Muster, Flächen, Parkettierungen — Anregungen für einen kreativen Mathematikunterricht

Herbert Henning, Christian Hartfeldt

Fakultät für Mathematik
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

eMail: herbert.henning@mathematik.uni-magdeburg.de
christian.hartfeldt@t-online.de

Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Mathematische Grundlagen der Parkettierungen

In der Mathematik versteht man unter einer Parkettierung die überlappungsfreie, vollständige Überdeckung der Ebene mit zueinander kongruenten regelmäßigen Polygonen, wobei das Muster an allen Ecken gleich aussehen soll.

Das reguläre Vieleck

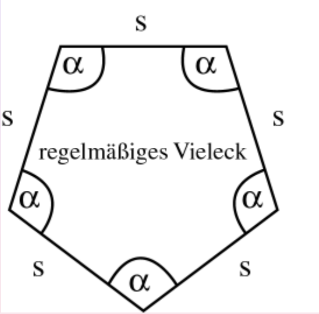
Betrachtet man Ornamente oder gefließte Fussböden bzw. Wände, so stellt man fest, dass diese, wegen ihres ästhetischen Reizes regelmäßige Vielecke besitzen. In der Natur findet man die Formen von regulären Sechsecken z. B. bei Bienenwaben wieder.

Definition

Ein Vieleck heißt **regulär**, wenn

- alle Seiten gleich lang und
- alle Innenwinkel

gleich groß sind.

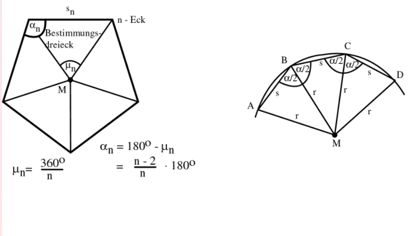


Aus der Definition folgt

Theorem

Jedes reguläre Vieleck (n-Eck) besteht aus n-kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Ein solches Dreieck, das diese Bedingung erfüllt, wird als **Bestimmungsdreieck** *bezeichnet.*

Da drei benachbarte Ecken einen Umkreis mit Mittelpunkt M haben gilt $\Delta AMB \cong \Delta BMC$.



Bestimmungsdreieck

Wird M mit der nächsten Ecke (D) verbunden, so entsteht das Dreieck ΔCMD und dieses ist nach dem Kongruenzsatz zu den anderen Dreiecken kongruent. Fahre mit den anderen Ecken so fort und es folgt die Behauptung. □

Für den Innenwinkel μ gilt allgemein $\mu = \frac{360°}{n}$, ist also proportional zu $\frac{1}{n}$, also

$$\mu \propto \frac{1}{n}.$$

Für ein Sechseck ist also $\mu = 60°$. Damit ergibt sich zwangsläufig für den Winkel α

$$\alpha = 180° - \mu = 180° - \frac{360°}{n} = \frac{180° \cdot n - 360°}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

Speziell für ein Sechseck ergibt sich $\alpha = 120°$.

In der folgenden Tabelle werden die Innenwinkel für spezielle Anzahlen von Ecken dargestellt.

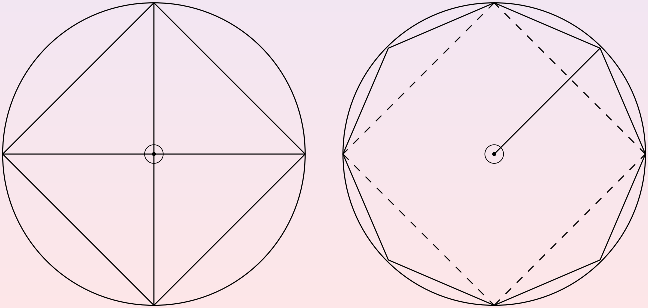
Anzahl der Ecken:	3	4	5	6	8	9	10	12
Innenwinkel α:	60°	90°	108°	120°	135°	140°	144°	150°

Konstruktion eines n-Eckes

Im Folgenden wollen wir der Frage nachgehen, wie man ein regelmäßiges Vieleck konstruiert. Kennt man den Mittelpunktswinkel μ_n, dann kann ein regelmäßiges Vieleck konstruiert werden. Da sich Winkel verdoppeln bzw. halbieren lassen und man ein n-Eck konstruieren kann, dann kann man auch ein n-Eck mit doppelter Eckenzahl konstruieren. Bei allen Konstruktionen beginnt man am besten mit dem Umkreis. Im Folgenden wollen wir dies für verschiedene Fälle demonstrieren.

Quadrat

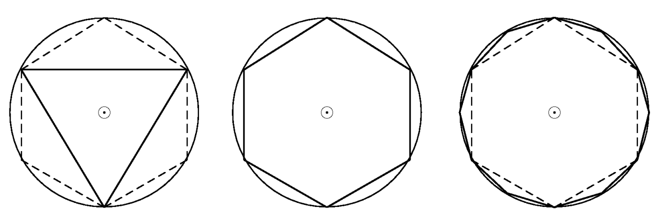
Dieses Verfahren ist auch als 4er Serie bekannt. Zunächst konstruiert man den Umkreis und fällt Lote, die man vom Mittelpunkt M auf die Quadratseite fällt. Diese schneiden den Kreis in den Ecken des Achteckes. Damit ergibt sich



Das 4-Eck und 8-Eck

Sechseck

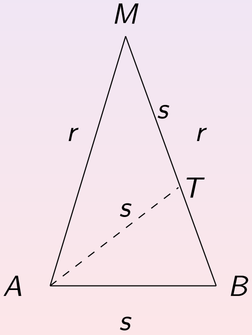
Dieses Verfahren ist auch als 3er Serie bekannt. Die Bestimmungsdreiecke sind gleichseitig. Somit muss eine Seite so lang sein, wie der Radius. Das Sechseck erhält man aus dem gleichseitigen Dreieck, indem man die übernächsten Ecken verbindet. Fällt man die Lote, so erhält man das Zwölfeck.



Das 3-Eck, 6-Eck und 12-Eck

Zehneck

Dieses Verfahren ist auch als 5er Serie bekannt. In dem Bestimmungsdreieck für das Zehneck stellt man fest, dass die Dreiecke ΔMAB und ΔABT ähnlich sind. Es gilt somit

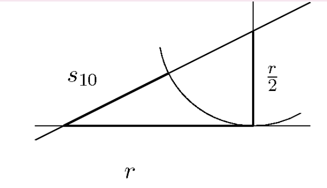


Das Bestimmungsdreieck ΔMAB

Zehneck

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s} \Leftrightarrow r^2 - rs = s^2 \Leftrightarrow r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = s^2 + rs + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(s + \frac{r}{2}\right)$$

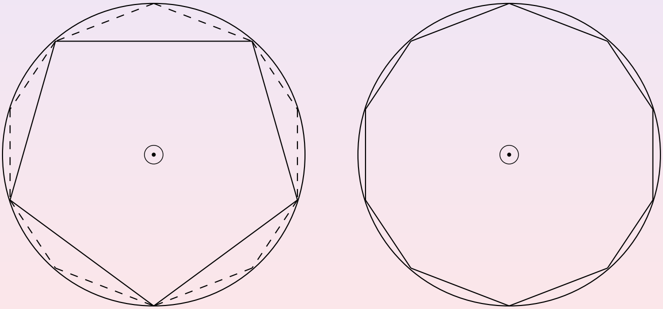
r, $\frac{r}{2}$ und $s + \frac{r}{2}$ lassen sich nach dem Satz von Pythagoras als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks deuten. Die Konstruktion der Seite s des Zehnecks, bei bekanntem Umkreisradius, entnehme man der Zeichnung.



Zur Konstruktion des Zehnecks

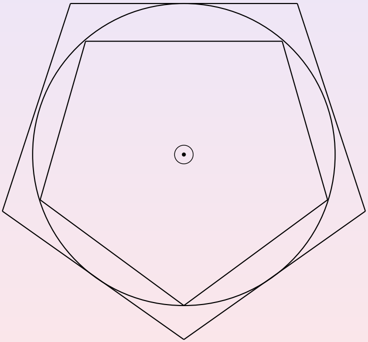
Zehneck

Auch hier wieder ist das Zehneck Ausgangsfigur für das 5- und 20-Eck.



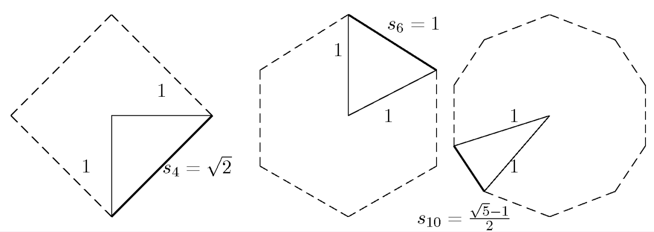
Das 5-Eck und 10-Eck

Einbeschriebene *n*-Ecke



Der Unterschied zwischen einbeschriebenem und umbeschriebenem *n*-Eck am Beispiel des Fünfecks

Aus den Zeichnungen liest man sofort für das Sechseck



Die Seitenlänge für das Viereck, Sechseck und Zehneck

$$s_6 = 1,$$

für das Viereck

$$s_4 = \sqrt{2}$$

und für das Zehneck gilt

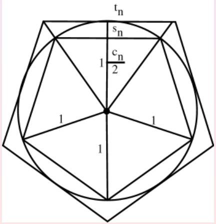
$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(s_{10} + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Erstaunlich hierbei ist, dass die Länge von s_{10} das Verhältnis des Goldenen Schnittes darstellt.

Umbeschriebene n-Ecke

Auch hier werden die Ähnlichkeitssätze für die Seite t_n angewandt. Es gilt

$$t_n : s_n = 1 : \frac{c_n}{2} \Rightarrow t_n = 2\frac{s_n}{c_n}.$$



Darstellung der Höhe

Parkettierung mit einer Fläche

Theorem

Eine lückenlose Parkettierung **ohne** *Überschneidungen ist nur mit den regulären n-Ecken für $n = 3, 4, 6$ möglich.*

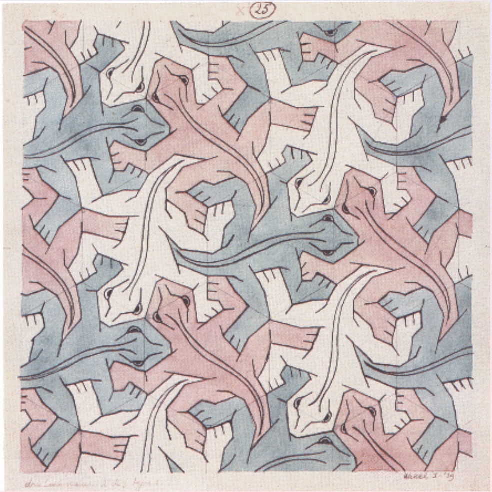
Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Escher

Das zentrale mathematische Thema von M. C. Escher war die „regelmäßige Flächenaufteilung“.
Eine Fläche, die man sich nach allen Seiten unbegrenzt fortgesetzt vorstellen muss, kann nach einer beschränkten Zahl von bestimmten Systemen bis ins Unendliche aufgefüllt werden oder aufgeteilt werden in gleichförmige mathematische Figuren, die sich an allen Seiten begrenzen ohne das „leere Stellen“übrigbleiben.
In mathematischer Sprechweise handelt es sich bei den „regelmäßigen Flächenaufteilungen“um *Parkette*. Dabei ist ein *Parkettstein*, (bei Escher ein „Motiv“) eine beliebige Teilmenge der Ebene, die sich durch umkehrbare stetige Deformation aus einer abgeschlossenen Kreisscheibe herstellen lässt, die also zu einer solchen Kreisscheibe *homöomorph* ist.

Bei der abgebildeten Symmetriezeichnung Nr. 25 Eschers hat der einzelne Parkettstein die Form eines Reptils. Offensichtlich überdecken diese Reptilien die Ebene lückenlos und überlappungsfrei und das Muster ist in zwei verschiedenen Richtungen periodisch, was man mühelos an den Richtungen erkennt, in denen sich jeweils Tiere gleicher Farbe wiederholen. Weiterhin kann man offensichtlich jedes Tier einer bestimmten Farbe durch eine Parallelverschiebung des gesamten Musters auf jedes vorgegebene Tier derselben Farbe abbilden. Weiterhin lassen 120°-Drehungen um jeden Punkt, an dem jeweils drei Pfoten, Knie oder Köpfe verschiedenfarbiger Tiere zusammenstoßen, das gesamte Muster (unter Vernachlässigung der Färbung!) unverändert. Daher läßt sich auch jedes Tier einer Farbe auf jedes benachbarte Tier einer anderen Farbe abbilden. Damit lässt sich aber durch Nacheinanderanwendung beider Symmetrieabbildungen jedes Tier auf jedes andere abbilden. Es handelt sich also tatsächlich um ein Parkett.



Reptilien

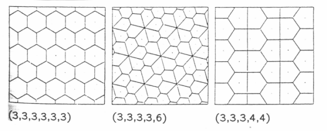
Geometrische Betrachtungsweise

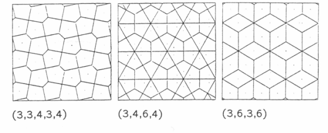
Man kann die Punkte auf dem Rand eines einzelnen Parkettsteins danach bewerten, zu wie vielen verschiedenen Parkettsteinen im Parkett sie gehören. Man bezeichnet Punkte, die zu mindestens drei verschiedenen Parkettsteinen gehören, als *Eckpunkte* und Punkte, die zu zwei Parkettsteinen gehören, als *Kantenpunkte*. Eine *Kante* ist dann eine zusammenhängende Linie aus Kantenpunkten, die genau zwei Eckpunkte miteinander verbindet.

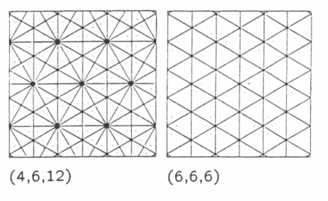
An einer Kante stoßen also genau zwei Parkettsteine aneinander. Das System aus Kanten und Ecken eines Parketts kann man sich sehr gut als „Netz“vorstellen mit den Eckpunkten als „Knoten“. Umläuft man nun einen einzelnen Parkettstein (etwa im Uhrzeigersinn) und notiert für jeden Eckpunkt seinen Wert, so erhält man eine Sequenz von natürlichen Zahlen, die bis auf zyklische Vertauschungen für alle Parkettsteine desselben Parketts dieselbe ist. Man bezeichnet diese Sequenz auch als *Knüpfmuster* des betreffenden Parketts.

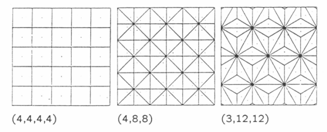
Realisierung der Knüpfmuster

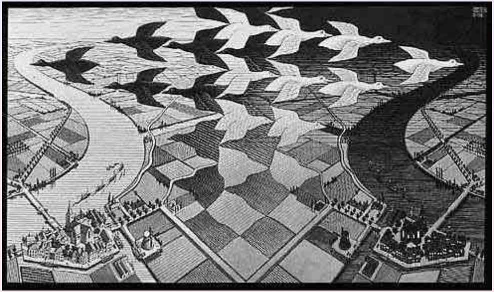
Es gibt 11 verschiedene Knüpfmuster. Knüpfmuster durch Parkettsteine.



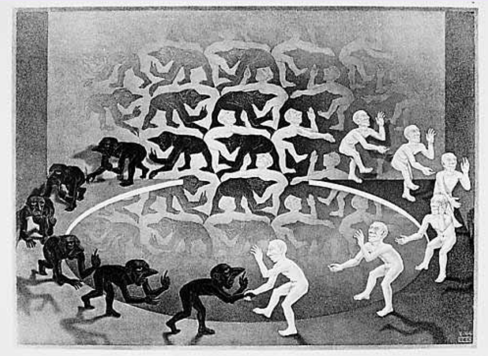




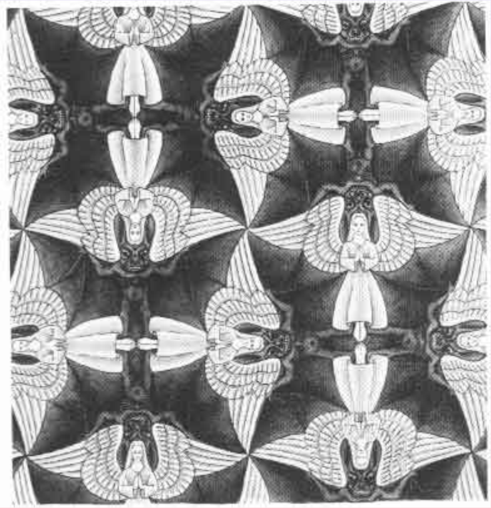




Tag und Nacht



Begegnung



Engel und Teufel

Inhalt

1 Mathematische Grundlagen der Parkettierungen

2 M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung

3 Das Penrose-Parkett

4 Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung

5 Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie

6 Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene

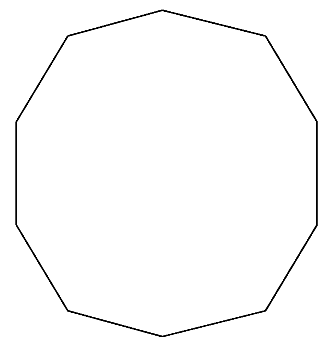
7 Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Das Penrose-Parkett

Die Penrose-Parkettierung besteht aus unzählig vielen, zwei verschiedenen großen Rauten. Das Penrose-Parkett nach seinem Erfinder, dem britischen Physiker Robert Penrose benannt, der 1974 entdeckte, dass man mit nur zwei geometrischen Formen anhand weniger, bestimmten Regeln der Zusammensetzung eine unendlich große Fläche mit unendlich vielen Kombinationen bedecken konnte, ohne dass sich einzelne Teilausschnitte je wiederholten. In diesem Zusammenhang muss beachtet werden, dass sich gewöhnliche Muster auf einer unendlichen Fläche unendlich oft wiederholen und somit die Eigenschaft besitzen, dass sie symmetrisch und periodisch sind. Die Penrose-Parkette sind unsymmetrisch und aperiodisch, da sie einzelne sehr symmetrische Kleinbereiche aufweisen, aber größere gleichende Flächen nie auftreten.

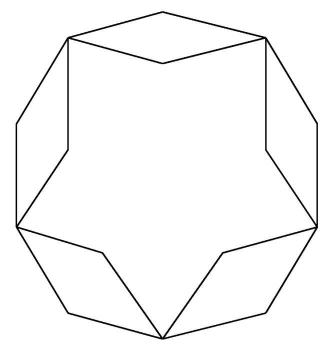
Wir betrachten nun, wie man aus einem Zehneck eine Penrosefigur konstruieren kann.

1. Zunächst wird das reguläre Zehneck konstruiert.



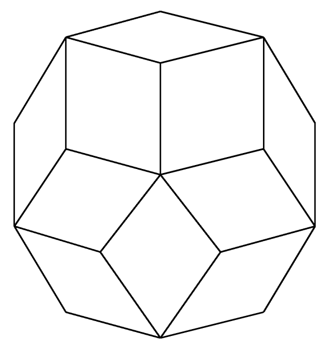
Das reguläre Zehneck

2. Konstruktion der fünf schmalen Rauten. Der Winkel der Raute muss 36° besitzen und der weitere Winkel $180^\circ - 36^\circ = 44^\circ$.



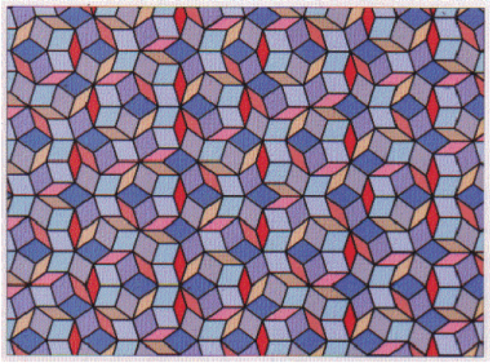
Das reguläre Zehneck mit fünf 36°-Rauten

3. Die restlichen fünf Rauten ergeben sich dann durch Parallelverschiebung. Dabei gilt $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, also $72^\circ = 180^\circ - 3 \cdot 36^\circ$ und $108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$.



Das reguläre Zehneck mit fünf 36°-Rauten und fünf 72°-Rauten

Führt man diese Konstruktion mehrfach aus und legt die Parkette aneinander, so stellt man fest, dass von sechs verschiedenen Parkettierungen fünf achsensymmetrisch sind.



Das Penroseparkett

Man spricht von fünfzähliger Rotationssymmetrie. Aus diesen Überlegungen folgt, dass es für das reguläre Zehneck sechs mögliche Parkettierungen gibt.

Wir betrachten nun weitere n-Ecke. Hierbei gehe man genauso vor wie bei der Konstruktion des Zehnecks. Man erhält für den Winkel der Rauten $\frac{360^\circ}{n}$. Dieses sind die schmalen Rauten, für die die Winkel $\frac{360^\circ}{n}$ und $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ betragen. Eine weitere Raute passt an zwei solche schmalen Rauten, welche die Winkel
$(\frac{n}{2} - 3) \cdot \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{n}$ und $180^\circ - (\frac{n}{2} - 3) \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{1080^\circ}{n}$
besitzen.

Es ergibt sich

n	$\frac{360°}{n}$	$180° - \frac{360°}{n}$	$180° - \frac{1080}{n}$	$\frac{1080}{n}$
3	120°	60°	−180°	360°
4	90°	90°	−90°	270°
5	72°	108°	−36°	216°
6	60°	120°	0°	180°
7	51.4°	128.6°	25.7°	154.3°
8	45°	135°	45°	135°
9	40°	140°	60°	120°
10	36°	144°	72°	108°

Hierbei stellt man folgendes fest:

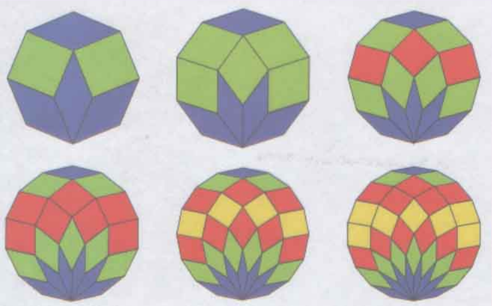
- Für gerades n sind die betrachteten Winkel bei den anstoßenden Rauten Vielfache voneinander.
- Dieses ist bei ungeraden n nicht mehr der Fall (wird im Folgenden nicht weiter betrachtet).
- Dividiert man die Winkel $180^\circ - \frac{1080^\circ}{n}$ durch $\frac{360^\circ}{n}$ so stellt man fest, dass eine ganzzahlige Zahl entsteht.

Bei der Konstruktion des Penrose Parketts beginne man mit den beiden schmalen Rauten und füge dann $n-3$ weitere hinzu. In die dabei entstehenden Zwischenräume passe $n-2$ Rauten mit dem spitzen Winkel $360^\circ - 2(180^\circ - \frac{180^\circ}{n}) = \frac{360^\circ}{n} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{n}$ und dem stumpfen Winkel $180^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ}{n} = (n-2)\frac{180^\circ}{n}$.

Damit erhält man zwischen den Winkeln zweier Rauten bei $2n$-Ecken folgenden Zusammenhang

n	$\frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$	$180° - \frac{1080°}{2n} = 180° - \frac{540°}{n}$	Vielfachfaktor
4	45°	45°	1
5	36°	72°	2
6	30°	90°	3
7	25.7°	102.9°	4
8	22.5°	112.5°	5

In den entstehenden Zwischenräumen der $n-2$ Rauten passen wieder $n-3$ Rauten u. s. w. Weitere Möglichkeiten erhält man durch Drehen der Flächen. Insgeamt benötigt man somit $\frac{n(n-1)}{2}$ Puzzle.



Puzzle-Belegungen des regulären 8-, 10-, 12-, 14-, 16- und 18-Ecks

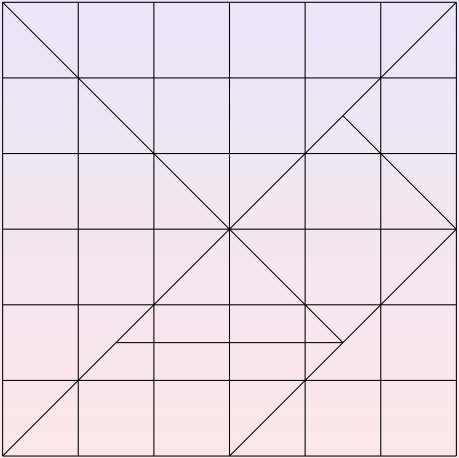
Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

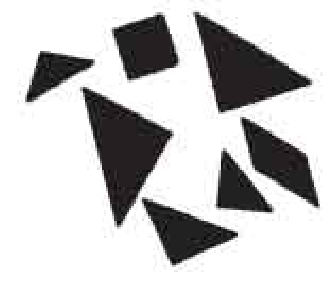
Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung

Unter den vielen in Europa beliebten Legespielen nimmt das Tangram eine besondere Stellung ein. Während zum Beispiel beim Puzzle ein Bild aus vielen ganz verschieden geformten Teilen zusammengesetzt wird und die Schwierigkeit hauptsächlich von der Teilezahl abhängt, bleibt die Anzahl der Teile beim Tangram immer gleich und ihre Formen ändern sich nicht. Das Spiel besteht aus 7 einfachen geometrischen Formen, die sich durch die Unterteilung eines Quadrats ergeben. Schon dieses Quadrat nachzulegen, ist ohne die Auflösung nicht einfach.

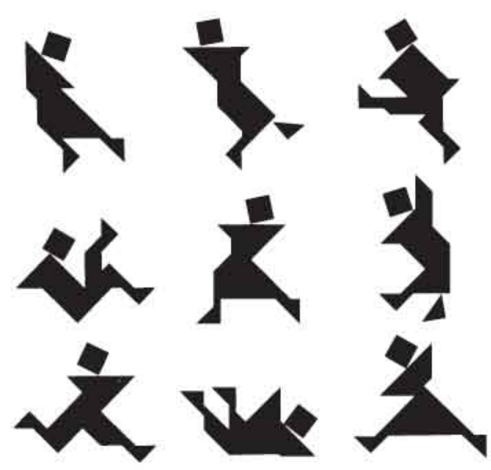
Die Regeln sind einfach: Für alle Vorlagen werden immer alle 7 Formen verwendet, auch wenn dies manchmal einiges Kopfzerbrechen bereitet. Das Spiel entfaltet sich ausschließlich in der Fläche; die Formen werden also nie übereinandergelegt. Dabei muss das Vorbild ganz genau getroffen werden.



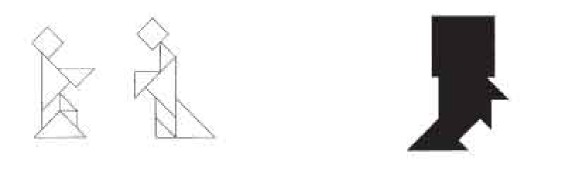
Sieben Teile des Tangrams als Quadrat



Sieben Teile des Tangrams



Sieben Teile des Tangrams

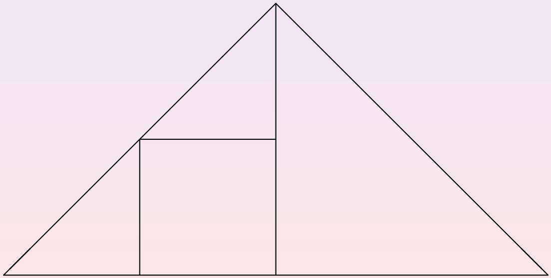


Sieben Teile des Tangrams

Sieben Teile des Tangrams

Geometrie und Tangram - eine interessante Aufgabe

Unter den sieben TANGRAM-Teilen befinden sich drei verschiedene große Dreiecke. Nun läßt sich ein weiteres Dreieck aus folgenden vier Teilen legen: Dem großen Dreieck, zwei kleineren Dreiecken und dem Quadrat.



- Kannst Du ein weiteres Dreieck der gleichen Größe auch aus den folgenden Teilen legen:
- Einem großen Dreieck, zwei kleinen Dreiecken und dem Parallelogramm? (zwei Ergebnisse) ...
- Einem großen Dreieck, dem mittleren Dreieck und zwei kleineren Dreiecken?
- Läßt sich ein Dreieck auch aus nur zwei Teilen ... drei Teilen ... fünf Teilen ... sechs Teilen ... allen sieben Teilen zusammenlegen?
- Es ist offensichtlich, daß man mit allen sieben Teilen ein Quadrat legen kann. Wie sieht es jedoch aus, wenn man nur zwei Teile benutzen will? ... drei Teile? ...
- Aus welchen verschiedenen Teilen lassen sich Rechtecke legen?
- Welche weiteren Vielecke lassen sich noch konstruieren?

Lernbezogene Einsatzmöglichkeiten des Tangrams sind:

- Kreativer Umgang mit Flächenformen (Offenheit durch freies Legen);
- Erkennen einfacher Flächenformen;
- Grundformen umfahren (Zeichnen mit Schablone), nachzeichnen und ausschneiden;
- Formenkundliches Kategorisieren (Sortieren, Beschreiben von Eigenschaften, Unterscheiden von Form und Größe, Benennen);
- Figuren auslegen (= Belegen einer begrenzten Fläche/Umrissfigur), auch Umlegen, Auffinden mehrerer Möglichkeiten;
- Figuren/Muster fortsetzen/vervollständigen;

- Legen nach Anweisung (z. B. aus gegebenen Teilen die Flächenformen Rechteck, Dreieck, Quadrat, Viereck legen);
- Figuren nach Vorlage legen (evtl. nur Umrissfigur gegeben);
- Erlernen geometrischer Grundbegriffe (Ecke, Winkel, Kante, Seite, rechtwinklig);
- Längenbetrachtungen (z. B. Welche Seiten passen genau aneinander?);
- Längenmessung;
- Erkennen von Zusammenhängen zwischen Figuren (z. B. zwei Dreiecke bilden Quadrat; Figur in Figur);
- Vergleich ähnlicher und kongruenter Figuren (z. B. gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke);
- Vorbereitung der zentrischen Streckung durch Vergleich verschieden großer Formen;

- Erarbeitung des Symmetriebegriffs:
  - Symmetrie mit Hilfe eines Spiegels herausfinden;
  - Spiegelbildliches Nachlegen von Tangramfiguren;
  - Heraussuchen der symmetrischen Tangramfiguren (z. B. Zwillingstangrame) und Einzeichnen der Spiegelachse;
  - Zeichnen von Tangramfiguren auf Karopapier und Spiegelung an der Achse;
  - Erfassen der Begriffe Symmetrie, Parallelität, Geradlinigkeit, Klappen, Drehen, Verschieben;

- Erarbeitung des Flächeninhaltsbegriffs:
  - „Messen"einer Fläche durch Auslegen mit Einheitsflächen;
  - Flächengleichheit bei Formverschiedenheit;
  - Unterscheidung Flächeninhalt (kann mit flacher Hand bestrichen werden) und Flächenumfang (= Randlinie, mit dem Finger nachzufahren);
  - Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens, des vorausschauenden Denkens, der Formauffassung, Formunterscheidung und Formcharakterisierung als Vorbereitung auf den späteren Geometrieunterricht.

Inhalt

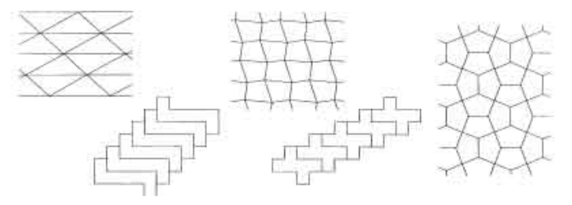
1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie

Parkettierungen ist ein einfaches, lückenloses, überschneidungsfreies Auslegen der Ebene mit deckungsgleichen Figuren. Das bedeutet, dass genau eine Flächenform verwendet wird. Ein zusätzliches Merkmal einer Parkettierung ist die theoretisch unendliche Fortsetzbarkeit. Beim Parkettieren steht vor allem die Idee des Passens im Vordergrund, indirekt auch die des Messens.

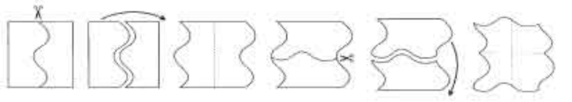
Parkettieren mit Vielecken

Mit jedem beliebigen Dreieck ist das Parkettieren möglich. Beachtung finden dann zusammenpassende Seitenlängen und die Winkelsumme des Dreiecks von 180°.
Ebenso kann mit jedem beliebigen — außer mit einem überschlagenden — Viereck parkettiert werden, da die Winkelsumme 360° beträgt.
Erste Einschränkungen erlebt man mit Fünfecken. So gibt es gerade eine einzige gleichseitige Fünfecksform, mit der eine Parkettierung möglich ist, mit folgenden Innenwinkeln: zwei rechte Winkel, zwei Winkel von 114.3° und ein Winkel von 131.4°.
Weiter eignet sich nur das regelmäßige Sechseck zum Parkettieren.
Mit anderen Vielecken ist das Parkettieren nicht möglich.



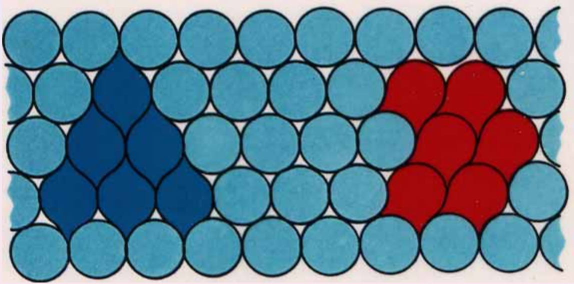
Parkettieren mit krummlinig begrenzten Formen

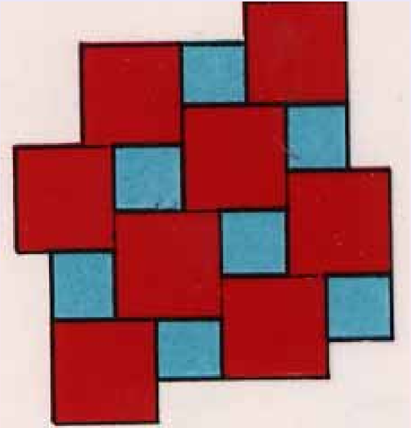
Ausgehend von Polygonen lassen sich nach bestimmten Regeln krummlinig begrenzte Formen entwerfen, die sich zum Parkettieren eignen. Als einfachste Regel bietet sich die Verschiebung an, welche bei Polygonen angewendet wird, deren gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind.
Die „Knabber-Technik“besteht darin, dass man in einer Ecke beginnend mit der Schere in die Figur schneidet und bei einer benachbarten Ecke endet. Das abgeschnittene Stück wird anschließend zur gegenüberliegenden Seite verschoben, bis sich die ursprünglichen Außenkanten berühren, welche mit einem Stück Klebeband verbunden werden. Schließlich schneidet man entsprechend ein zweites Mal. Eine Variante ist das Schneiden von einer Seite zur gegenüberliegenden, statt in den Ecken zu beginnen.



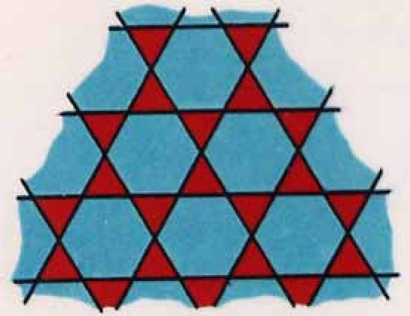
Eine zweite Transformationsregel, die Drehung, kann bei Polygonen angewendet werden, die gleich lange benachbarte Seiten besitzen, also bei Quadrat, gleichseitigem Dreieck oder Raute, Drachen und Sechseck. Dabei wird ebenfalls an einer Seite von Ecke zu Ecke ein Stück herausgeschnitten, nun aber um einen Eckpunkt gedreht und an der anderen Seite wieder angeklebt.

Die technisch schwierigste Veränderung ist die Drehung um den Seitenmittelpunkt, z. B. bei einem Dreieck. Zunächst muss der Mittelpunkt einer Seite durch Messen oder Falten ermittelt werden. Dann wird von einem Eckpunkt ausgehend bis zu diesem Mittelpunkt ein Stück abgeschnitten und durch eine Drehung um den Seitenmittelpunkt an der gleichen Seite angelegt. Dies kann für alle Seiten mit unterschiedlichen Kurvenstücken wiederholt werden.

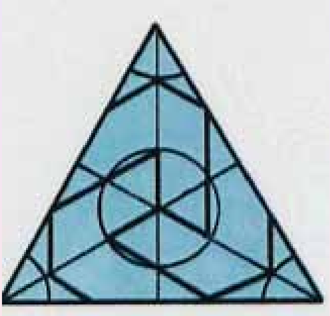


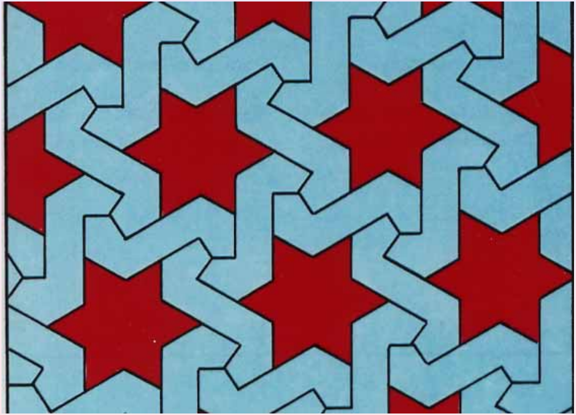


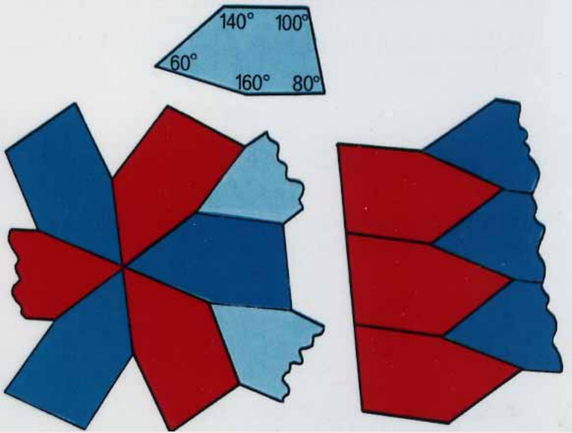
Zwei verschieden große Quadrate?



Sechsecke und Dreiecke?





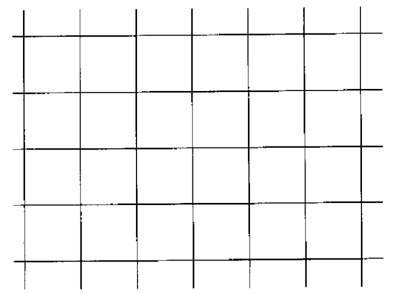

140°
100°
60°
160°
80°

Inhalt

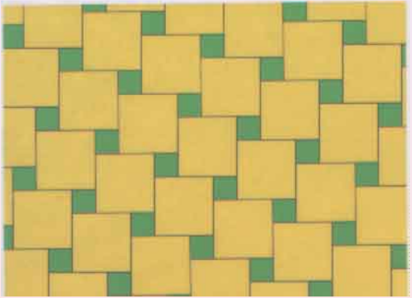
1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Entdeckungen zu Parkettierungen

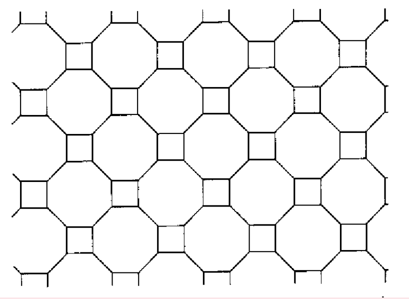
Auslegung eines Badezimmerbodens mit quadratischen Fliesen („Q-Muster“)



Die Auslegung der Ebene mit Quadraten gehört sicherlich zu den „langweiligen“Mustern. Abwechselungsreicher wirkt die Parkettierung mit zwei unterschiedlich großen Quadraten („guk-Muster“)

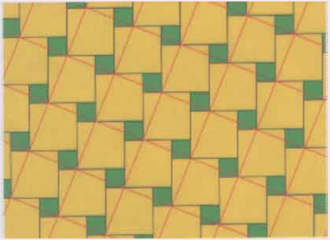


Insgesamt „ruhiger“wirkt die Parkettierung der Ebene mit Achtecken und Quadraten mit gleich großen Seitenlängen („A-Q-Muster“)

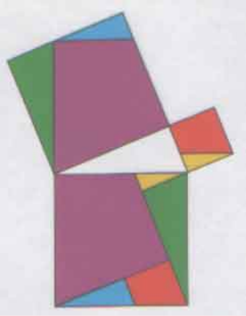


Zerlegungsbeweis des Satzes vom Pythagoras (1)

1. Herstellung eines Q-Musters, bei dem die Fläche eines Quadrates gerade so groß ist wie die beiden Flächen der guk-Musters. Für die Seitenlänge c des Q-Musters und Seitenlänge a und b der beiden Quadrate gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
2. Überlagerung der beiden Raster führt zu zwei Puzzle-Beweisen des Satzes von Pythoagoras.

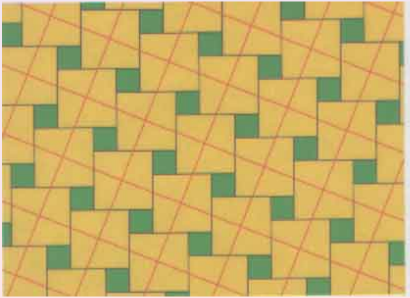


Man sieht, dass das Q-Muster im guk-Muster fünf Flächenstücke abtrennt, ein Viereck und vier rechtwinklige Dreiecke. Dies bedeutet, dass sich das Hypotenusenquadrat zusammensetzen lässt durch fünf Puzzlestücke. Man muss nur das kleinere Kathetenquadrat nach rechts verschieben und erhält die Pythagoras-Satz-Figur nach Göpel.



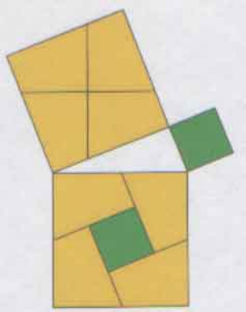
Zerlegungsbeweis des Satzes vom Pythagoras (2)

Man kann das Q-Muster aber auch so über das guk-Muster legen, dass sich das kleine Quadrat vollständig innerhalb eines Quadrates des Q-Musters befindet.



Die so entstehenden fünf Puzzlestücke ergeben genau die Parkettierung des Hypotenusenquadrats, wie sie im Perigalschen Zerlegungsbeweis des Satzes von Pythagoras vorgeschlagen wird. Das kleinere Kathetenquadrat wird unzerlegt als Puzzlestück für die Parkettierung des Hypothenusenquadrats verwendet, das größere Kathetenquadrat wird in vier - im symmetrischen Fall gleich große - Vierecke zerlegt.

Man kann das Q-Muster auch parallel zu den Quadratseiten verschieben: Solange sich die kleinen Quadrate des guk-Musters innerhalb der Quadrate des Q-Musters befinden, ergibt sich eine Zerlegung im Sinne Perigals.



Zerlegung eines Quadrates und eines 8-Eckes mit gleichen Puzzlestücken

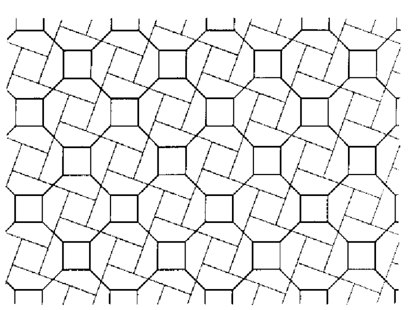
Man wählt die Seitenlänge so, dass die kleinen Quadrate in beiden Mustern gleich groß sind und die großen Quadrate und die Achtecke gleine Flächeninhalte besitzen.
Flächeninhalt des Achteckes:

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = a^2 \cdot (2 + 2\sqrt{2}).$$

Seitenlänge s des flächengleichen großen Quadrates:

$$s = a \cdot \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}.$$

Die Muster können so aufeinander gebracht werden, dass die Mitte eines kleinen Quadrats des guk-Musters und die Mitte des Achteckes aufeinander fallen und auch die Mitte des Quadrats aus dem Achteck-Quadrat-Raster mit der Quadratmitte des großen Qzadrats des guk-Musters



Inhalt

1. Mathematische Grundlagen der Parkettierungen
2. M. C. Escher – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung
3. Das Penrose-Parkett
4. Tangram - eine etwas "andere" Parkettierung
5. Parkettieren als "Spiel mit Flächen" in der Geometrie
6. Entdeckungen zu Parkettierungen der Ebene
7. Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Interessante Aufgaben zur Parkettierung

Beispiel

Bestimme von einem Zwölfeck die Summe der Innenwinkel und kannst du ein *n*-Eck angeben, bei dem die Winkelsumme 17640° beträgt? Bestimme von diesem *n*-Eck die Innenwinkel!

Lösung: Wie man leicht sieht gilt $(12-2) \cdot 180^\circ = 1800$ und das gesuchte *n*-Eck ist ein Zehneck mit den Innenwinkel $\mu = 176.4^\circ$.

Beispiel

Wie viel Symmetrieachsen hat ein n-Eck und beschreibe die Lage der Achsen. Welche n-Ecke sind punktsymmetrisch?

Lösung: Ein regelmäßiges n-Eck hat n Symmetrieebenen. Falls n gerade, dann sind $\frac{n}{2}$ Mittelsenkrechten und $\frac{n}{2}$ Winkelhalbierende die Symmetrieachsen. Falls n ungerade, dann fallen die Mittelsenkrechten und die Winkelhalbierenden zusammen. Ist n gerade, dann sind diese n-Ecke punktsymmetrisch.

Beispiel

Das 51-Eck lässt sich über das 17-Eck und das gleichseitige Dreieck konstruieren, das 85-Eck über das 17-Eck und das Fünfeck. Gesucht sind die Gleichung für die Konstruktion des Mittelpunktswinkels **ohne das eine Konstruktion ausgeführt** wird.

Lösung: Man sieht $\frac{360^\circ}{51} = 6\frac{360^\circ}{17} - 1\frac{360^\circ}{3}$ und $\frac{360^\circ}{85} = 7\frac{360^\circ}{17} - 2\frac{360^\circ}{5}$.