

**Realität im „Klassenzimmer“
oder**

**Wie können Modellbildungskompetenzen in
der S I entwickelt werden?**

Prof. Dr. Herbert Henning, Thomas Kubitza,

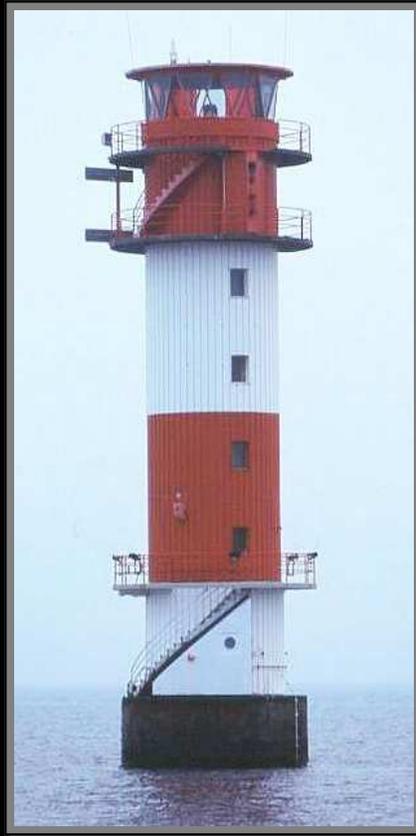
Christian Hartfeldt

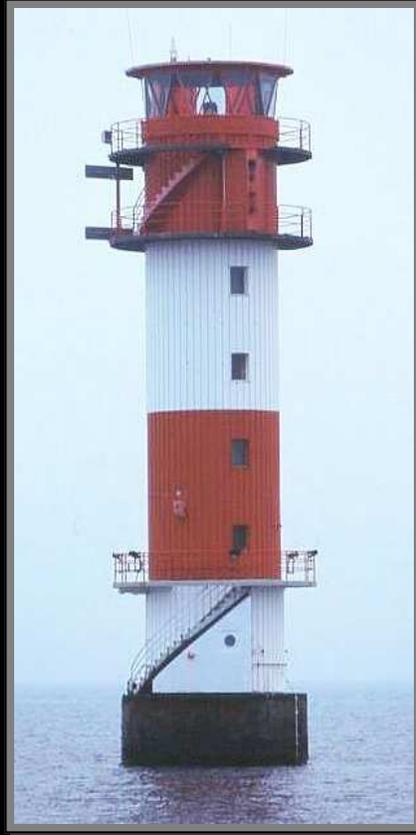
Wie weit ist es bis zum Horizont?

In der Nordsee steht ein 25 m hoher Leuchtturm.

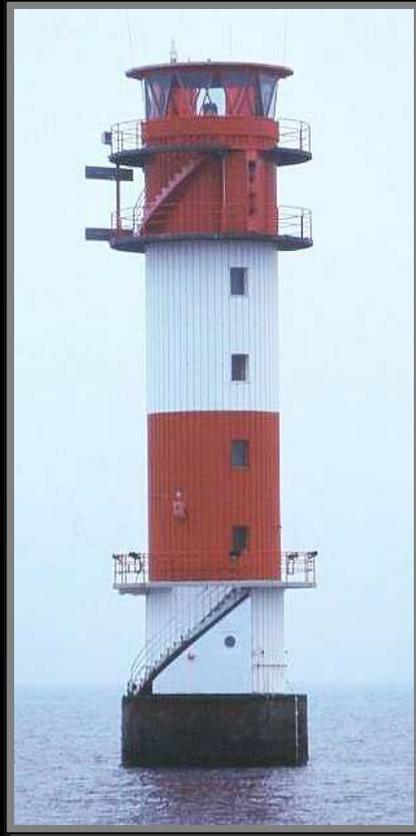
Wie weit ist es bis zum Horizont?

In der Nordsee steht ein 25 m hoher Leuchtturm.

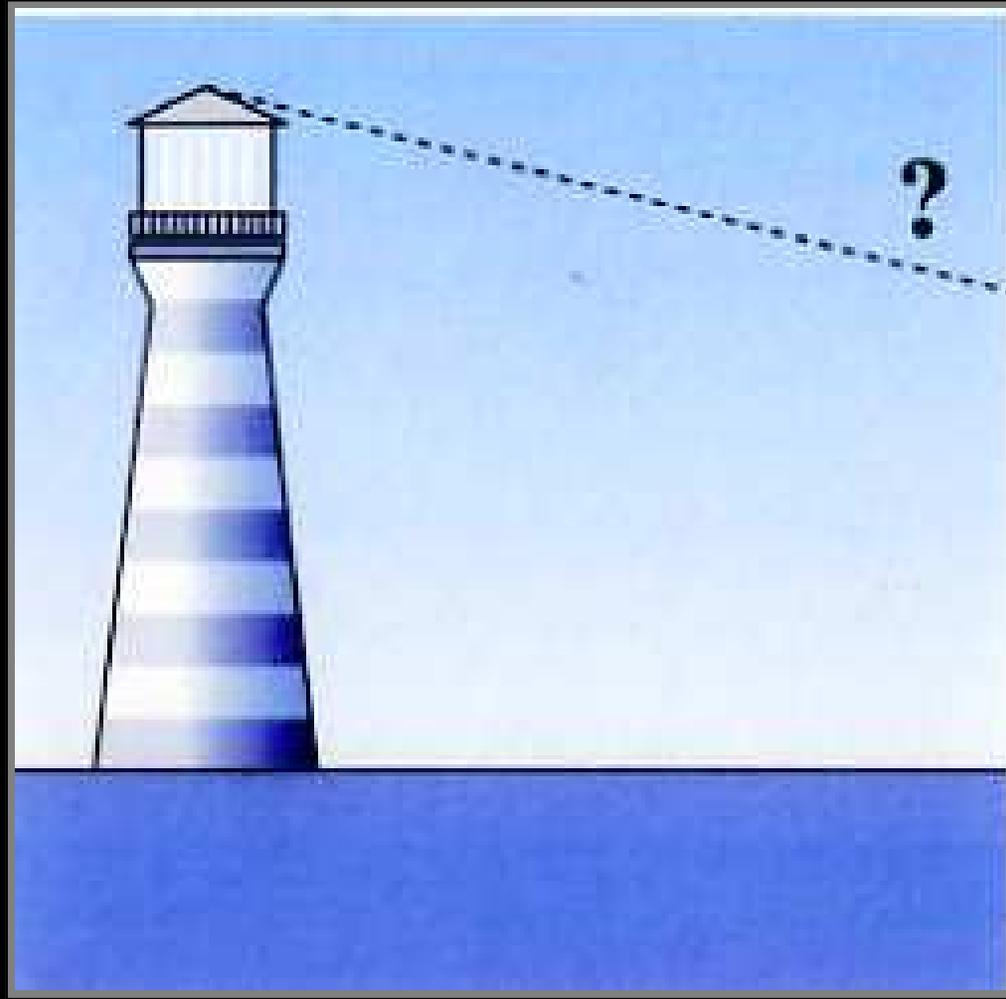




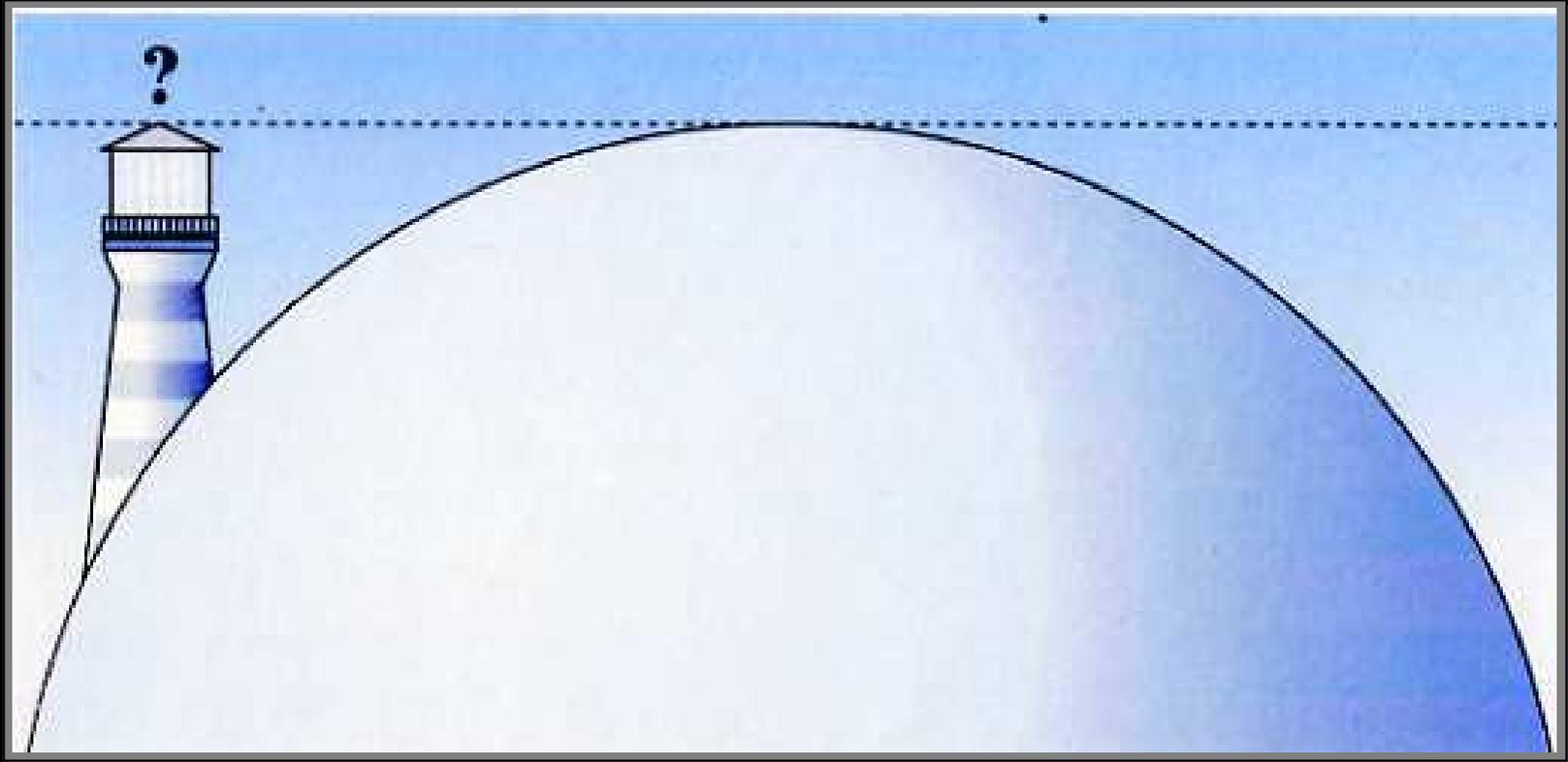
Wie weit kann man von der obersten Plattform bei bester Sicht sehen?



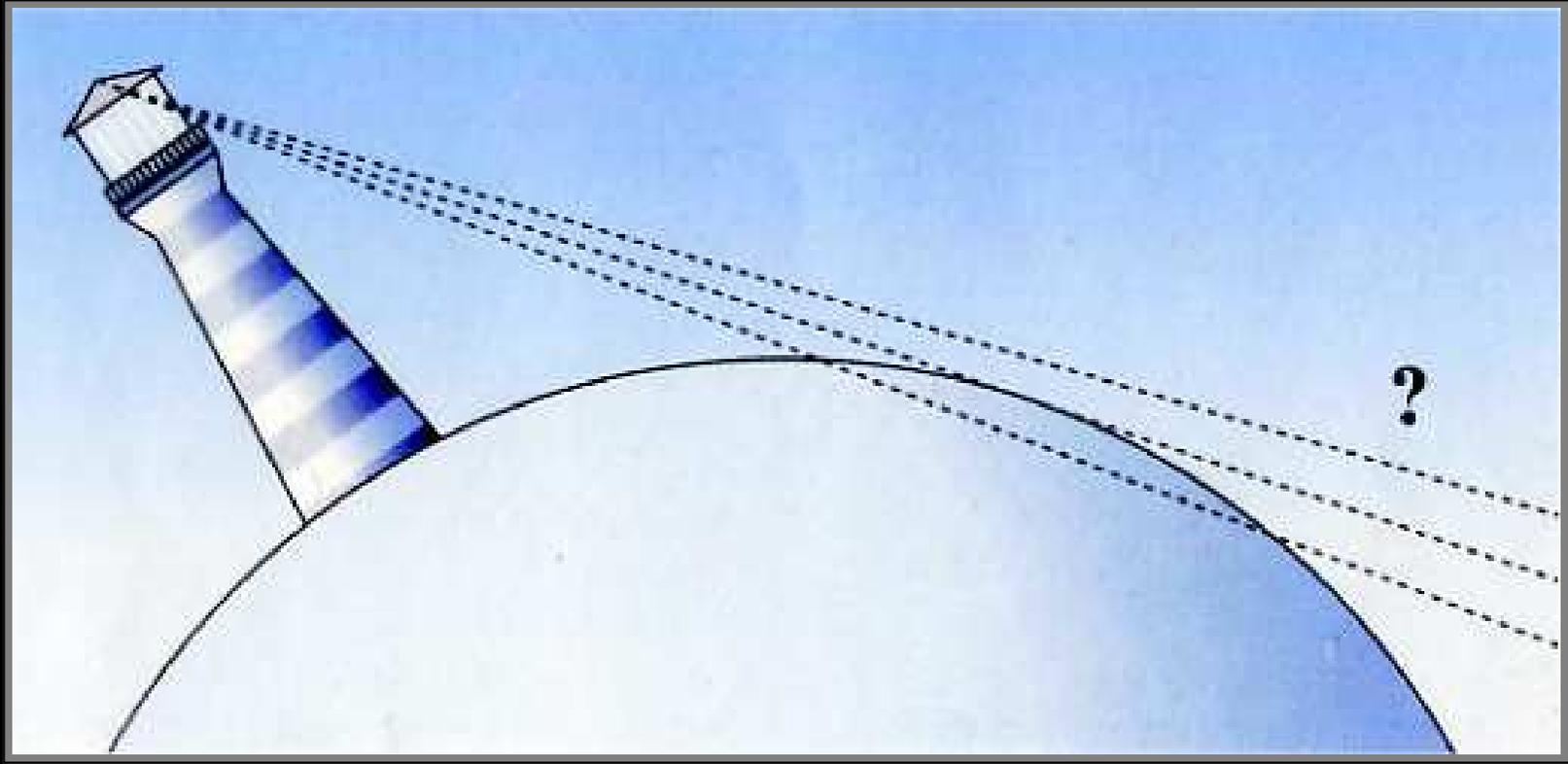
Wie weit kann man von der obersten Plattform bei bester Sicht sehen?
Überlege auch, von welchen Faktoren die Sichtweise abhängt!



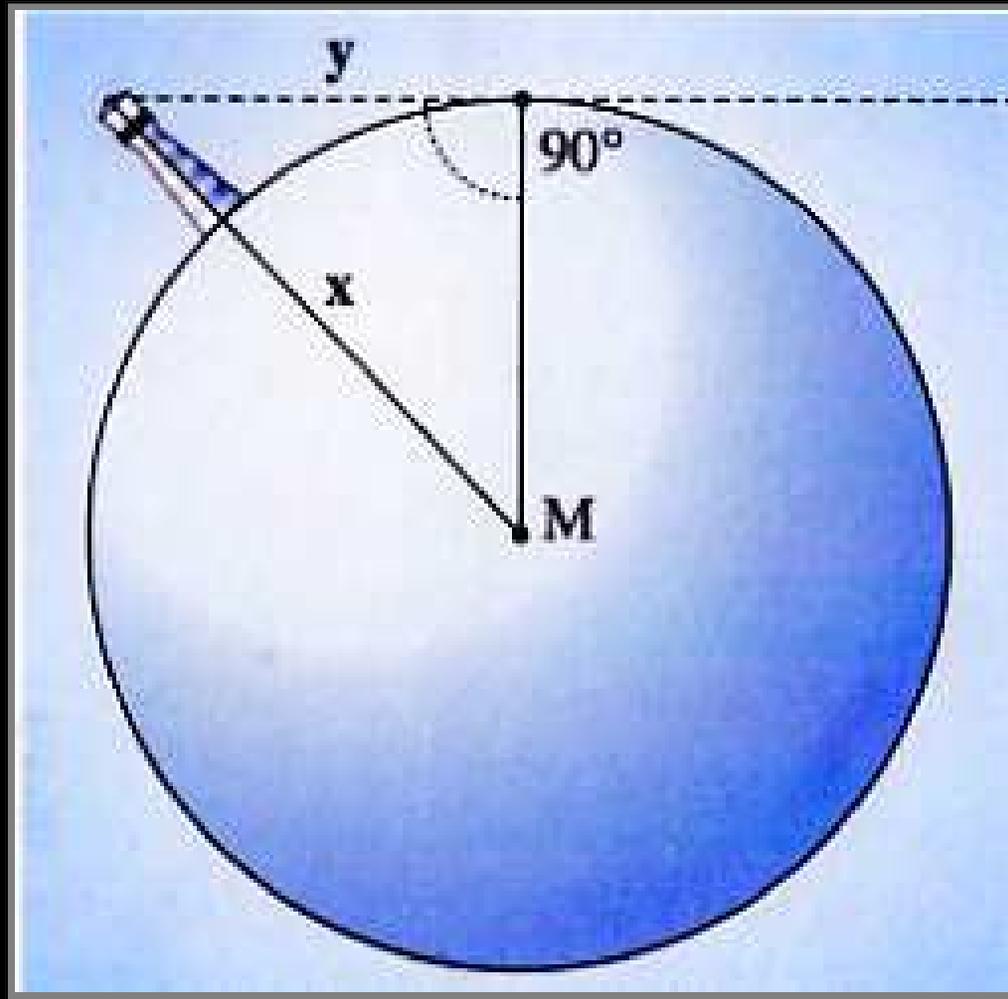
Hier ist die Erdkrümmung noch nicht in die Vorstellung eingeflossen, ein wirklicher Horizont ist noch nicht erkennbar.



Hier kommt zwar die Erdkrümmung mit ins Spiel, aber der Turm hat noch keine Beziehung mit der Erde



Jetzt steht auch der Turm richtig, aber ein neues Problem taucht auf.
Wie finde ich genau den Berührungspunkt der Sichtlinie mit dem Erdkreis?



Jetzt wird auch der Lösungsweg sichtbar.

Modellbildung

Modellbildung

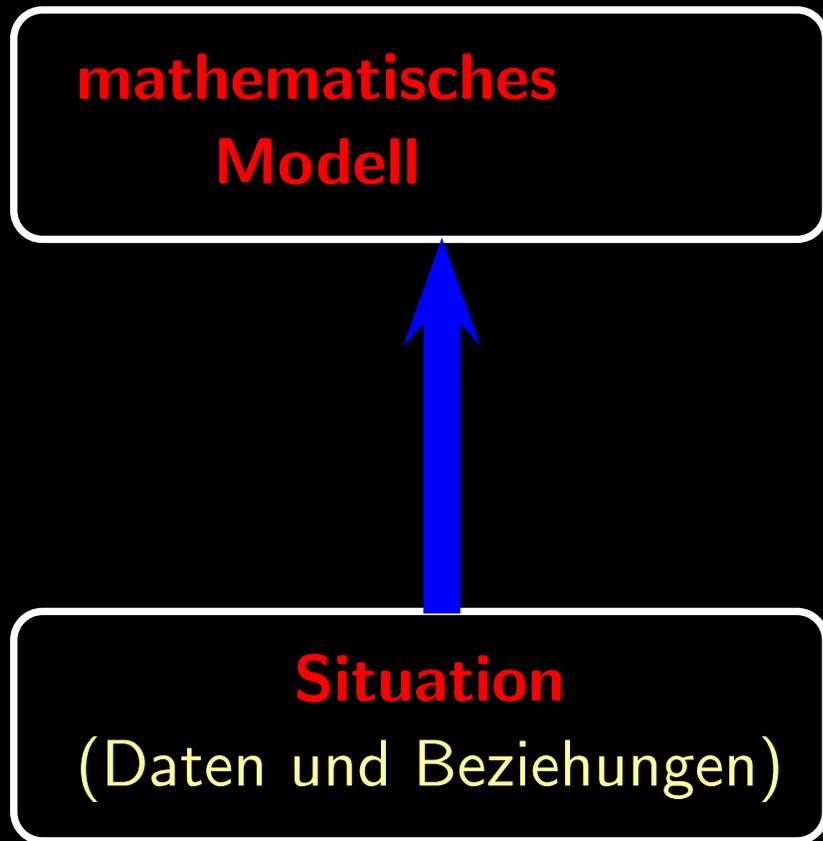
Situation
(Daten und Beziehungen)

Modellbildung

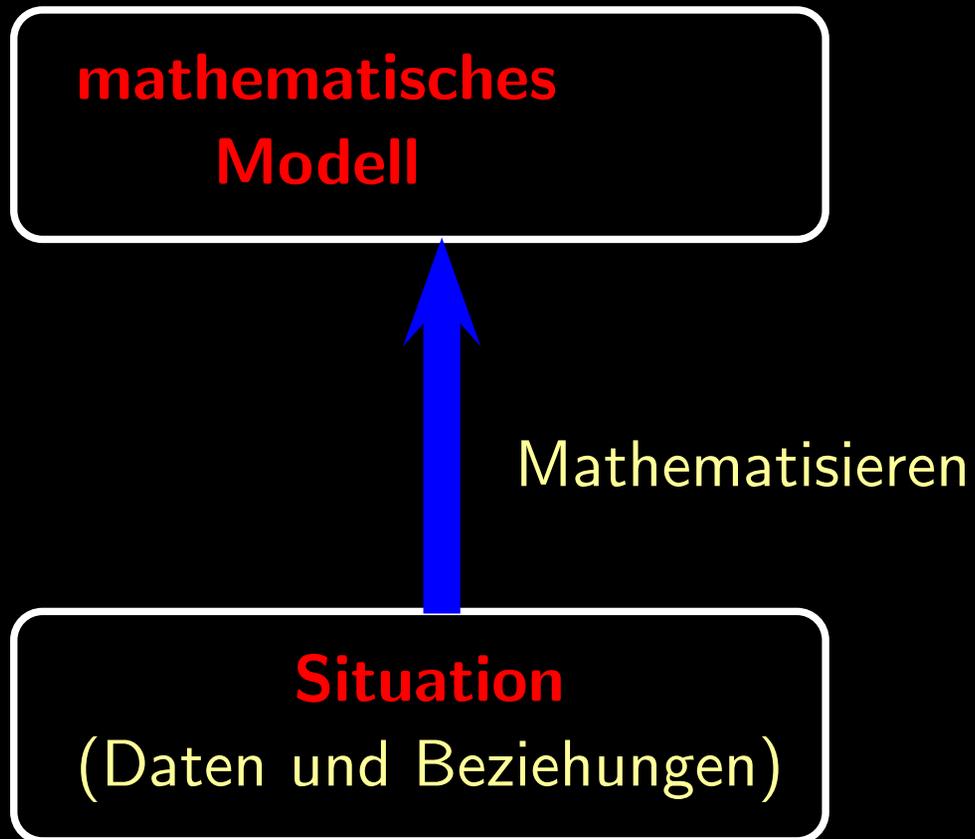
**mathematisches
Modell**

Situation
(Daten und Beziehungen)

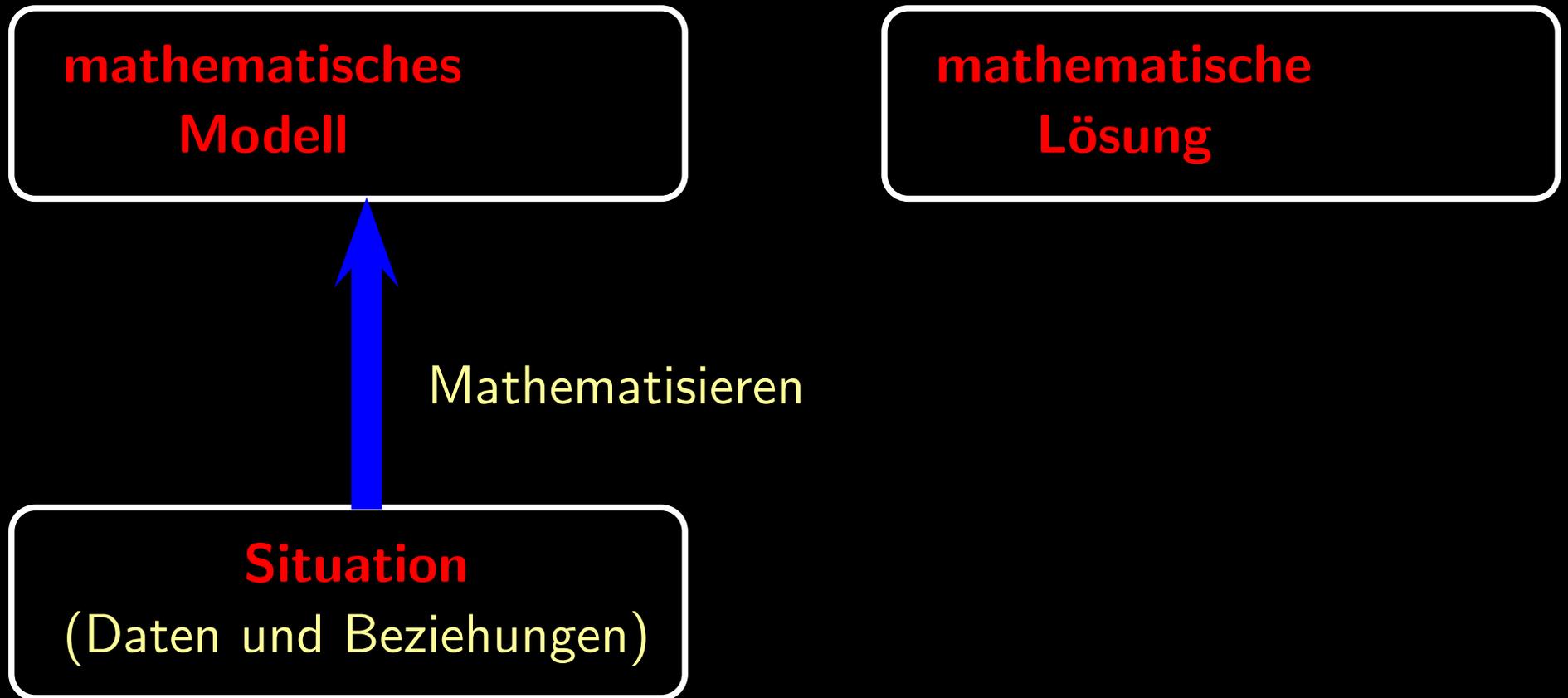
Modellbildung



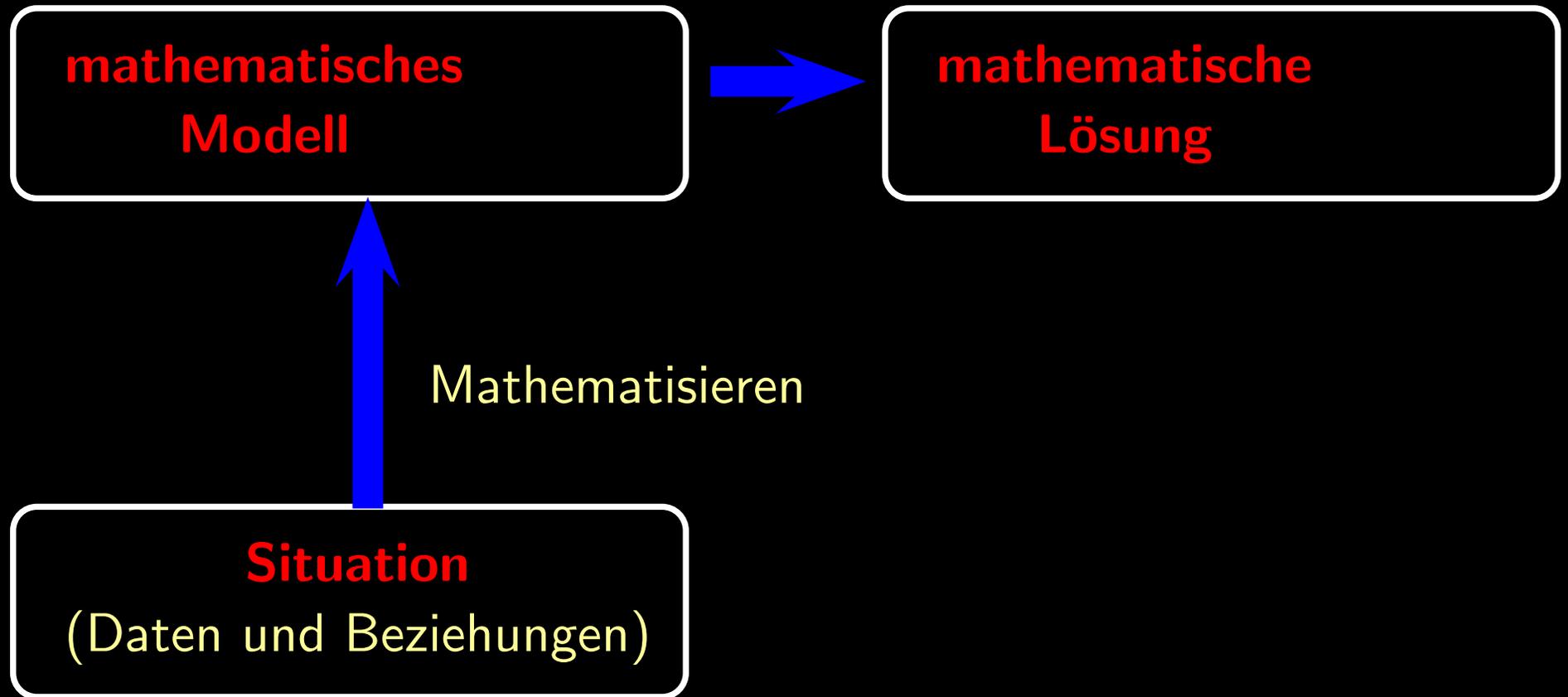
Modellbildung



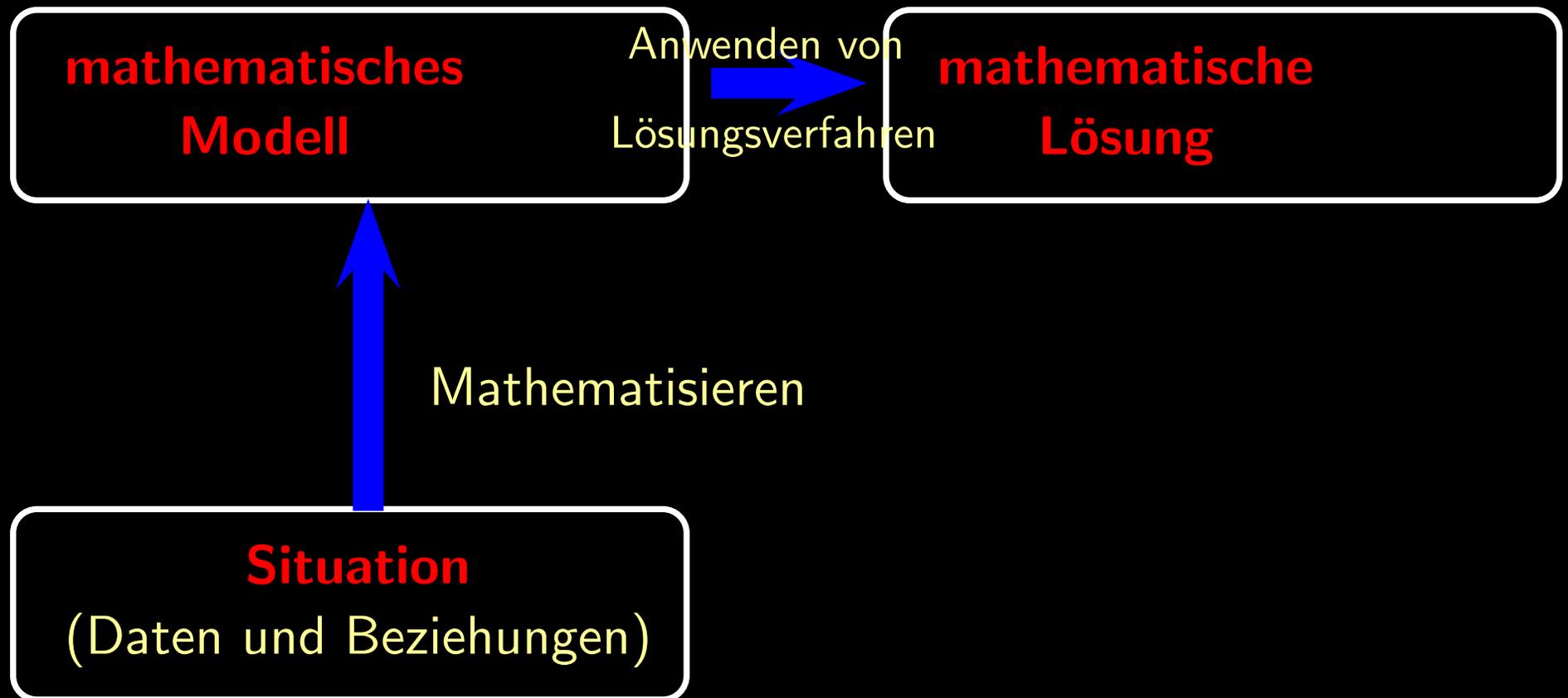
Modellbildung



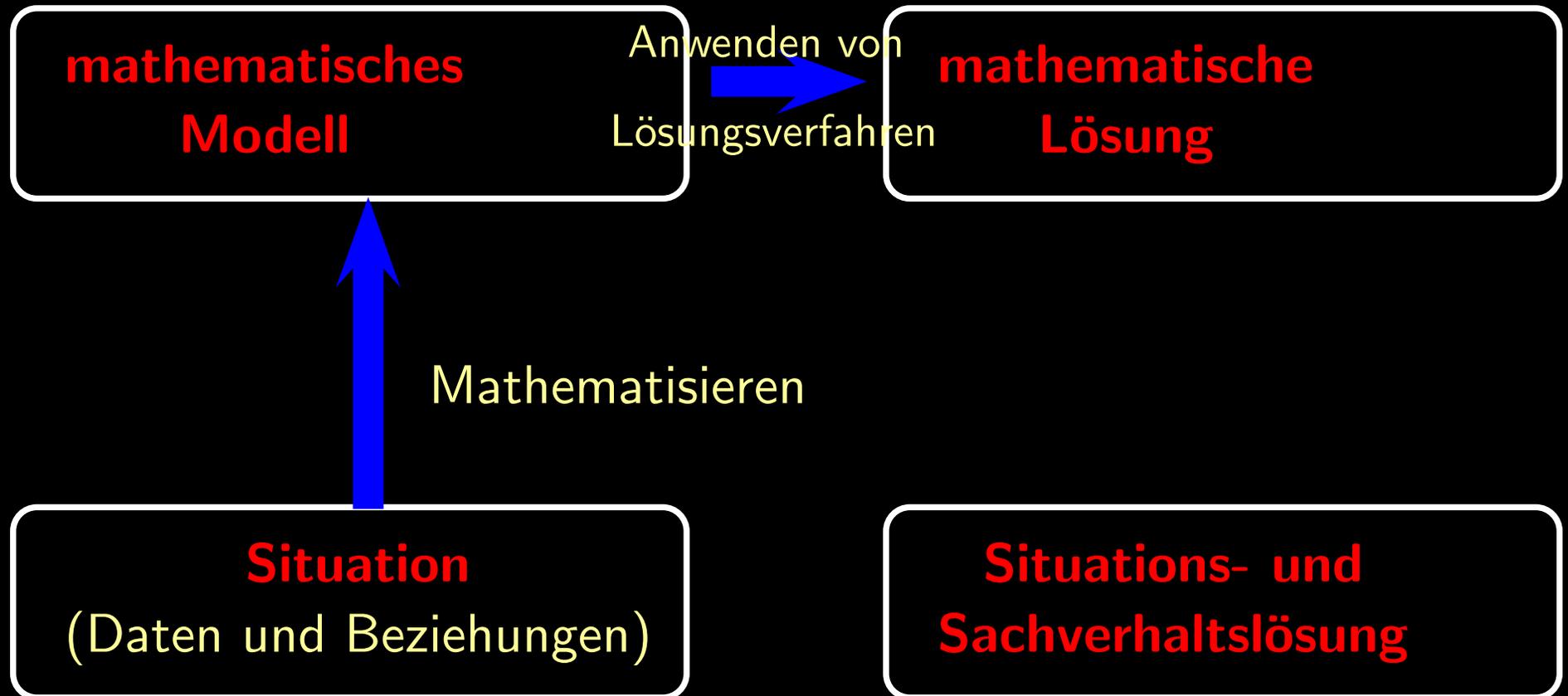
Modellbildung



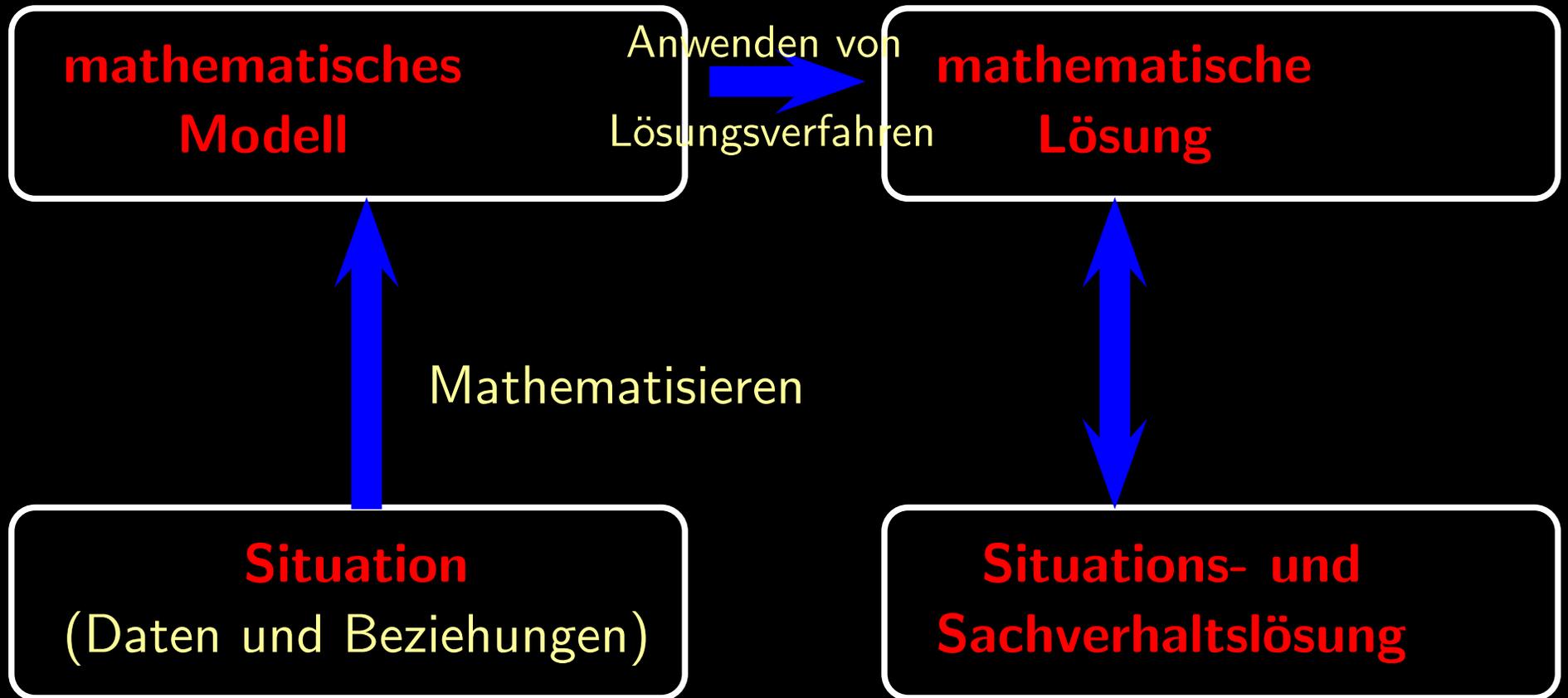
Modellbildung



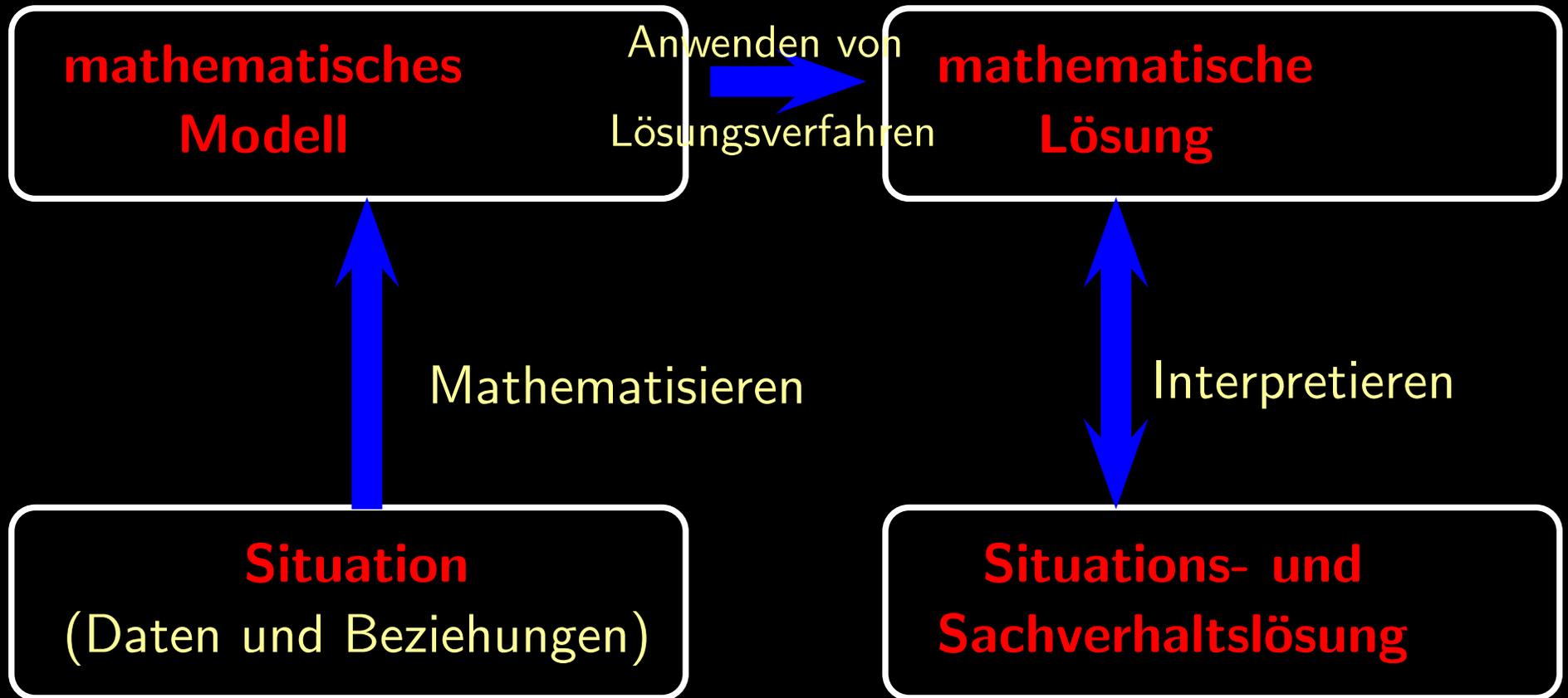
Modellbildung



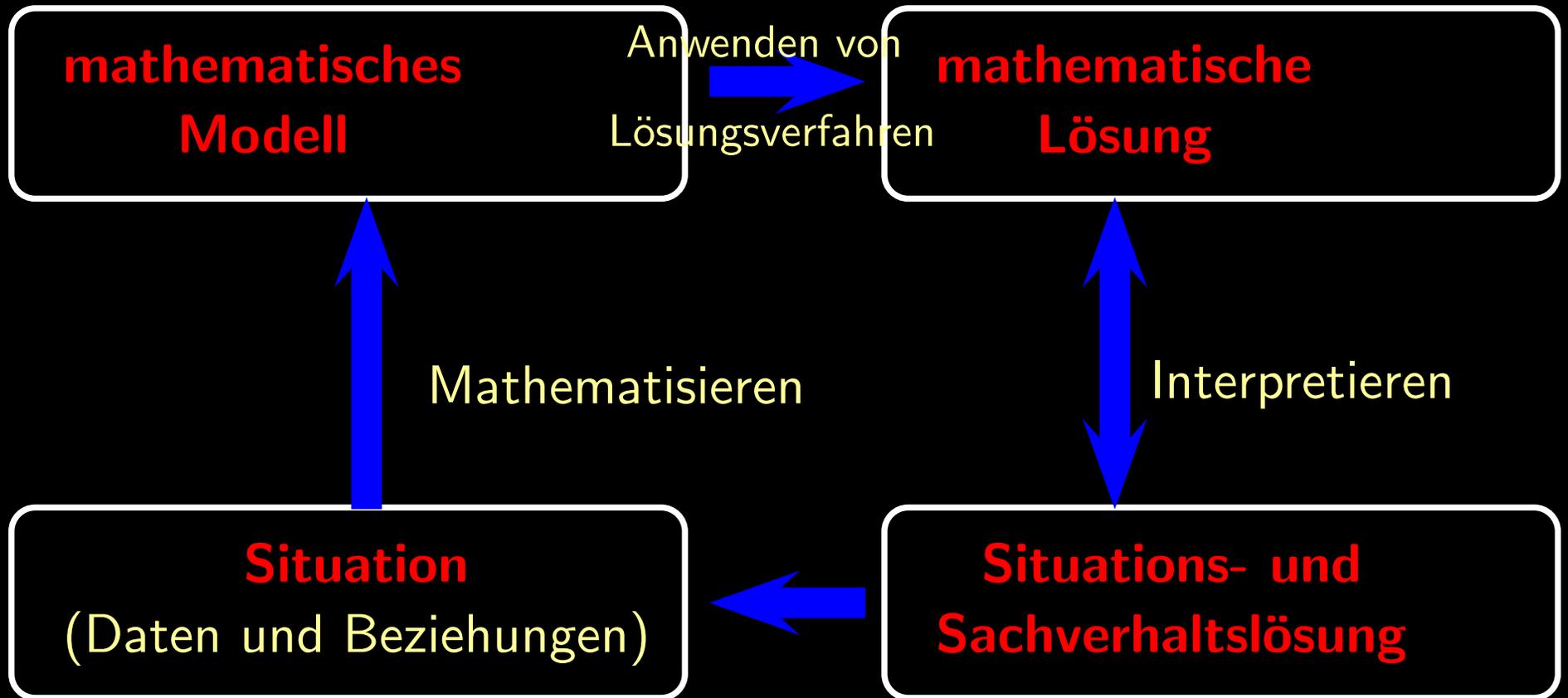
Modellbildung



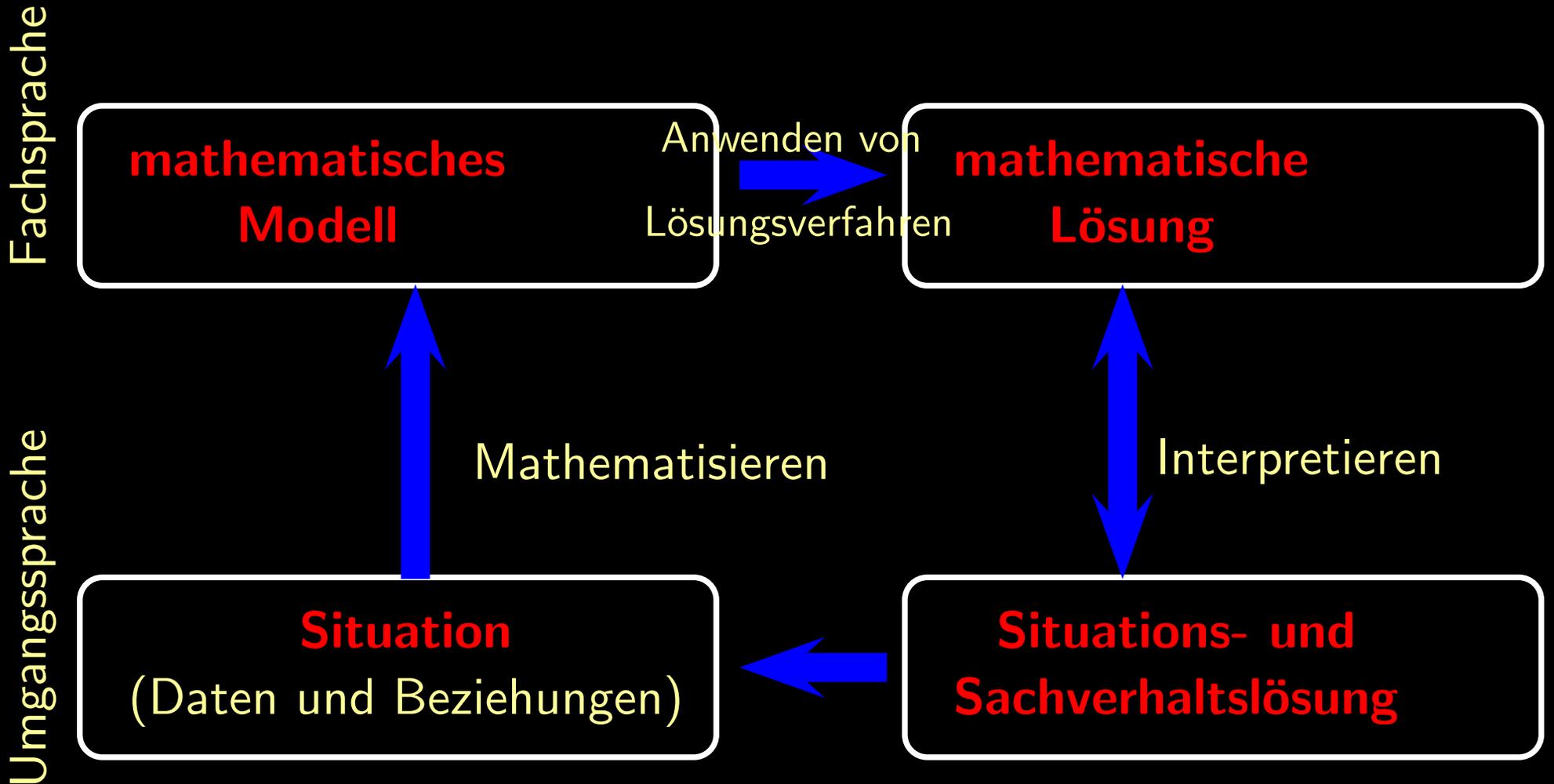
Modellbildung



Modellbildung



Modellbildung



Modellbildungskreislauf in 6 Phasen

Reale Welt

Reale Welt

Mathematische Welt

Mathematische Welt

Reale Welt



1. Phase

Problem-
situation

Reale Welt

Mathematische Welt

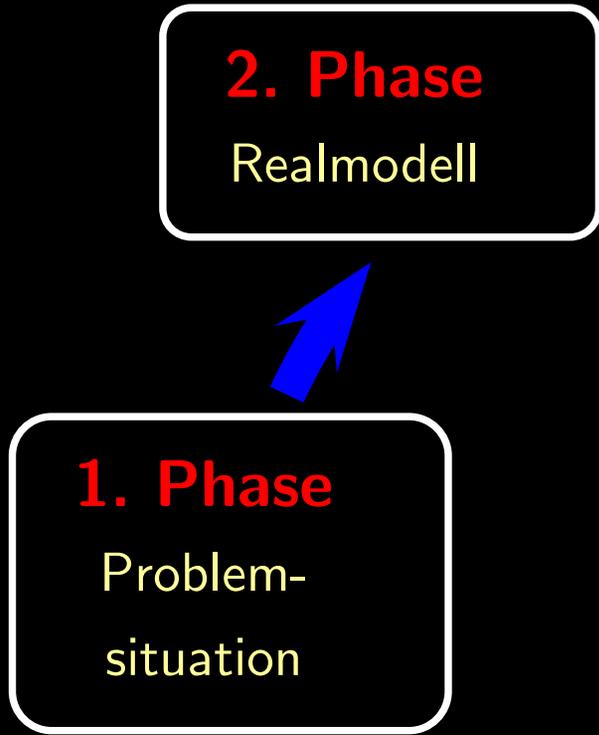
1. Phase

Problem-
situation



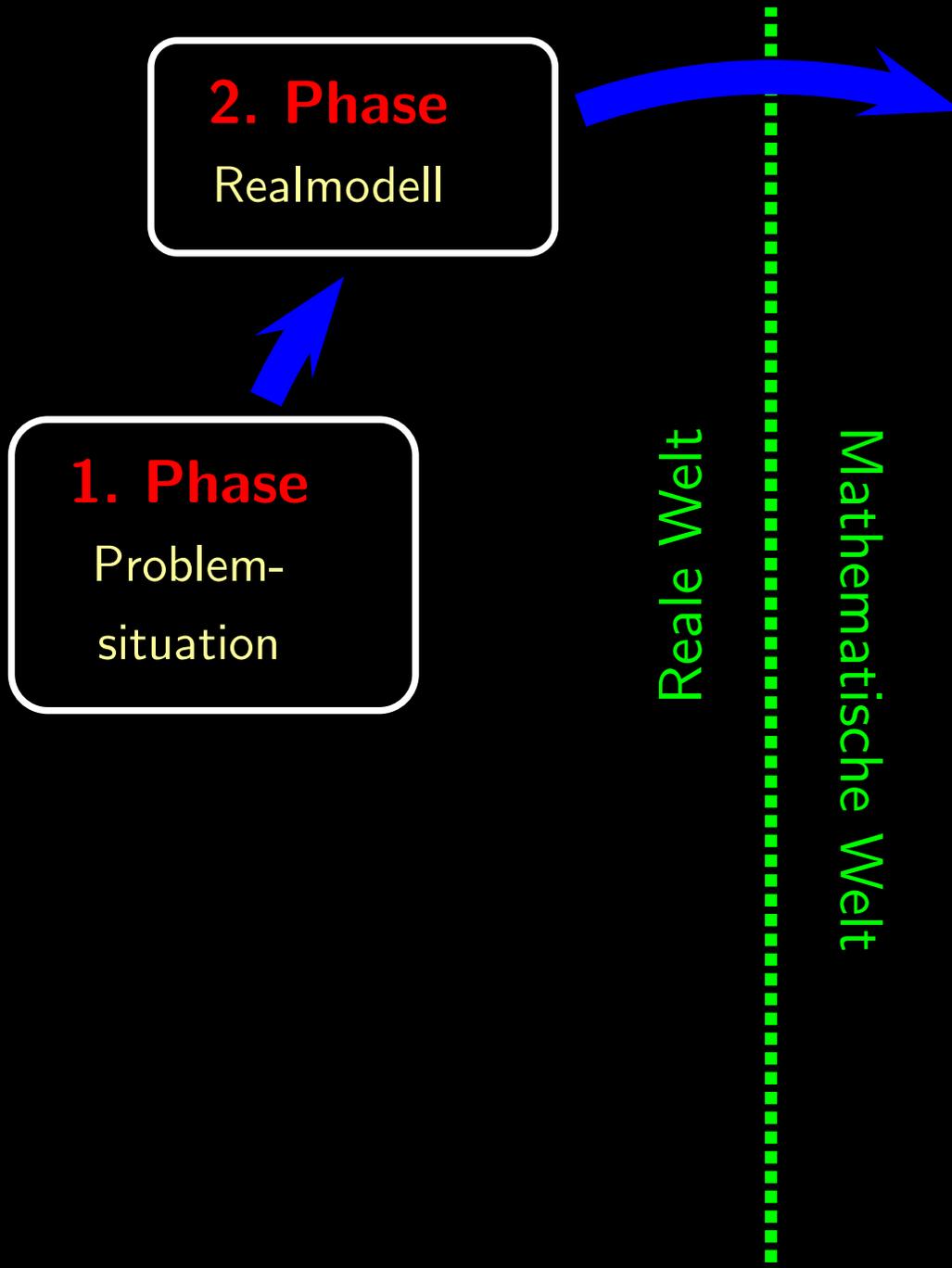
Reale Welt

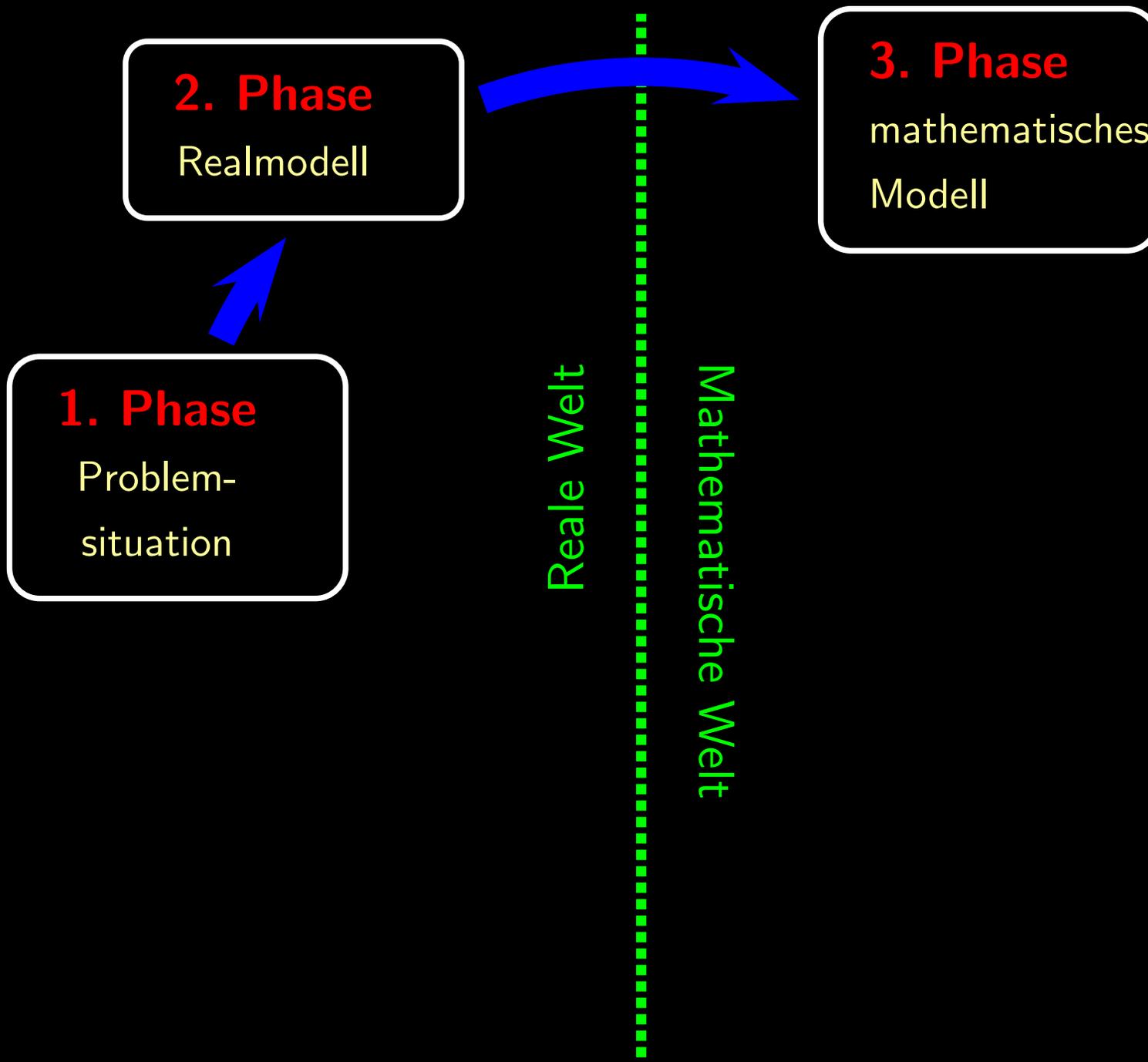
Mathematische Welt

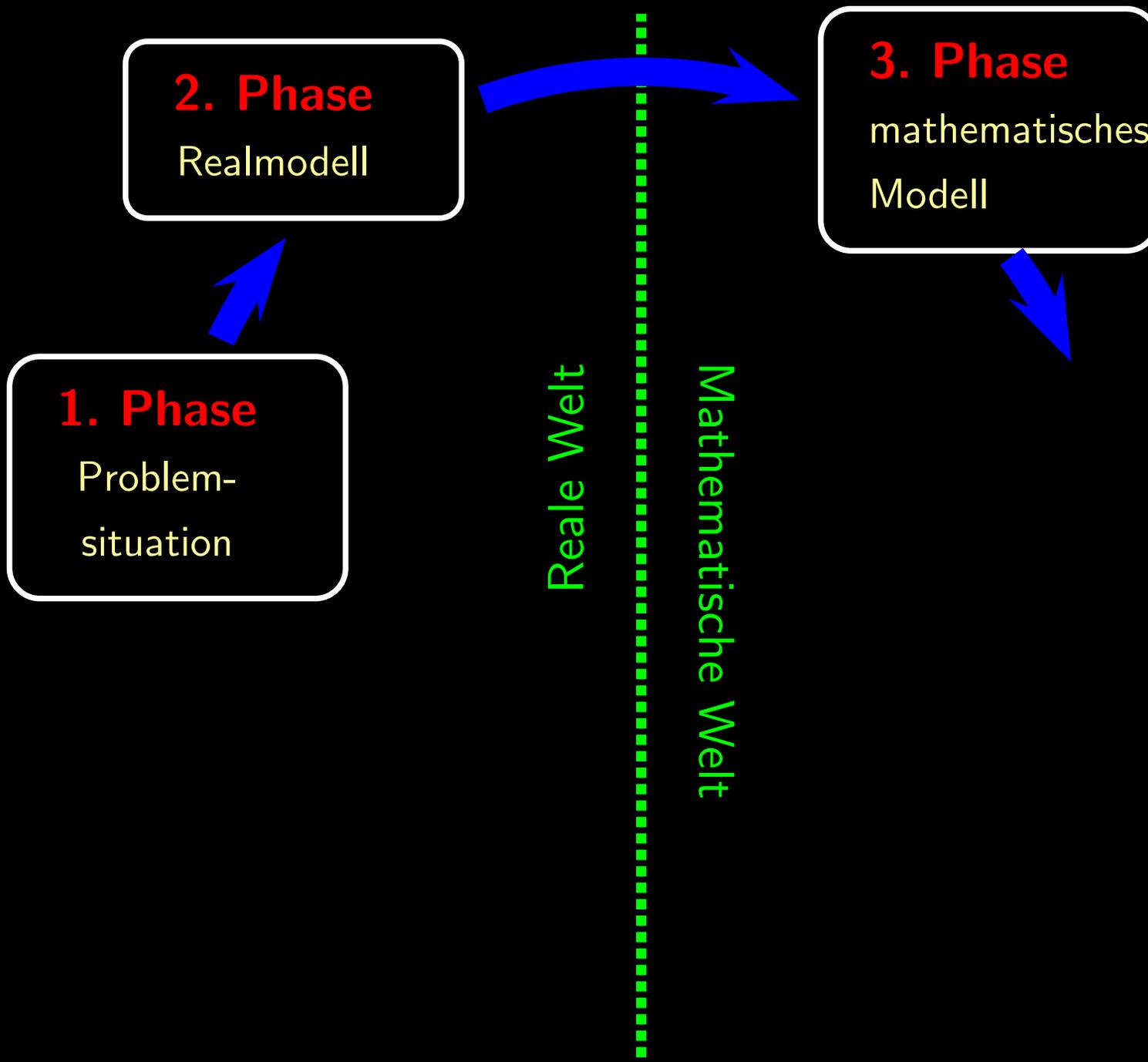


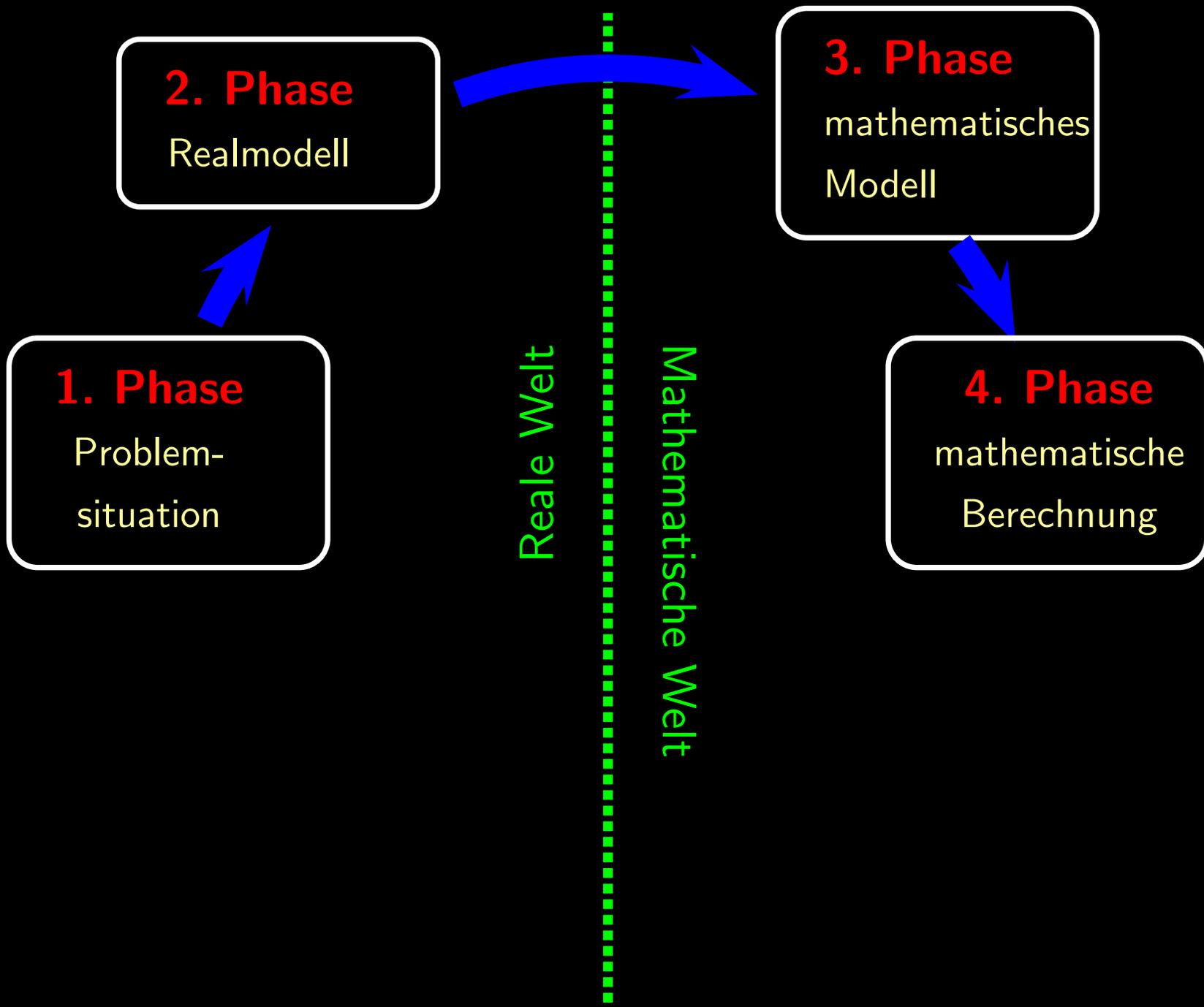
Reale Welt

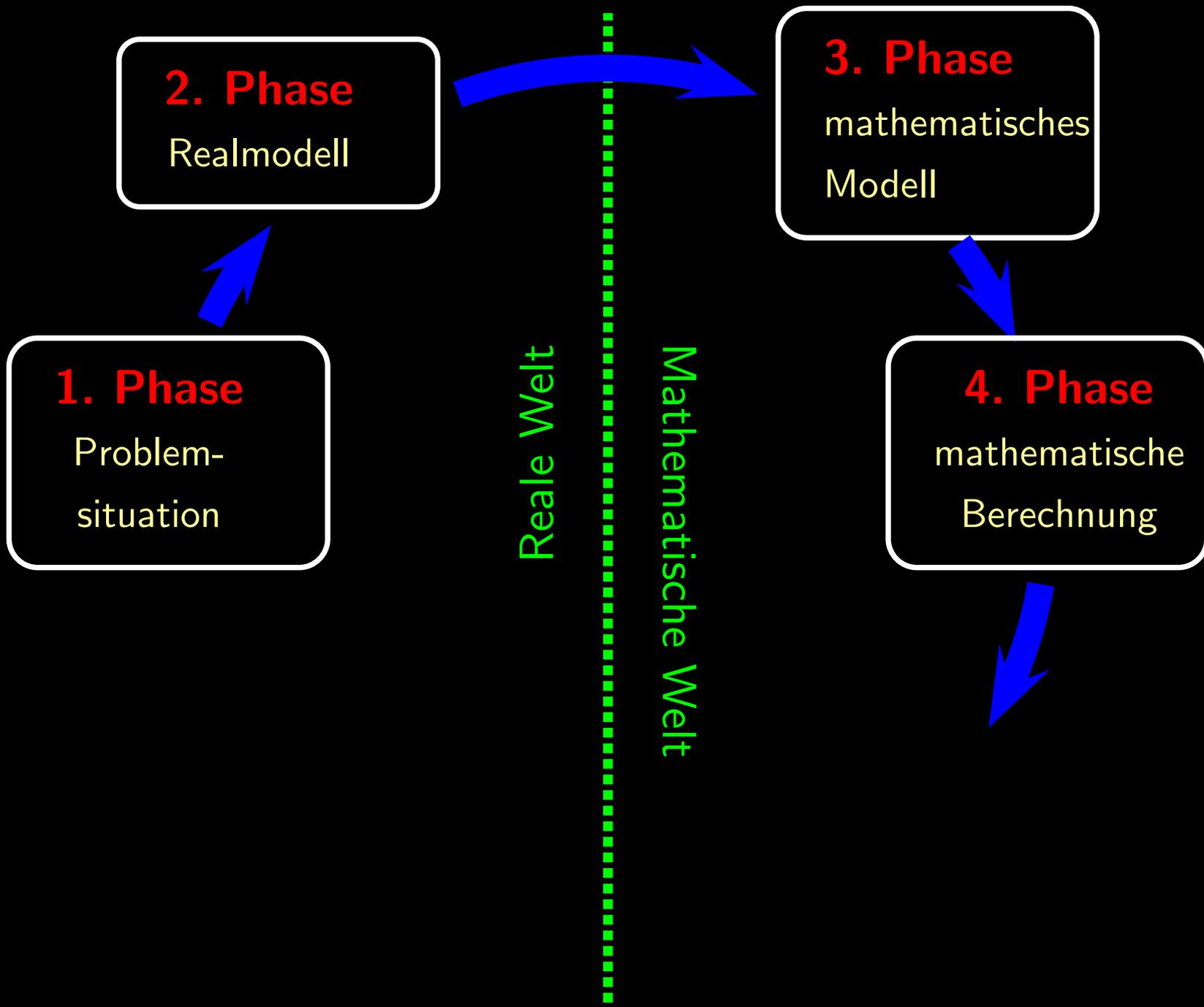
Mathematische Welt

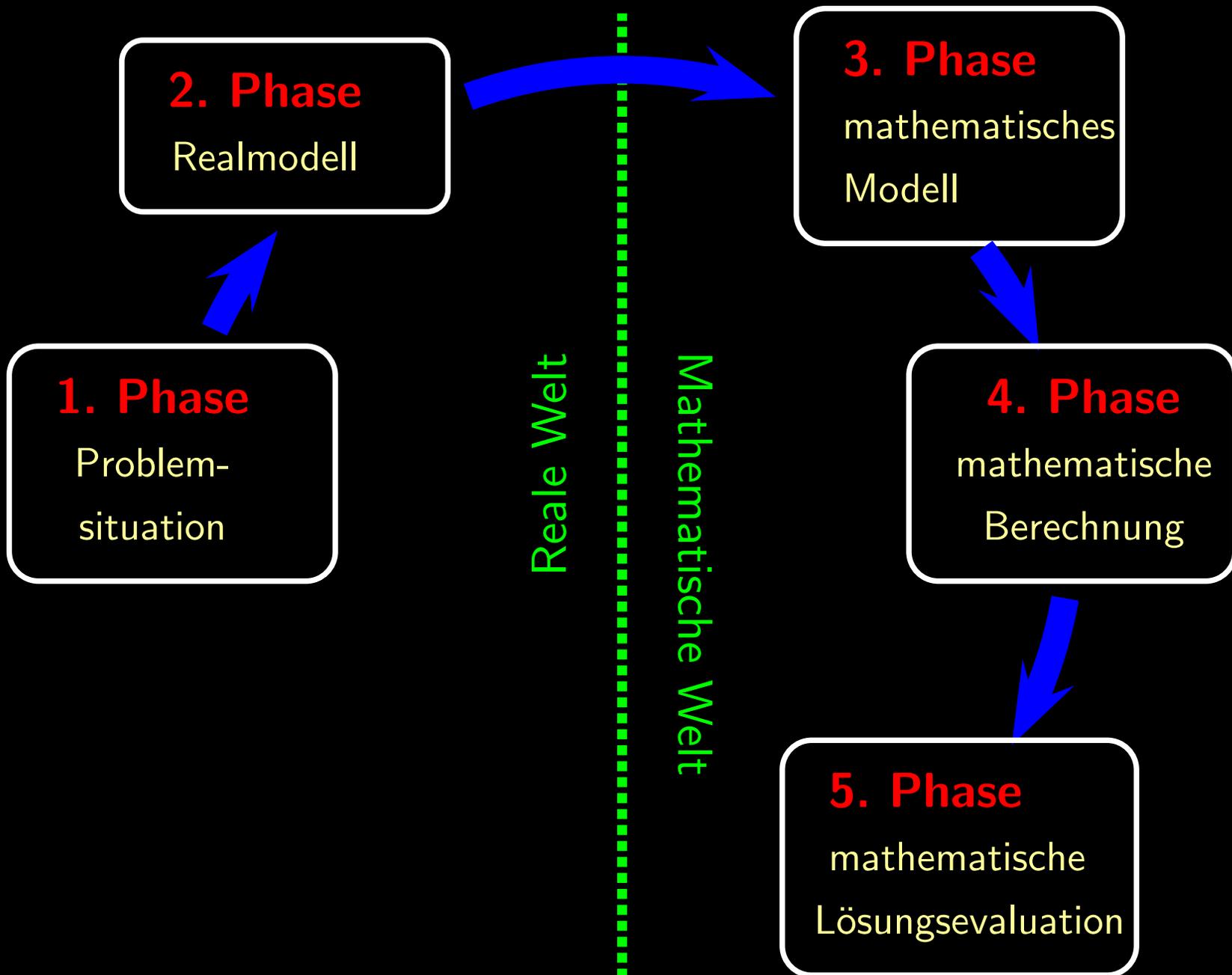


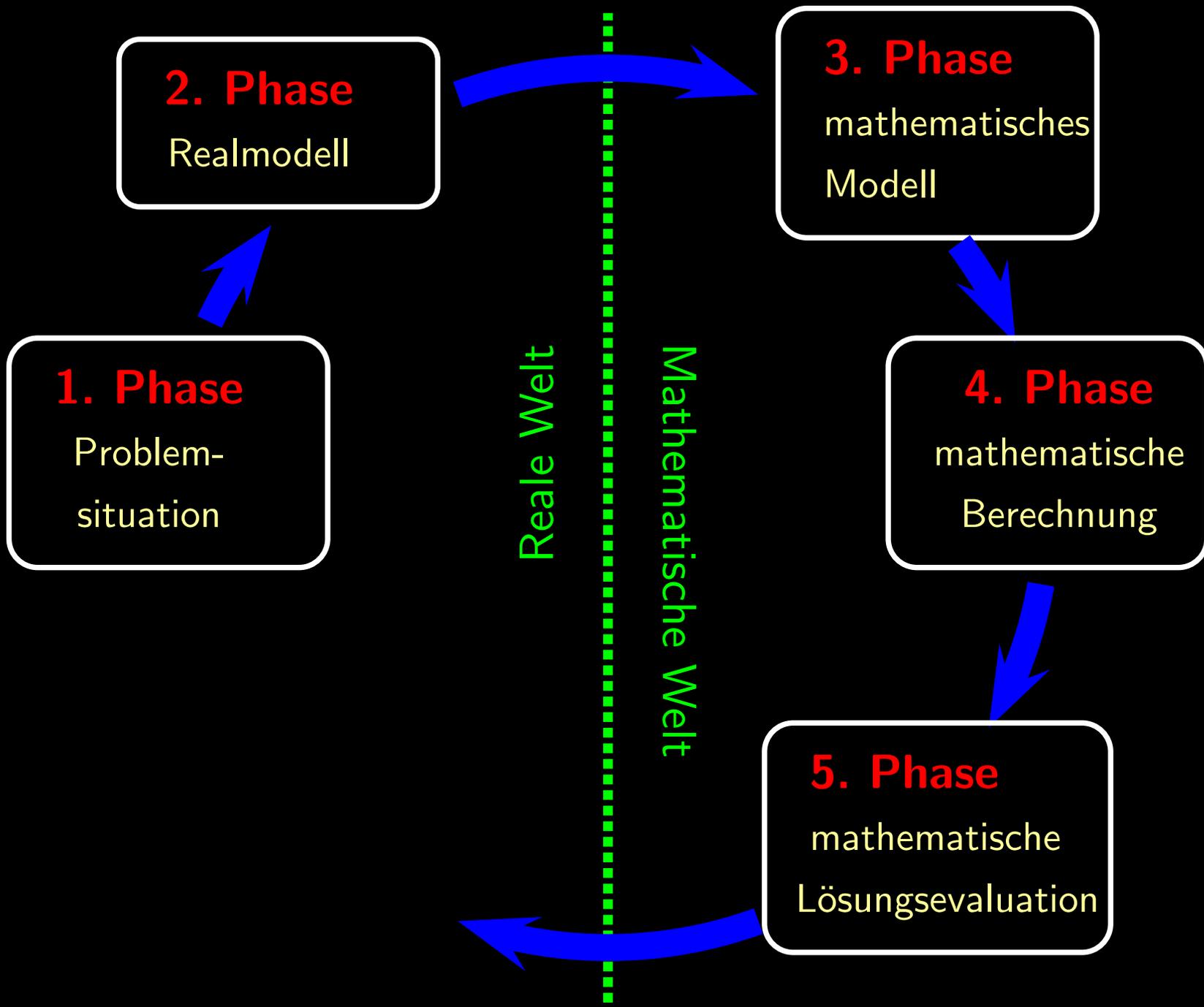


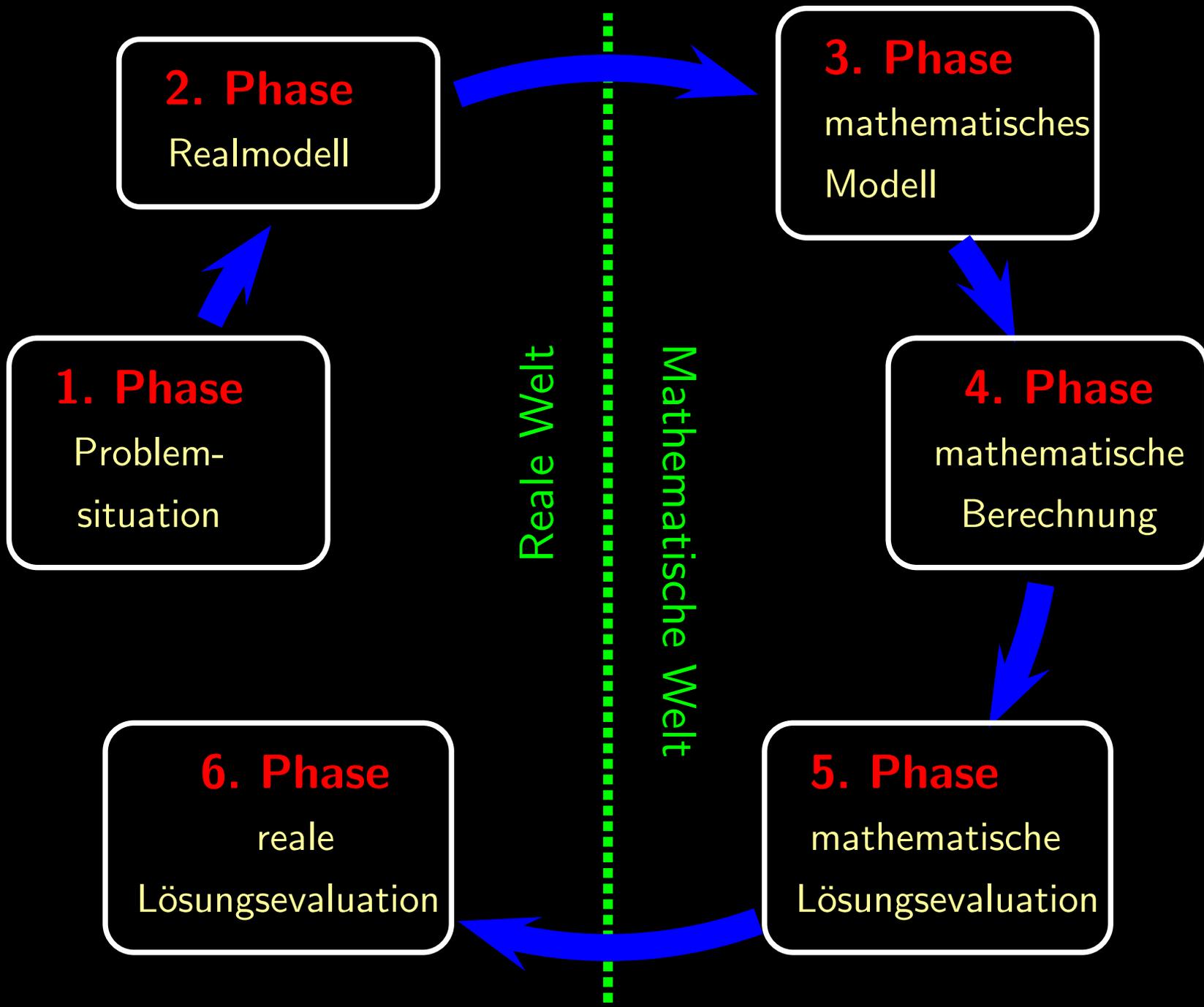


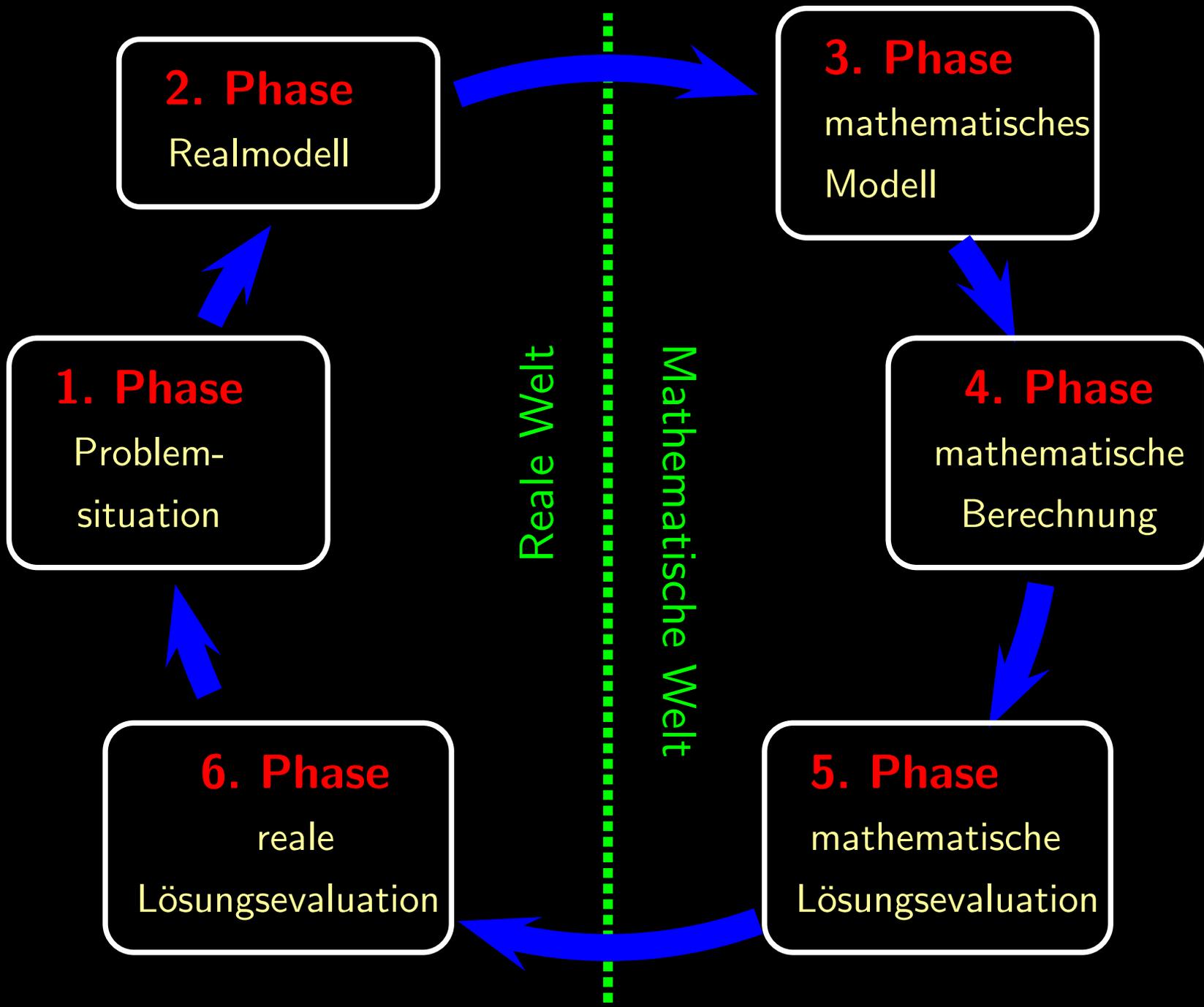












Mathematische Kompetenzen

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und Lösungswege reflektieren.

Mathematische Kompetenzen

K 1 Mathematisch argumentieren

K 2 Probleme mathematisch lösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und Lösungswege reflektieren.

K 3 Mathematisch modellieren

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,

K 3 Mathematisch modellieren

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in den jeweiligen mathematischen Modellen arbeiten,

K 3 Mathematisch modellieren

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in den jeweiligen mathematischen Modellen arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.

Radiomeldung: 3 km Stau auf der A 2

Radiomeldung: 3 km Stau auf der A 2

Wie viele Autos stecken wohl im Stau fest? Stelle eine Formel auf, mit der man die Anzahl der im Stau steckenden Autos bestimmen kann?

Radiomeldung: 3 km Stau auf der A 2

Wie viele Autos stecken wohl im Stau fest? Stelle eine Formel auf, mit der man die Anzahl der im Stau steckenden Autos bestimmen kann?

Wie könnte man die Anzahl der Fahrzeuge berechnen?

1. Festellen funktionaler Abhängigkeiten (Einflußgrößen)

Einflußgröße	Bezeichnung	Typ
Länge des PKW von vorderer Stoßstange bis zur Stoßstange des nachfolgenden Kfz	$P(m)$	Eingangsgröße
Länge des LKW von vorderer Stoßstange bis zur Stoßstange des nachfolgenden Kfz	$L(m)$	Eingangsgröße
Wochentag		Eingangsgröße
Anzahl der Kfz im Stau	A	Ausgangsgröße

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.
- Es handelt sich um einen gewöhnlichen Werktag.

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.
- Es handelt sich um einen gewöhnlichen Werktag.
- P wird mit 6 m angenommen.

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.
- Es handelt sich um einen gewöhnlichen Werktag.
- P wird mit 6 m angenommen.
- Auf der linken Fahrspur stehen nur PKW. Auf der rechten Fahrspur kommen PKW und LKW (wozu auch Busse zählen) gemischt vor. Aus eigenen Erfahrungen schätzen die Schüler, dass auf zehn PKW im Schnitt ein LKW kommt.

2. Modellannahmen (Idealisierung)

- Es wird eine zweispurige Autobahn betrachtet.
- Es handelt sich um einen gewöhnlichen Werktag.
- P wird mit 6 m angenommen.
- Auf der linken Fahrspur stehen nur PKW. Auf der rechten Fahrspur kommen PKW und LKW (wozu auch Busse zählen) gemischt vor. Aus eigenen Erfahrungen schätzen die Schüler, dass auf zehn PKW im Schnitt ein LKW kommt.
- Die Länge L wird mit 15 m angenommen.

3. Modellierung

Anzahl A (der Autos) ist

$$A = \text{Autos auf der linken Spur} + \text{Autos auf der rechten Spur.}$$

3. Modellierung

Anzahl A (der Autos) ist

$$A = \text{Autos auf der linken Spur} + \text{Autos auf der rechten Spur.}$$

4. Modell

3. Modellierung

Anzahl A (der Autos) ist

$A =$ Autos auf der linken Spur $+$ Autos auf der rechten Spur.

4. Modell

$$A = \frac{3000}{P} + \frac{3000}{\frac{10P+L}{11}}$$

5. Modellösung

$$A = \frac{3000}{6} + \frac{3000}{\frac{60+15}{11}} = 940.$$

5. Modellösung

$$A = \frac{3000}{6} + \frac{3000}{\frac{60+15}{11}} = 940.$$

6. Modellevaluation

5. Modelllösung

$$A = \frac{3000}{6} + \frac{3000}{\frac{60+15}{11}} = 940.$$

6. Modellevaluation

- Da kein Fahrzeug kürzer als 3 m und nicht länger als 30 m ist, muss A (Anzahl der Autos) zwischen 200 und 2000 liegen.
- Stau am Wochenende bedingt LKW – freie Autobahnen (Modellansatz).

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

- Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben.

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

- Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben.
- Fähigkeit einzelne Phasen zu charakterisieren.

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

- Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben.
- Fähigkeit einzelne Phasen zu charakterisieren.
- Fähigkeit einzelne Phasen zu unterscheiden bzw. während eines Modellbildungsprozesses zu lokalisieren.

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

- Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln.

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

- Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln.
- Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven.

Stufe II: Selbstständige Modellbildung

- Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln.
- Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven.
- Fähigkeit zur selbstständigen Modellbildung (Informationen aus einem Sachverhalt und Daten auswerten, Variabilisierung, Aufstellen eines Modells, Modelllösung, Bewertung der Modelllösung).

Stufe III: Reflexion über Modellbildung

Stufe III: Reflexion über Modellbildung

- Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses.

Stufe III: Reflexion über Modellbildung

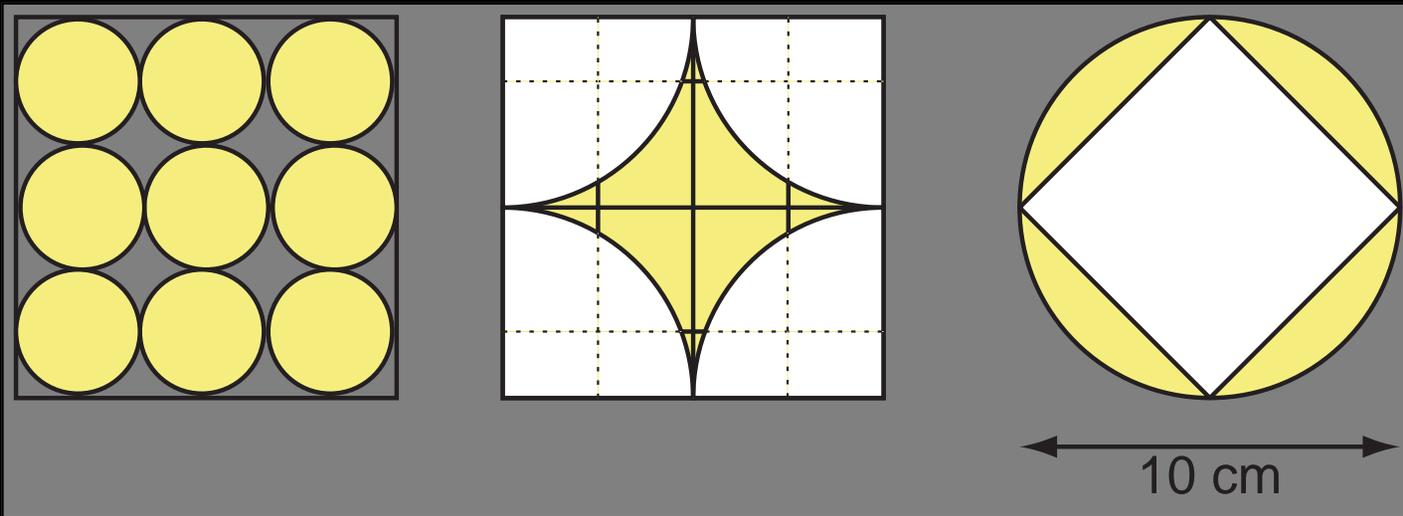
- Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses.
- Fähigkeit über den Anlass von Modellbildung zu reflektieren.

Stufe III: Reflexion über Modellbildung

- Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses.
- Fähigkeit über den Anlass von Modellbildung zu reflektieren.
- Fähigkeit Kriterien der Modellbildungsevaluation zu charakterisieren.

Flächen

Gib jeweils eine Formel zur Berechnung der weißen Flächen an. Notwendige Annahmen, Vereinfachungen und Variablen sind explizit anzugeben.



Entfernungsmessung

Mittels eines Laufrades werden Entfernungen (z. B. bei Verkehrsunfällen) gemessen.

- a) Schildere stichpunktartig die Methode der Entfernungsmessung mittels Laufrad.
- b) Wie könnte man die Qualität (Genauigkeit) der Entfernungsmessung mittels Laufrad überprüfen?
- c) Von welchen Einflussgrößen hängt die Genauigkeit der Entfernungsmessung mittels Laufrad ab?
- d) Welche der in Aufgabe c) genannten Einflussgrößen sind mathematisch leicht berechenbar und welche sind deiner Meinung nach eher schwer berechenbar?



Herzschlag

Während sportlicher Aktivitäten sollte die Herzfrequenz eines Menschen bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Diese maximale Grenze der Herzfrequenz hängt u. a. vom Lebensalter des Menschen, seiner körperlichen Fitness, dem Geschlecht und dem Ruhepuls (Herzfrequenz ohne Anstrengung) ab. Einige Beispieldaten sind in der Tabelle dargestellt.

max. Herzfrequenz	180	190	195	185
Lebensalter	40	30	18	35

Die Schüler einer 8-ten Klasse sollten in einem Mathematikprojekt eine Formel zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz aufstellen und erarbeiteten die Formel

$$f = 220 - a.$$

a) Beschreibe stichpunktartig, wie die Schüler die Formel erhalten haben könnten.

b) Welche Möglichkeiten könnten die Schüler genutzt haben, um die aufgestellte Formel zu überprüfen.

Auf der Basis weiterer Daten veränderten die Schüler die Berechnungsvorschrift und erhielten am Ende des Mathematikprojektes die Formel

$$f = 208 - (0.7a).$$

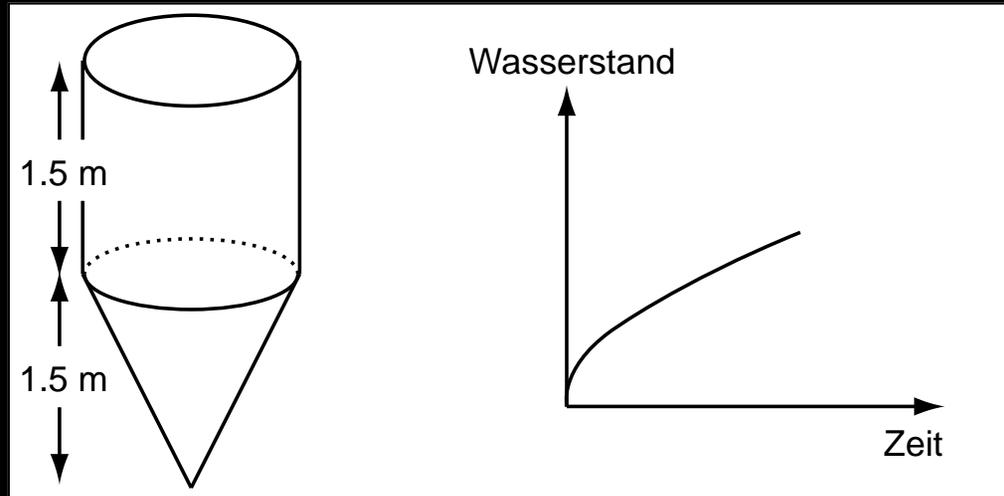
c) Wie könnten die Schüler auf die zweite Formel gekommen sein?

d) Welche weiteren Schritte könnten unternommen werden, um die Formel zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz zu verbessern.

Wassertank

In einer Mathematikstunde sollen die Schüler den Füllvorgang eines Wassertanks beschreiben. Der Wassertank ist insgesamt 1 Meter breit, zu Beginn leer und wird dann mit einer Rate von 1 Liter pro Sekunde gefüllt. Die Schüler erhalten vom Lehrer weitere Angaben zur Form und den Abmessungen des Wassertanks.

Du siehst hier das Ergebnis eines Schülers. Er hat den Wassertank skizziert und in einem Graphen dargestellt, wie sich der Wasserstand im Laufe der Zeit ändert.



- Wie könnte der Schüler den Verlauf des Graphen ermittelt haben?
- Gibt es Angaben, die der Schüler nicht verwendet hat? Wenn ja, welche?
Der Lehrer bewertet das Ergebnis als gute Idee und ermutigt den Schüler eine Formel zur Berechnung des Wasserstandes aufzustellen.
- Welche Schritte müsste der Schüler als nächstes unternehmen, um eine Formel zur Berechnung des Wasserstandes aufzustellen?

Alarmanlagen

Es werden von der Polizei jährlich Statistiken über die Anzahl der Wohnungs- und Hauseinbrüche in einer Stadt geführt. Aus dieser Statistik hat sich ein Hersteller von Alarmanlagen die folgenden Jahre herausgesucht:

Jahr	1960	1965	1970	1975	1980	1984
Zahl der Einbrüche	110	200	330	480	590	550

Der Hersteller der Alarmanlagen hat diese Daten genutzt, um folgenden Werbespruch zu begründen:

Alle 10 Jahre verdoppelt oder verdreifacht sich die Zahl der Einbrüche. Kaufen Sie jetzt eine Alarmanlage, bevor auch bei Ihnen eingebrochen wird!

- a) Ist der erste Satz des Werbeslogans korrekt? Begründe deine Antwort.
- b) Warum könnte der Hersteller gerade diese Daten ausgewählt haben?
- c) Warum könnte der Hersteller Daten gewählt haben, die mindestens 20 Jahre alt sind? Stell dir vor, deine Eltern arbeiten bei der Polizei und erzählen dir, dass solche Statistiken zukünftig vielleicht nicht mehr geführt werden.
- d) Erkläre kurz, welche Vor- oder Nachteile solche Statistiken haben könnten.

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufs

Stufe I: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufs

Ideales Körpergewicht

Das ideale Körpergewicht eines Menschen kann über verschiedene Faustregeln bestimmt werden. Die beiden bekanntesten sind im Folgenden angegeben:

Faustformeln:

$$G = K - 100 \quad (1)$$

$$G = \frac{K^2}{400} \quad (2)$$

K. . . Körpergröße in cm

G. . . Idealgewicht in kg

- a) Welche Faktoren sollte eine Faustregel zur Berechnung des idealen Körpergewichtes berücksichtigen? Inwieweit werden diese Berücksichtigungen von den Faustregeln (1) und (2) vorgenommen?
- b) Für welche Werte von K sind die Regeln (1) und (2) sinnvoll? Wie weit weicht das ideale Körpergewicht beider Regeln höchstens voneinander ab?
- c) Überprüfe die Regeln mit Hilfe der folgenden Gewichtstabelle eines Arztes:

Körpergröße in cm	160	170	180	190	200	210
Idealgewicht in kg	59	70	81	91	102	114

Für welche der beiden Regeln würdest du dich entscheiden?

Problemsituation verstehen

1. Problemsituation verstehen

Das ideale Körpergewicht hängt von der Körpergröße der Person ab, jedoch auch von deren Geschlecht, Alter und Gesundheitszustand. Die beiden Faustregeln berücksichtigen ausschließlich die Körpergröße (Teilaufgabe a).

2. Realmodell

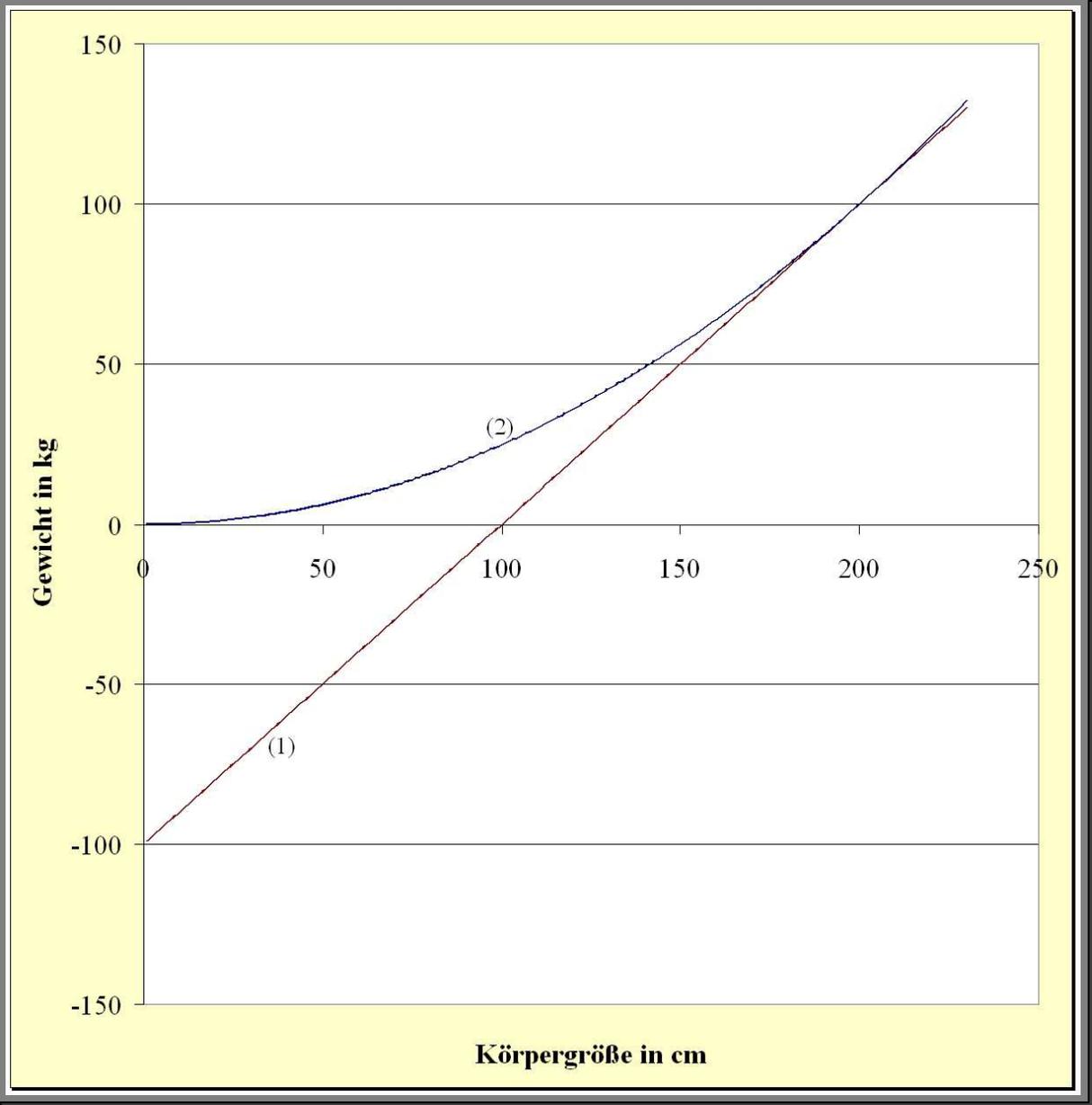
Das Realmodell entsteht durch die Entscheidung über durchzuführende Abstraktionen, wobei die Schüler thematisieren sollten, ob die Vernachlässigung von Geschlecht, Alter und Gesundheitszustand gerechtfertigt ist oder ob der reale Sachverhalt hierdurch verfälscht wird.

2. Realmodell

Das Realmodell entsteht durch die Entscheidung über durchzuführende Abstraktionen, wobei die Schüler thematisieren sollten, ob die Vernachlässigung von Geschlecht, Alter und Gesundheitszustand gerechtfertigt ist oder ob der reale Sachverhalt hierdurch verfälscht wird.

3. Mathematisches Modell

Die vorgegebene Gleichung liefert für $K < 100$ negative Werte für das Gewicht und darf somit für diese Werte nicht genutzt werden. Größere Werte von K liefern zwar ein positives Ergebnis für das Gewicht, weichen jedoch stark von den realen Erwartungen ab. Dies trifft auch auf Gleichung (2) zu und sollte zu der Entscheidung führen, dass beide Gleichungen nur für Erwachsene verwendet werden dürfen (Teilaufgabe b).



4. Mathematische Berechnungen

Aus der anzufertigenden graphischen Darstellung kann die maximale Abweichung des Idealgewichtes entnommen werden. Mit den beiden Gleichungen kann überprüft werden, dass der Abstand höchstens 25 kg bei einer Körpergröße von 100 cm beträgt. Da zuvor festgelegt wird, die Gleichungen nur für Erwachsene zu nutzen, ergibt sich für die Abweichung bei 150 cm ein Betrag von $6,25 \text{ kg}$. Stärkere Abweichungen ergeben sich erst wieder bei Körpergrößen, die über 230 cm liegen und somit ausgeschlossen werden können (Teilaufgabe b).

5. Mathematische Lösungsevaluation

Unter Berücksichtigung der Gültigkeitsbereiche beider Gleichungen ist deren Sinnhaftigkeit im Zusammenhang mit dem realen Problem nachgewiesen. Die Gewichtstabelle des Arztes liefert Ergebnisse für das ideale Körpergewicht, die für kleine Werte näherungsweise aus Gleichung (1) und für große Werte im festgelegten Gültigkeitsbereich aus beiden Gleichungen hervorgehen.

5. Mathematische Lösungsevaluation

Unter Berücksichtigung der Gültigkeitsbereiche beider Gleichungen ist deren Sinnhaftigkeit im Zusammenhang mit dem realen Problem nachgewiesen. Die Gewichtstabelle des Arztes liefert Ergebnisse für das ideale Körpergewicht, die für kleine Werte näherungsweise aus Gleichung (1) und für große Werte im festgelegten Gültigkeitsbereich aus beiden Gleichungen hervorgehen.

6. Reale Lösungsevaluation

Der Vergleich mit der Gewichtstabelle des Arztes, dass Faustregel (1) für kleinere Körpergrößen besser geeignet ist, wobei für große Personen ($K \geq 180$) beide Regeln geeignet sind und für Personen mit $K \geq 210$ liefert die Faustregel (2) genauere Ergebnisse (Teilaufgabe c).

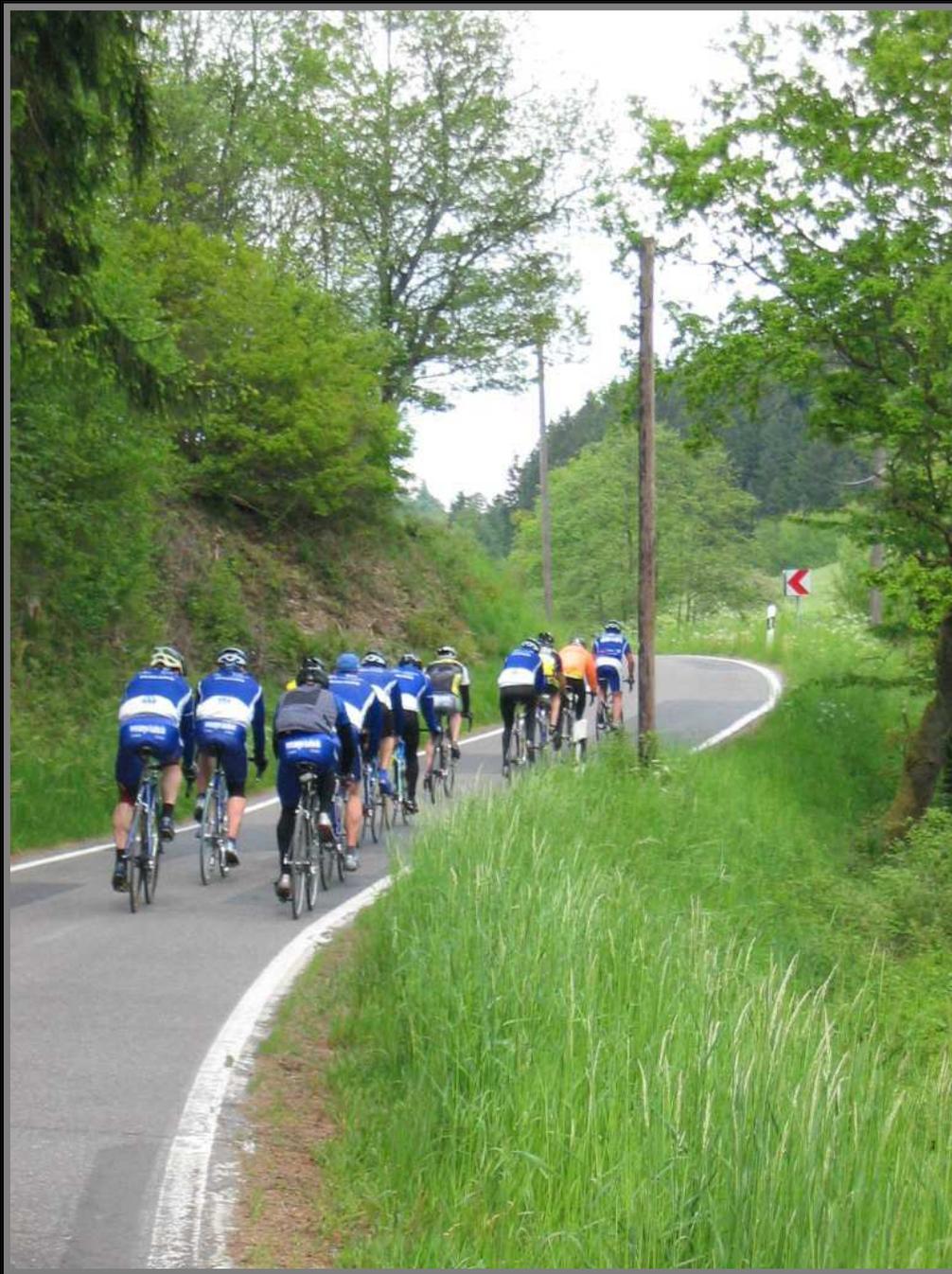
Stufe II: Selbstständige Modellbildung

Radrennen

Bei einem Radrennen erhalten die Fahrer für das Erreichen von Zwischenstationen Zeitgutschriften, deren Höhe sich nach der Platzierung richtet:

Platzierung	1	2	3
Zeitgutschrift in s	180	165	140

- Erkennst du ein System in der Vergabe der Zeitgutschriften? Stelle eine Formel zur Berechnung der Gutschriften aus der Platzierung auf!
- Wie groß sind die Zeitgutschriften für die weiteren Platzierungen? Welchen Sinn macht dieses Vergabesystem?



1. Problemsituation verstehen

Die Zeitgutschriften sind in Wirklichkeit Abzüge vom jeweiligen Zeitstand im Gesamtklassement des Fahrers, da im Radsport eine geringere Zeit stets besser ist als eine höhere, da man eine festgelegte Strecke schneller zurückgelegt hat.

1. Problemsituation verstehen

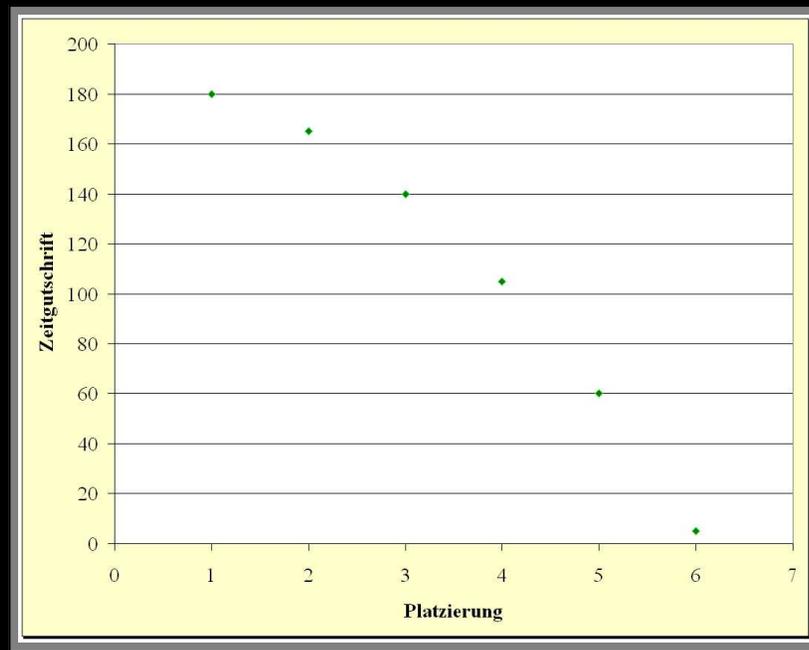
Die Zeitgutschriften sind in Wirklichkeit Abzüge vom jeweiligen Zeitstand im Gesamtklassement des Fahrers, da im Radsport eine geringere Zeit stets besser ist als eine höhere, da man eine festgelegte Strecke schneller zurückgelegt hat.

2. Realmodell

Je höher die Platzierung, umso geringer fällt die Zeitgutschrift aus. Der Abstand zwischen den Gutschriften beträgt zunächst 15 s und danach 25 s. Die Schüler können vermuten, dass sich die Abstände um jeweils 10 s erhöhen.

3. Mathematisches Modell

Wenn die Vermutungen graphisch dargestellt werden, ist der parabolische Verlauf zu erkennen. Da der Graph symmetrisch zur y-Achse ist, verschwindet der Parameter b in der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$.



4. Mathematische Berechnungen

Nun können die bekannten Punkte in $f(x) = ax^2 + c$ eingesetzt werden:

$$180 = a + c$$

$$165 = 2^2 \cdot a + c$$

$$140 = 3^2 \cdot a + c$$

Man erhält $a = -5$, $c = 185$ und somit die Funktion $f(x) = -5x^2 + 185$, mit der die vermuteten Werte bestätigt werden können.

Platzierung	1	2	3	4	5	6
Zeitgutschrift in s	180	165	140	105	60	5

5. Mathematische Lösungsevaluation

Durch Einsetzen der Wertepaare können sowohl die Vermutung als auch die Funktionsgleichung in ihrer Richtigkeit nachgewiesen werden.

5. Mathematische Lösungsevaluation

Durch Einsetzen der Wertepaare können sowohl die Vermutung als auch die Funktionsgleichung in ihrer Richtigkeit nachgewiesen werden.

6. Reale Lösungsevaluation

Die Punkte im Koordinatensystem dürfen nicht verbunden werden, da Platzierungen stets ganzzahliger Natur sind. Somit handelt es sich nicht um eine Parabel, sondern um 6 Punkte einer Parabel.

Stufe III: Modellbildung und Reflexion über Modellbildung

Stufe III: Modellbildung und Reflexion über Modellbildung

Radar – ein lebenswichtiges Gerät

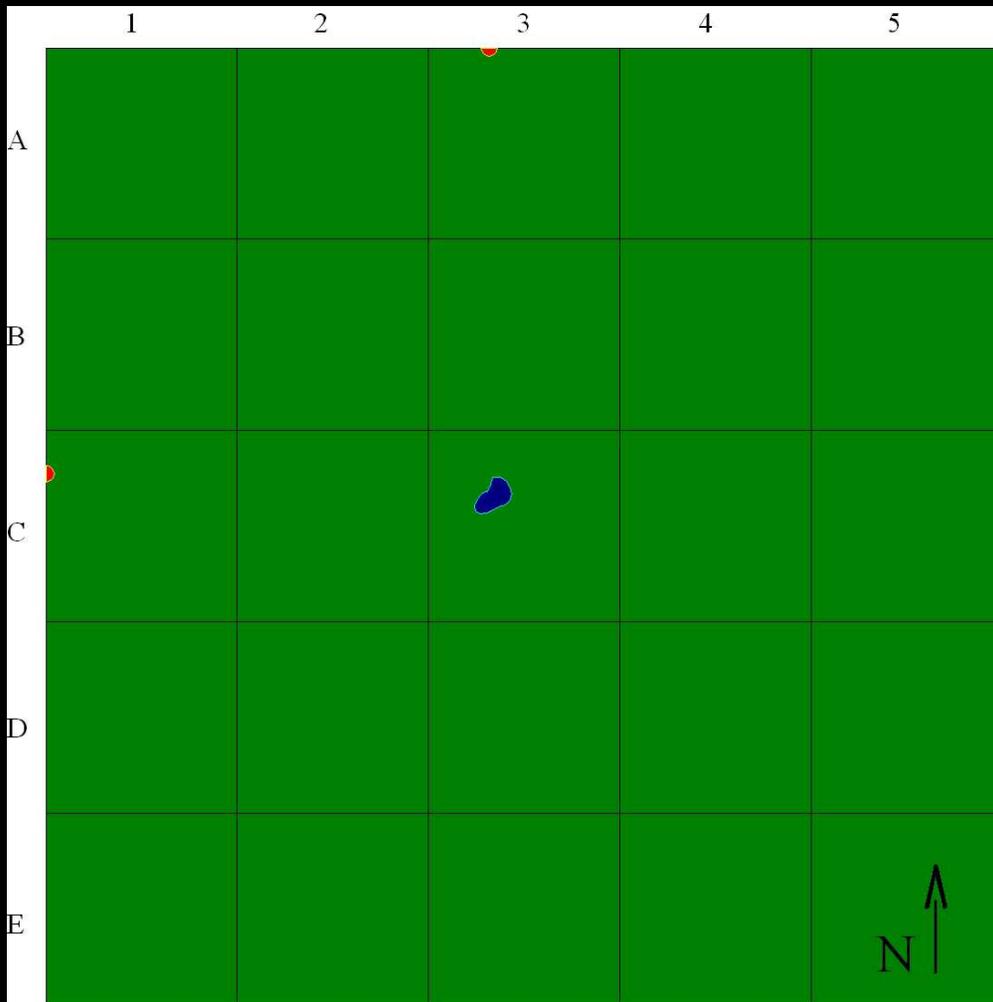
„Radar“ ist ein Kurzwort für die englische Bezeichnung „radio detecting and ranging“ und bedeutet, dass ein Objekt durch Funkwellen aufgefunden und die Entfernung bestimmt wird.

Ein Düsenjet (Typ A) tritt in A3 in das vom Radarschirm erfasste Gebiet ein, umfliegt auf schnellstem Wege einen in C3 befindlichen Felsen und tritt in C1 wieder aus dem Radarfeld aus.

Drei weitere Jets (Typ B) treten aus NO-Richtung in das Radarfeld ein und fliegen geradlinig in Richtung SW. Die drei Jets fliegen nebeneinander

im gleichen Abstand von jeweils 500 m . Die Radar-Software berechnet automatisch, wie viele mögliche Kollisionspunkte mit dem Typ A – Jet existieren. Hierfür gibt die Software für jeden der drei Typ B – Jets eine andere Anzahl dieser möglichen Kollisionspunkte aus.

Wo befinden sich diese möglichen Kollisionspunkte?



1. Problemsituation verstehen

Es kann nur dann zu Kollisionen kommen, falls die Jets auf der gleichen Höhe fliegen. Deshalb werden die berechneten Punkte als „mögliche“ Kollisionspunkte bezeichnet.

1. Problemsituation verstehen

Es kann nur dann zu Kollisionen kommen, falls die Jets auf der gleichen Höhe fliegen. Deshalb werden die berechneten Punkte als „mögliche“ Kollisionspunkte bezeichnet.

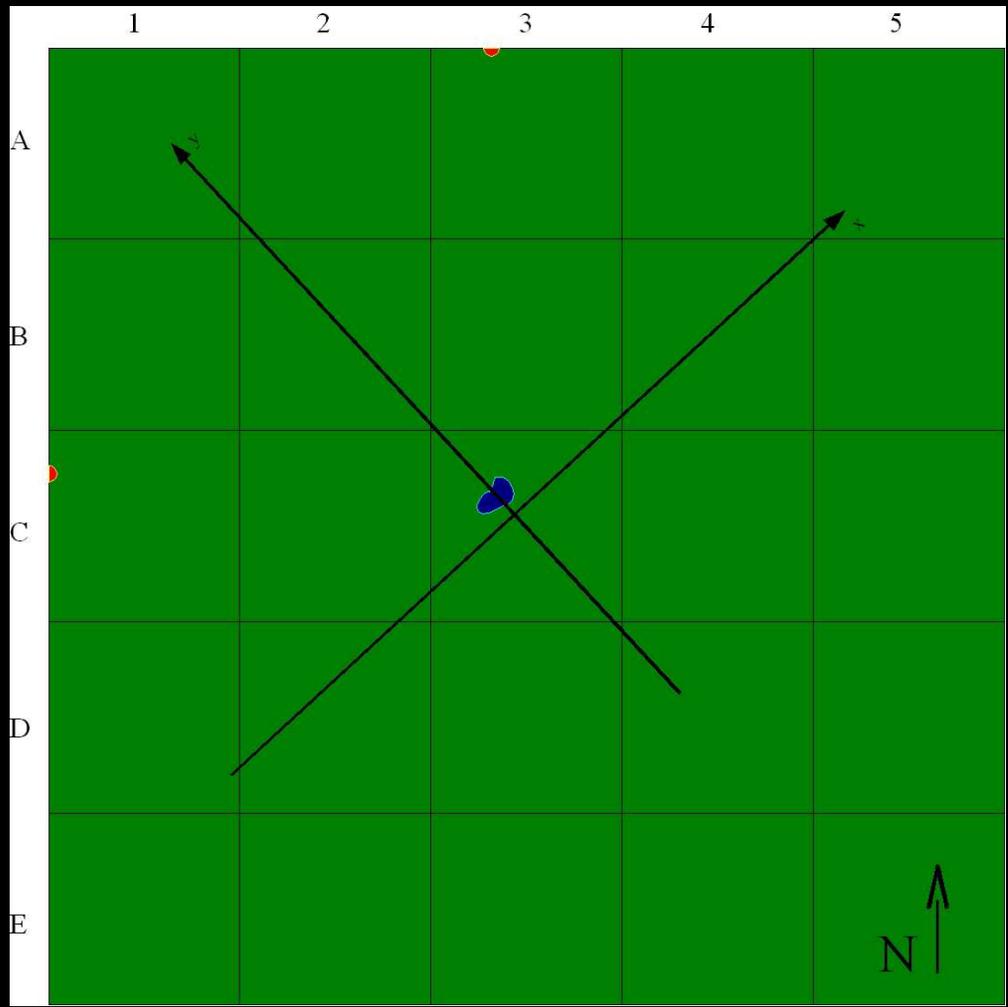
2. Realmodell

Da Gerade und Parabel höchstens zwei Schnittpunkte haben können, müssen die drei Typ B -Jets mit der Route des Typ A - Jets keinen, einen und zwei mögliche Kollisionspunkte besitzen.

3. Mathematisches Modell

Es bietet sich an, den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt der Flugkurve des Typ A - Jets zu legen.

Aus geeigneten Punkten des Radars können nun die Funktionsgleichungen der Flugbahnen aufgestellt werden.



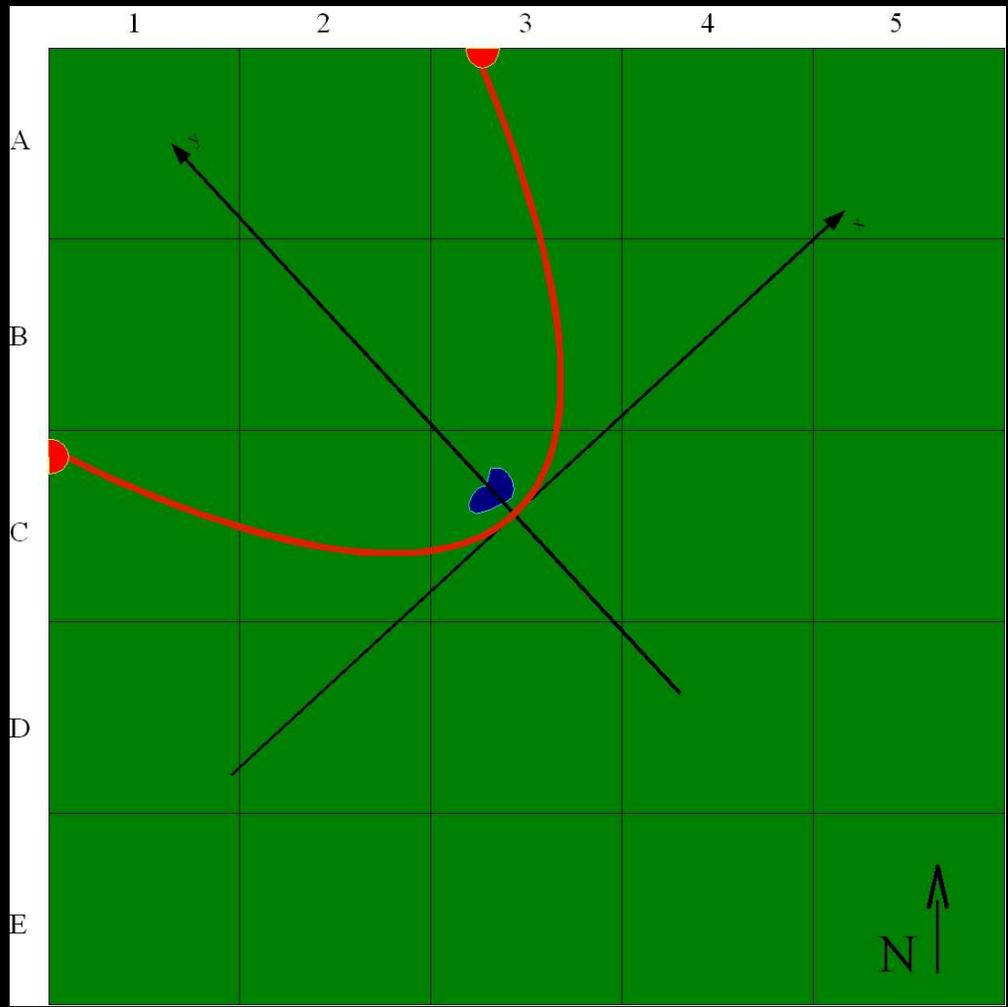
Typ A:

Es ergibt sich $f(x) = ax^2$ mit dem aus dem Koordinatensystem abgelesenen Eintrittspunkt $P(1580 \mid 1840)$. Analog hätte der Austrittspunkt aus dem Radarfeld gewählt werden können.

$$1840 = a \cdot 1580^2$$

$$a = 0,0007$$

$$f(x) = 0,0007 \cdot x^2$$

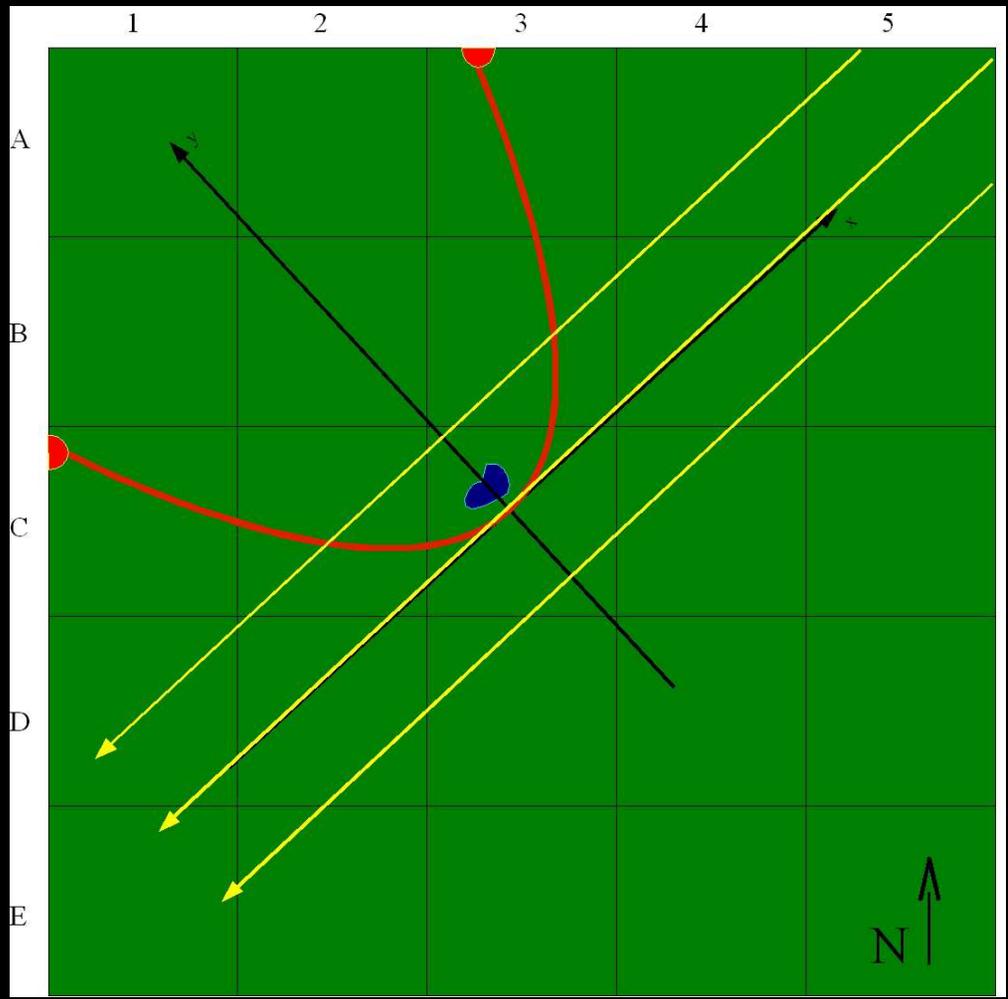


Typ B:

$$g_1(x) = 500$$

$$g_2(x) = 0$$

$$g_3(x) = -500$$



4. Mathematische Berechnungen

Mögliche Kollision 1:

$$f(x) = g_1(x)$$

$$0,0007 \cdot x^2 = 500$$

$$x_{1/2} = \pm 845$$

$$\Rightarrow P_1(845 \mid 500) \quad P_2(-845 \mid 500)$$

Mögliche Kollision 2:

$$f(x) = g_2(x)$$

$$0,0007 \cdot x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$\Rightarrow P_3(0 \mid 0)$$

Mögliche Kollision 2:

$$\begin{aligned}f(x) &= g_2(x) \\0,0007 \cdot x^2 &= 0 \\x &= 0 \\ \Rightarrow & P_3(0 \mid 0)\end{aligned}$$

Mögliche Kollision 3:

$$\begin{aligned}f(x) &= g_3(x) \\0,0007 \cdot x^2 &= -500 \\x \notin \mathbb{R} &\Rightarrow \text{kein Kollisionspunkt}\end{aligned}$$

5. Mathematische Lösungsevaluation

Die Schnitte zwischen der quadratischen und den linearen Funktionen liefern erwartungsgemäß zwei (P_1 und P_2), eine (P_3) und keine Lösung.

5. Mathematische Lösungsevaluation

Die Schnitte zwischen der quadratischen und den linearen Funktionen liefern erwartungsgemäß zwei (P_1 und P_2), eine (P_3) und keine Lösung.

6. Reale Lösungsevaluation

Die Flugbahn vom Typ A - Jet kann als Parabel angenommen werden, da der Jet nicht den kürzesten Weg (geradlinig), sondern den schnellsten Weg fliegt. Um nicht am Felsen abbremsen zu müssen, ist eine möglichst gleichmäßig verlaufende Kurve zu wählen, was durch die Parabel approximativ erreicht wird.

Literaturverzeichnis

Weitere Informationen unter

<http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning/>

Erschienenene Technical-Reports. Teilweiser Download als pdf-file.

- Herbert Henning, Christian Hartfeldt, Mike Keune: *Niveaustufenorientierte Herausbildung von Modellbildungskompetenzen im Mathematikunterricht* , TR 1-2004
- Herbert Henning, Christian Hartfeldt, Mike Keune, Thomas Kubitza, Steffen Hammermeister: *Anwendungen - Modelle - Lösungen* , TR 2-2004

