
5
A
B
C
D
E
y
x
N

Typ B:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 500 \\ g_2(x) &= 0 \\ g_3(x) &= -500 \end{aligned}$$


1
2
3
4
5
A
B
C
D
E
N

4. Mathematische Berechnungen

Mögliche Kollision 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= g_1(x) \\ 0,0007 \cdot x^2 &= 500 \\ x_{1/2} &= \pm 845 \\ \Rightarrow &\quad P_1(845 \mid 500) \quad P_2(-845 \mid 500) \end{aligned}$$

Mögliche Kollision 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= g_2(x) \\ 0,0007 \cdot x^2 &= 0 \\ x &= 0 \\ \Rightarrow \quad & P_3(0 \mid 0) \end{aligned}$$

Mögliche Kollision 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= g_2(x) \\ 0,0007 \cdot x^2 &= 0 \\ x &= 0 \\ \Rightarrow \quad & P_3(0 \mid 0) \end{aligned}$$

Mögliche Kollision 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= g_3(x) \\ 0,0007 \cdot x^2 &= -500 \\ x \notin \mathbb{R} &\Rightarrow \text{kein Kollisionspunkt} \end{aligned}$$

5. Mathematische Lösungsevaluation

Die Schnitte zwischen der quadratischen und den linearen Funktionen liefern erwartungsgemäß zwei (P_1 und P_2), eine (P_3) und keine Lösung.

5. Mathematische Lösungsevaluation

Die Schnitte zwischen der quadratischen und den linearen Funktionen liefern erwartungsgemäß zwei (P_1 und P_2), eine (P_3) und keine Lösung.

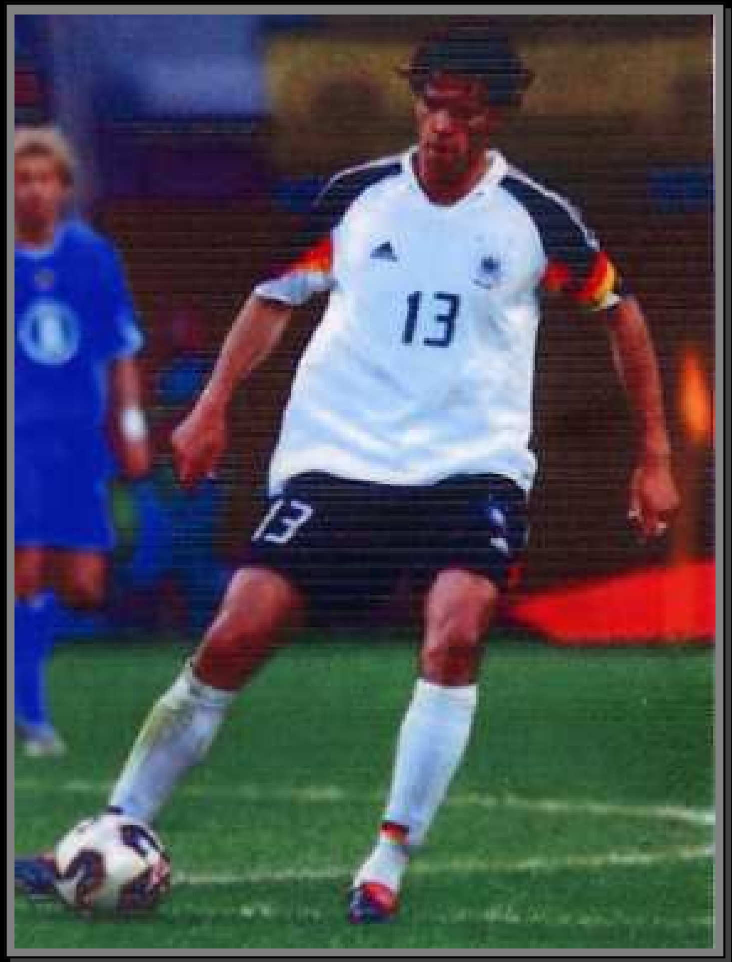
6. Reale Lösungsevaluation

Die Flugbahn vom Typ A - Jet kann als Parabel angenommen werden, da der Jet nicht den kürzesten Weg (geradlinig), sondern den schnellsten Weg fliegt. Um nicht am Felsen abbremsen zu müssen, ist eine möglichst gleichmäßig verlaufende Kurve zu wählen, was durch die Parabel approximativ erreicht wird.

Modellbildung und fächerübergreifender Unterricht

Modellbildung und fächerübergreifender Unterricht

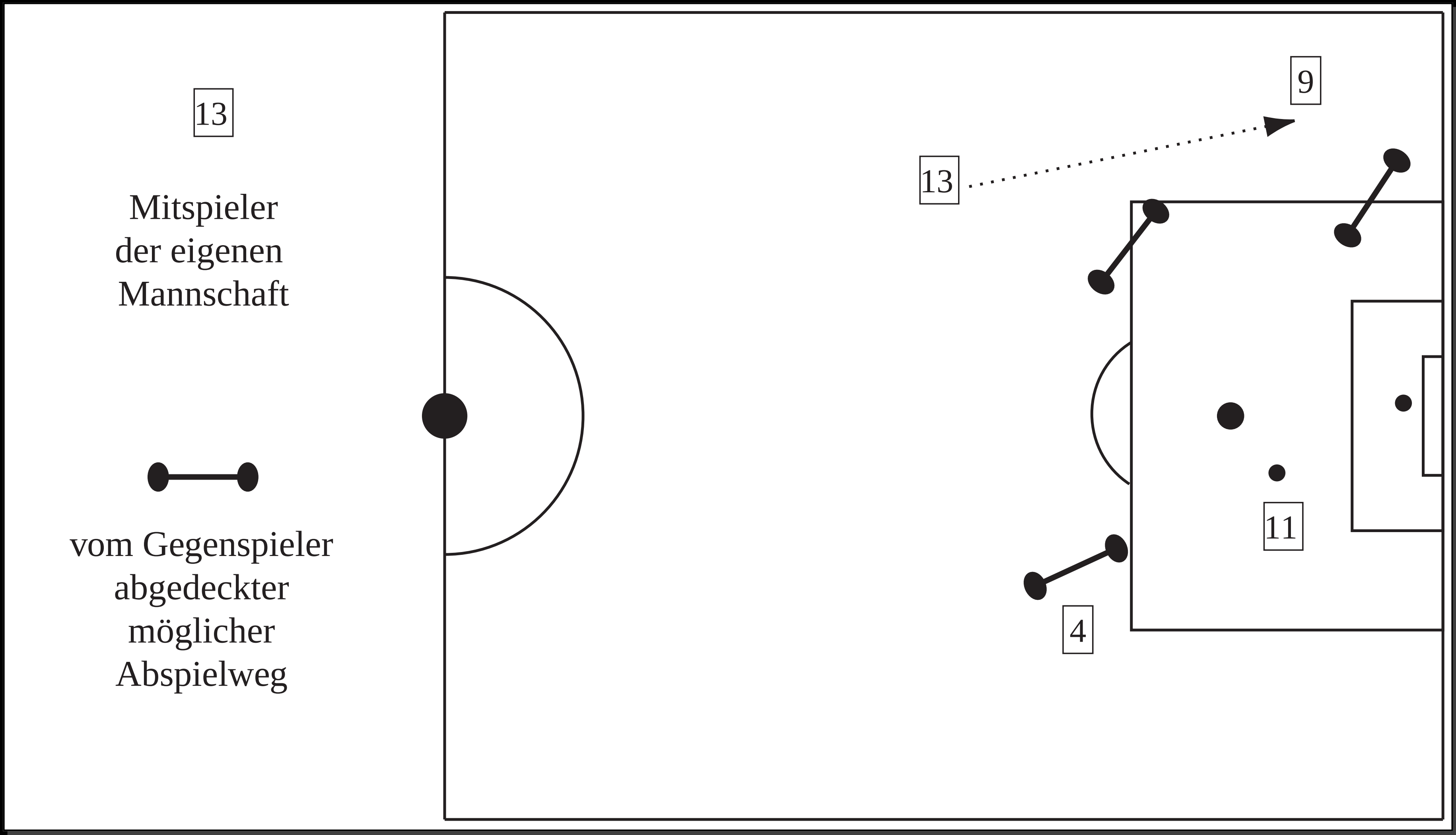
Michael Ballacks „Supertor“



Aufgabe

Der Spieler mit Nr. 13 soll einen Freistoß schießen. Dieser muss leider indirekt ausgeführt werden. Die gegnerische Mannschaft deckt zudem einige Mitspieler, welche somit nicht mehr anspielbar sind.

Skizze:



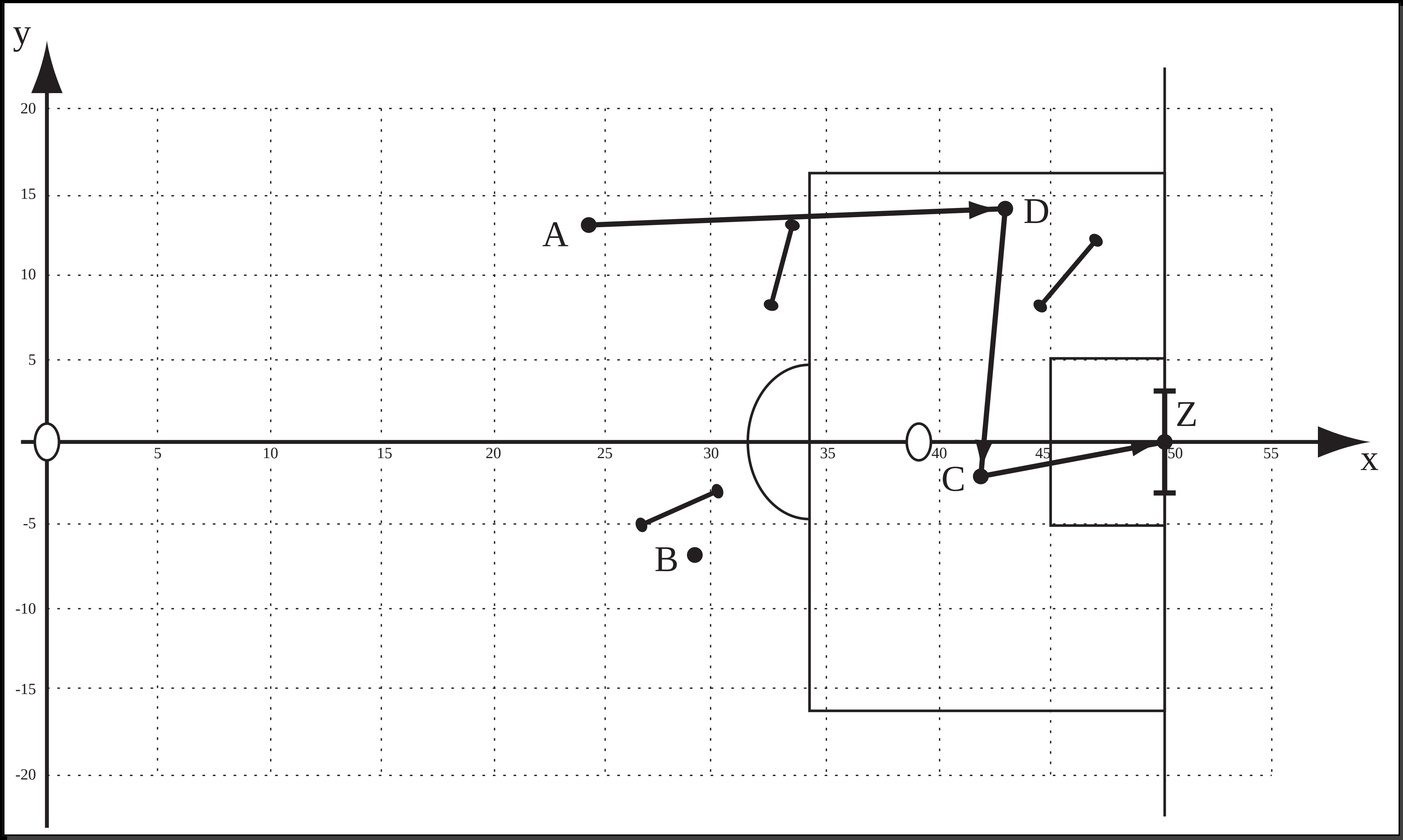
13
Mitspieler der eigenen Mannschaft
vom Gegenspieler abgedeckter möglicher Abspielweg
9
13
11
4

Wenn wir genau in der Mitte des Mittelkreises einen Koordinatenursprung annehmen würden und ein Meter auf dem Spielfeld einer Einheit im KOS entsprechen würde, hätten die Spieler die Koordinaten:

$$[Nr.13] : (24, 13), \quad [Nr.4] : (29, -7), \quad [Nr.11] : (42, -2),$$

$$[Nr.9] : (43, 14).$$

Gegnerische Tor (7.32 m breit, 2.44 m hoch) stelle Ziel dar ($Z = (50, 0)$).


y
x
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
A
D
B
C
Z

a) Bestimme mittels Vektorenangaben die Richtungen, in die die Spieler laut Skizze spielen sollen.

b) Wie weit stehen die Spieler mit Nr. 13 und Nr. 9 sowie Nr. 9 und Nr. 11 auseinander?

c) Welche Torentfernung hat der Ball, der vor Ausführung des Freistoßes bei dem Spieler mit der Nr. 13 liegt?

Mathematisierung (Koordinatenmethode)

$$
\begin{aligned}
A &= (24, 13) &&\Rightarrow \text{entspricht Standort vom Spieler Nr. 13}\\
B &= (29, -7) &&\Rightarrow \text{entspricht Standort vom Spieler Nr. 4}\\
C &= (42, -2) &&\Rightarrow \text{entspricht Standort vom Spieler Nr. 11}\\
D &= (43, 14) &&\Rightarrow \text{entspricht Standort vom Spieler Nr. 93}\\
Z &= (50, 0) &&\Rightarrow \text{entspricht Standort Tormitte}
\end{aligned}
$$

zu a) • Spieler Nr. 13 spielt zu Spieler Nr. 9

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 43 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Spieler Nr. 9 spielt zu Spieler Nr. 11

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 42 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 43 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

• Spieler Nr. 11 soll Tor Z treffen

$$\overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 42 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu b) • Entfernung von Spieler Nr. 13 zu Spieler Nr. 9

$$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 19 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{19^2 + 1^2} = \sqrt{362} \approx 19.03$$

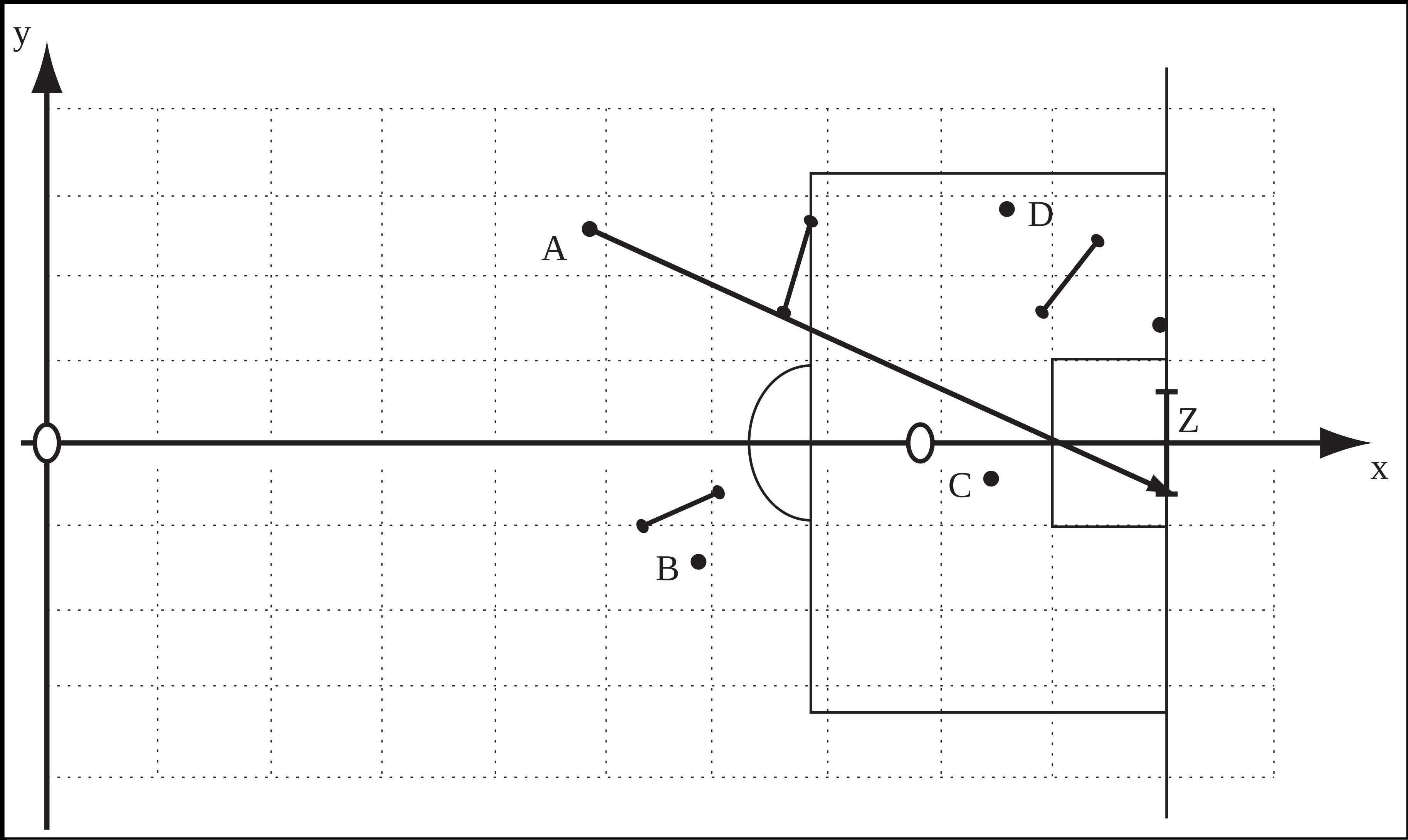
• Entfernung von Spieler Nr. 9 zu Spieler Nr. 11

$$|\overrightarrow{DC}| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -16 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-16)^2} = \sqrt{257} \approx 16.03$$

zu c) Torentfernung des Balles von Spieler Nr. 13

$$|\overrightarrow{AZ}| = \left|\begin{pmatrix} 26 \\ -13 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{26^2 + (-13)^2} = \sqrt{845} \approx 29.07$$

Nach einer Rücksprache des Schiedsrichters mit seinem Assistenten an der Außenlinie, bewertet der Unparteiische das begangene Foul etwas härter und korrigiert seine Entscheidung auf „direkten Freistoß". Damit darf der Ball nun auch ohne vorher abzuspielen „direkt" ins Tor geschossen werden. Der Spieler mit der Nummer 13 ist als gefürchteter Freistoßspezialist bekannt. Er schießt jedoch nur direkt, falls der Ball höchstens 30m weit vom Tor entfernt liegt. Unsere Nummer 13 möchte gern ins von ihm aus gesehen rechte obere Eck schießen, darf dabei aber keinen Gegenspieler treffen, da der Ball sonst abgelenkt werden würde. Er ist sich aber nicht sicher wie groß der Abstand des Balles zum Tor ist. So fragt er den Mannschaftsbetreuer, ob die direkte Schussdistanz (Effet des Balles wird vernachlässigt) bis ins rechte obere Toreck es ihm ermöglicht auch direkt aufs Tor zu schießen. Welche Antwort gibt der clevere Betreuer?



y
A
D
Z
x
C
B

Frage: Ist die Entfernung des Balles zum vom Spieler aus gesehen rechten oberen Toreck größer oder kleiner als 30 m?

Dazu $A = (24, 13, 0) \Rightarrow$ entspricht dem Standort vom Spieler mit der Nr. 13

$T = (50, -7.32/2, 2.44) \Rightarrow$ entspricht dem Zielpunkt des rechten oberen Torecks.

$$|\overrightarrow{AT}| = \sqrt{959.5092} \approx 30.98.$$

Die direkte Schussentfernung des geplanten Freitstoßes beträgt 31 m. Es ist $31\ m > 30\ m$, also: Der Mannschaftsbetreuer rät dem Spieler die Abspielvariante.

„Flic-Flac“
Handstand – Überschlag (rückwärts)

Problemstellungen:

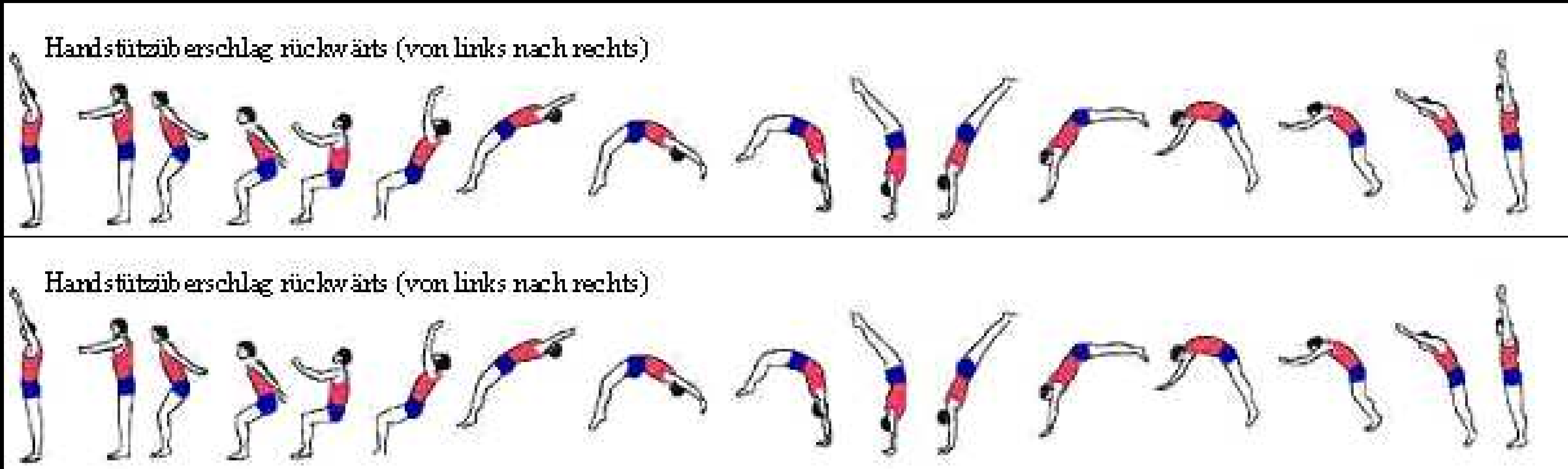
- Höhe des Sprunges nach hinten, so dass der Springer rückwärts auf den Boden gelangt.

Problemstellungen:

- Höhe des Sprunges nach hinten, so dass der Springer rückwärts auf den Boden gelangt.
- Vergleich der Sprünge von Sportlern unterschiedlicher Körpergröße.

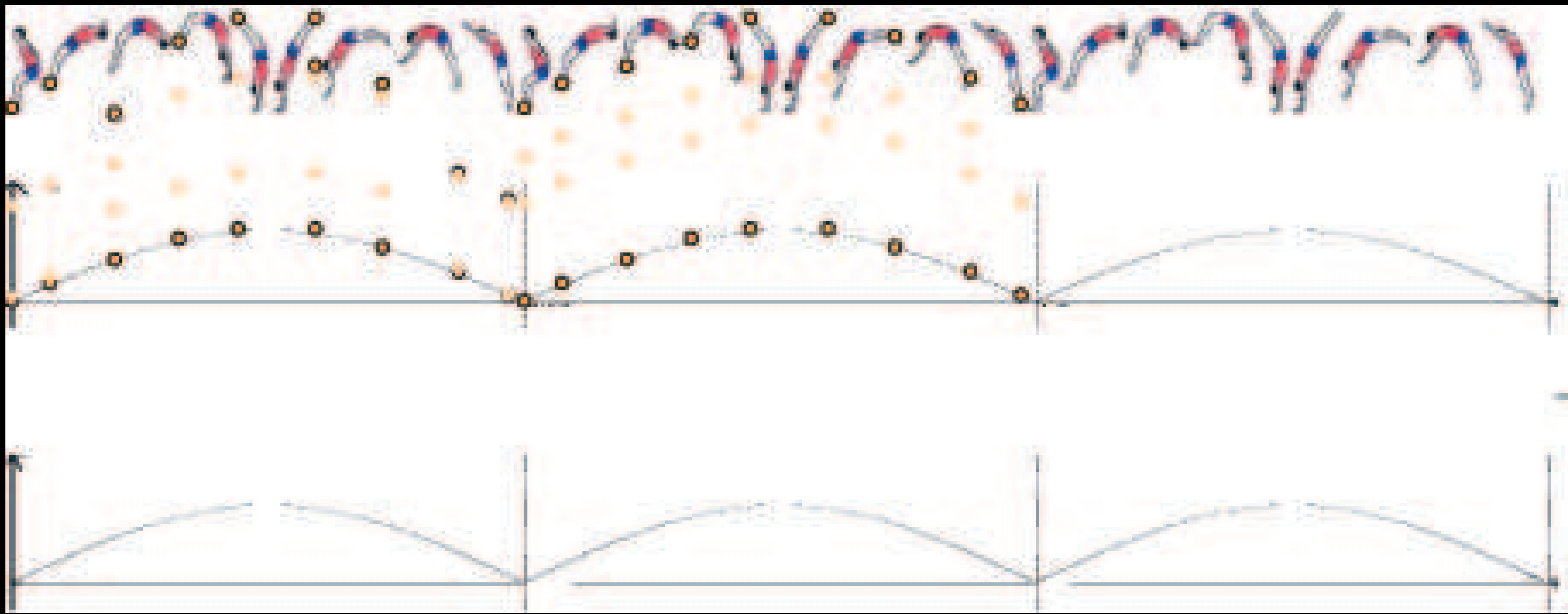
Problemstellungen:

- Höhe des Sprunges nach hinten, so dass der Springer rückwärts auf den Boden gelangt.
- Vergleich der Sprünge von Sportlern unterschiedlicher Körpergröße.
- Beschreibung des als Punkt angenommenen Fußpunktes mit einer speziellen Funktion als Modell.



Durch die Komposition von 3 hintereinander ausgeführten Flic-Flac's lässt sich ein Graph durch eine vereinfachte Betrachtung des Fußgelenkes als Punkt erkennen.

Vom Realmodell zum Mathematischen Modell



Vergleichende Vermutungen

Die Schüler vermuten, dass die durch die Drehbewegung des Sportlers und der durch mathematisches Modellieren gewonnenen Graphen Gemeinsamkeiten mit der Sinusfunktion

$$f(x) = \sin x$$

besitzen, wobei aber nur positive Werte für alle $x \in \mathbb{R}$ existieren. Somit könnte die gesuchte Funktion

$$f(x) = |\sin x|.$$

sein.

Weitere Betrachtungen des Funktionsgrafen führen zum Modell

$$f(x) = |a \sin(bx + c) + d|.$$

Die Parameter a, b, c und d können aus den Meßwerten des Sprungvorgangs bestimmt werden.

Aufgabenstellung

Ein 175 cm großer Sportler turnt 3 Handstützüberschläge rückwärts (Flic-Flac) hintereinander.

a) Wie hoch muss der 175 cm große Athlet nach hinten oben springen, damit er ganz sicher mit den Armen auf dem Boden aufkommt?
Hinweis: Mit gestreckten Armen ist er ca. 2,30 m groß.

b) Gib die Koordinaten des Fußgelenkes an, wenn der Sportler einen Winkel von $60°(\frac{3}{4}\pi$ und $\frac{8}{3}\pi)$ zurück gelegt hat. Untersuche ob die Koordinate des Punktes $P(11 \mid 0,862)$ auf der Kurve sein kann, die das Fußgelenk unseres Sportlers beschreibt? Gib dafür das Gradmaß an und überprüfe deine Aussage erneut.

c) Stellt Vermutungen über den Vergleich eines 1,65m großen und eines 1,90m großen Sportlers an? Begründe deine Antworten.

Literaturverzeichnis

Weitere Informationen unter

`http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning/`

Erschienene Technical-Reports. Teilweiser Download als pdf-file.

- Herbert Henning, Christian Hartfeldt, Mike Keune: *Niveaustufenorientierte Herausbildung von Modellbildungskompetenzen im Mathematikunterricht* , TR 1-2004

- Herbert Henning, Christian Hartfeldt, Mike Keune, Thomas Kubitza, Steffen Hammermeister: *Anwendungen - Modelle - Lösungen* , TR 2-2004