Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

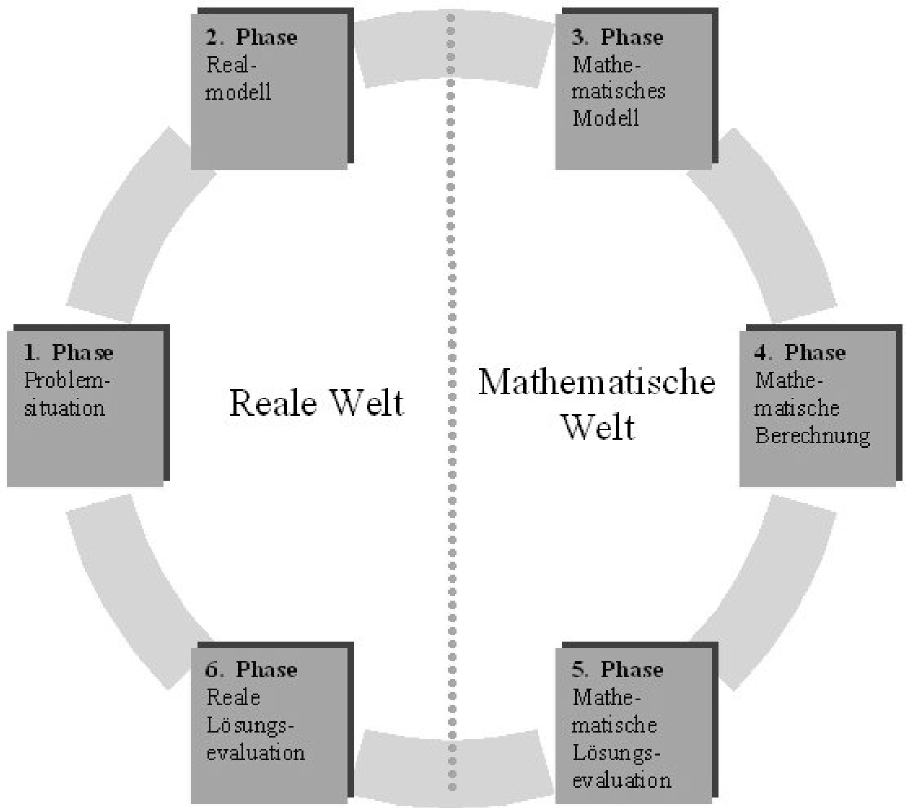
Ziel und Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, den Schülern eine Grundbildung zu vermitteln. Die Schüler sollen allgemeine Kompetenzen erwerben, die die mathematische Grundbildung charakterisieren. Mathematische Grundbildung im Sinne der OECD bedeutet die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen, die Mathematik in der Welt spiel, fundiert mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagierten und reflektierenden Bürger entspricht.

Der Modellbildung ordnet Lamon (1997) die Funktion eines Verbindungsgliedes des mathematischen Inhalts, realer Kontexte, mathematischer Kultur und mathematischen Denkens zu. Im Sinne dieses Bindegliedes zwischen (schul-)mathematischen Inhalten, Realität, mathematischer Kultur und mathematischen Denkens ordnet sich Modellbildung in den Rahmen eines allgemeinbildenden Unterrichts ein. Allgemeinbildender Unterricht und somit auch „Unterricht in Modellbildung“ verfolgt nach Heymann (1996) als Ziel eine Qualifikation zu entwickeln, die es den Schülern ermöglicht:

- sich auf ihr derzeitiges und zukünftiges Leben vorzubereiten,
- den Charakter der Mathematik als universelles Instrument der Gesellschaft und Kultur zu erkennen,
- sich begründet und kritisch mit der Umwelt auseinanderzusetzen und eine Positionierung zu finden,
- mathematisch zu denken (Vernetzung verschiedener Bereiche, Verfahren und Ideen)
- sich der Eigenverantwortung und der Verantwortung Anderen gegenüber bewusst zu sein, entsprechend zu handeln und sich zu einer kooperations- und verständigungsfähigen Persönlichkeit zu entwickeln.

1.1 Der Modellbildungkreislauf

In der didaktisch-methodischen Literatur werden zahlreiche Variationen des Modellbildungskreislaufs vorgeschlagen, die stets das zu untersuchende Realproblem, das mathematische Modell und die Resultate als Bestandteile enthalten. Auf der Basis des Modellbildungskreislaufs nach Blum wurde dieser Kreislauf entwickelt. Zur Ermöglichung einer stärkeren Differenzierbarkeit wurden im Vergleich zum Kreislauf nach Blum zusätzliche Phasen ergänzt. Das Aufstellen eines Realmodells und die Betrachtung der mathematischen Berechnungen sollen innerhalb des Kreislaufs gesondert berücksichtigt werden. Wie in der Abbildung dargestellt, wird außerdem zwischen der Lösungsevaluation aus mathematischer und realer Sichtweise unterschieden.



1. Phase: Problemsituation verstehen

Am Beginn des Modellbildungskreislaufs steht unabhängig von der konkreten Aufgabenstellung das zu lösende Realproblem. Die Beschreibung der realen Situation muss von den Schülern zunächst verstanden werden, um eine Verarbeitung der gegebenen Informationen vorzubereiten. Dazu sollte diese erste Phase eine Durchdringung der Problemsituation ermöglichen, indem der Sachverhalt beschrieben und erklärt wird. Es muss dabei erkannt werden, welche Größen gegeben und gesucht sind, um eine Zielorientierung festzusetzen. Diese Orientierung wird dann über den gesamten Modellbildungskreislauf hinweg beibehalten und sollte an geeigneten Stellen des Lösungsprozesses aufgegriffen werden. Ein erfolgreiches Bearbeiten des Kreislaufes ist nur dann möglich, wenn sich die Schüler über das Ziel ihrer Bestrebungen permanent bewusst sind. In diesem Zusammenhang können die Schüler eigene Fragestellungen bezüglich des Problems einbringen und bereits abwägen, welche Gegebenheiten vernachlässigt werden könnten. Dabei werden wichtige von unwichtigen Informationen getrennt und die Fragestellung präzisiert.

2. Phase: Realmodell

Der Prozess der Abstraktion ist die entscheidende Voraussetzung zum Absolvieren der zweiten Phase des Modellbildungskreislaufs. Hierbei soll ein Realmodell aufgestellt werden, welches die Problemsituation möglichst genau beschreibt und lediglich irrelevante Sachverhalte vernachlässigt. Sobald ein Modell einen zur Berechnung des Ergebnisses relevanten Sachverhalt nicht berücksichtigt, muss es verworfen werden. Hier ist zu erkennen, welche Bedeutung die mathematische Kompetenz des Abstrahierens einnimmt, da diese Fähigkeit die Grundvoraussetzung zur Konstruktion eines Modells darstellt. In Abhängigkeit von Klassen- und Niveaustufe kann die Intensität der Abstraktion variiert werden. Der Schwierigkeitsgrad der Modellbildungsaufgaben erhöht sich bei einem verringerten Abstraktionsgrad, da eine größere Anzahl von Einflüssen berücksichtigt werden muss.

3. Phase: Mathematisches Modell

Um den Sachverhalt nun mittels eines mathematischen Modells beschreiben zu können, muss ein treffender Ansatz gefunden werden. Das zuvor entstandene Realmodell wird in der dritten Phase des Modellbildungskreislaufs mit Hilfe der Einführung von Variablen in ein mathematisches Modell übertragen. Dieser Schritt erweist sich für Schüler häufig als der schwierigste, da hier Formeln oder Gleichungen aufgestellt werden müssen.

4. Phase: Mathematische Berechnungen

Im weiteren Verlauf des Lösungsprozesses sind mathematische Kenntnisse notwendig, die in der vierten Phase in Form von Berechnungen zur Anwendung kommen. Dabei müssen die Schüler die erlernten Verfahren einsetzen und über formale Rechenfähigkeiten verfügen, deren Vermittlung im Mathematikunterricht nach wie vor unverzichtbar ist. Der Unterricht darf sich jedoch nicht auf diese „Werkzeuge“ beschränken, ohne sie tatsächlich zu nutzen. Die Folge wäre, dass die Schüler mit den Rechenverfahren umgehen könnten, aber ihren Sinn nicht verständen. Die schwierige, aber entscheidende Frage im Modellbildungsprozess ist also die nach einer mathematischen Beschreibung des Problems, welche dann mit den bekannten Verfahren bearbeitet werden kann. Während des Lösungsprozesses können bereits Rückschlüsse auf das zu lösende reale Problem getroffen werden. Die Bedeutung der

Zwischenergebnisse zu erkennen, kann für den weiteren Lösungsverlauf von großer Relevanz sein und sich besonders dann als vorteilhaft erweisen, wenn diese Interpretation zu einer Neuerkenntnis der Problemstellung führt.

5. Phase: Mathematische Lösungsevaluation

Schließlich wird das erhaltene Ergebnis in der fünften Phase zunächst in mathematischer Hinsicht interpretiert und validiert. Dabei soll zu Beginn überprüft werden, ob das Ergebnis in seiner Größenordnung mit den Erwartungen übereinstimmt. Vermittels einer Probe kann die Richtigkeit der durchgeführten Berechnungen bestätigt werden, falls die dafür notwendigen Rechenverfahren zur Verfügung stehen. Ferner kann die mathematische Sinnhaftigkeit untersucht werden, indem in Abhängigkeit der Aufgabenstellung die Bedeutung von Vorzeichen geklärt oder das Ergebnis mit Hilfe einer graphischen Darstellung mit dem untersuchten Sachverhalt in Bezug gesetzt wird.

6. Phase: Reale Lösungsevaluation

Auf Schlussfolgerungen für die reale Welt soll in der letzten Phase des Modellbildungskreislaufs eingegangen werden. Hier genügt kein formaler Antwortsatz, da die Bedeutung des Ergebnisses für das reale Problem herausgearbeitet werden muss. Dabei sollte ebenso erörtert werden, wie sich eine Berücksichtigung der vernachlässigten Größen auf das Ergebnis auswirken würde. Dadurch erkennen die Schüler den Zusammenhang zwischen den durchgeführten Abstraktionen und der Genauigkeit des Ergebnisses. Es bleibt also zu untersuchen, ob das genutzte Modell ein Ergebnis geliefert hat, das den Genauigkeitsanforderungen genügt oder ob neues Modell aufgestellt und ein weiterer Modellbildungsprozess durchlaufen werden muss.

1.2 Modellbildungswerkzeuge

Reale Probleme und Phänomene zeichnen sich häufig dadurch aus, eine Vielzahl von Einflussgrößen zu besitzen. Ein Bungee-Sprung z.B. scheint in erster Näherung nur von der Masse des Springers, der Elastizität des Seiles und der Absprunghöhe abzuhängen. Genauer betrachtet kommen Einflussfaktoren wie Körperhaltung, Bewegungen des Springers oder Absprungverhalten hinzu. Der Versuch einer möglichst genauen Abbildung der Realität führt dann dazu, dass das gewählte Modell schnell zu kompliziert wird. Die Verwendung von Werkzeugen ermöglicht die Betrachtung auch komplizierter Beschreibungen, da z.B. die Ordnung eines Gleichungssystems oder „krumme“ Koeffizienten praktisch keine Rolle spielen. Auch die graphische Darstellung benötigt praktisch keine Zeit. Hinzu kommt der Aspekt der relativen Fehlerfreiheit (zumindest was die technische Ausführung betrifft).

Unterstützend wirken Werkzeuge auch im Sinne des Probierens und Simulierens von Einflussfaktoren. Kritisch muss bemerkt werden, dass es dabei häufig dazu kommt, dass eine „sinnlose“ Genauigkeit erreicht werden möchte oder „blind“ ohne Systematik probiert wird. Dabei werden notwendige Intervalle oder Grenzen missachtet. Grobe Abschätzungen und die ständige bewusste Kontrolle der Arbeitsschritte und Ergebnisse sind erforderlich.

Hauptsächlich erfolgt der Einsatz von Werkzeugen in der Phase der Lösung/Untersuchung des Modells. Aber auch schon bei der Formulierung des Modells und bei der Interpretation bzw. Validierung können Werkzeuge zum Einsatz kommen.

1.3 Realitäts- und Alltagsbezug von Problemen

Was sind gute Modellbildungaufgaben? Charakteristisch für eine gute Aufgabe sind offene Probleme, die im Schritt des Mathematisierens mehr ais ein Modell denkbar erscheinen lassen. Probleme, die in der Formulierung bereits das zu verwendende Modell implizieren bzw. den Prozess des Mathematisierens vorwegnehmen, berauben die Aufgabe einer wichtigen Größe. Gerade die Erkenntnis, dass es nicht genau ein richtiges Modell geben muss, ist für Schüler von besonderem Wert. Die verbreitete Sichtweise von Mathematik in einem Schwarz/Weiß–Bild mit nur richtigen oder falschen Ergebnissen entspricht nicht der Realität von Anwendung der Mathematik im Sinne von Modellbildung.

Vielmehr die Einsicht, dass ein aufgestelltes Modell für den Benutzer sinnvoll und nützlich ist, wobei ein anderes Modell für einen anderen Benutzer derselben Problematik ebenso nützlich und sinnvoll sein kann, ist ein wichtiges Element mathematischer Kompetenz. Es gibt kein richtiges oder falsches Modell, es gibt nur nützlich oder weniger nützlich. Insbesondere kommt dieser Aspekt bei so genannten offenen Aufgabenstellungen zu tragen. Didaktisch wertvoll erscheinen Aufgaben, die auch ein kein „nachprüfbares“ im Sinne eines direkten, messbaren Realitätsvergleichs ermöglichen. Ist den Schülern von vornherein, dass es keine richtige Lösung im Sinne von „exakt mit der Realität übereinstimmend“ gibt, werden sie die Güte des Modells anhand anderer Kriterien bestimmen müssen. Eine Entwicklung eines angemessenen Kriterienkatalogs zur Evaluation des Modellbildungsprozesses gehört zu den erwünschten Fähigkeiten im Modellieren.

2 Modellbildungskompetenzen und Problemlösen

2.1 „Der Weg ist das Ziel“- Modellieren als Denkschulung

Der Erwerb mathematischer Grundbildung wird zunehmend charakterisiert durch die Entwicklung von Modellierungsfähigkeiten und somit in der Modellbildungskompetenz bei Schülern im Prozess des Erfassens von Sachsituationen und der Lösung von Anwendungsproblemen (vgl. Baumert/Knoche 2001) Modellbildungskompetenzen sind dabei diejenigen Fähigkeiten, Fertigkeiten und Einstellungen, die für den Modellierungsgsprozess von Bedeutung sind. (Maaß 2004) Modellbildungskompetenzen beinhalten das Strukturieren, Mathematisieren und Interpretieren von Problemen und deren Lösung sowie die Fähigkeit, mit mathematischen Modellen zu arbeiten, das Modell zu validieren (vgl. Marxer 2005), das Modell und seine Ergebnisse kritisch zu analysieren und zu beurteilen, über das Modell zu kommunizieren und den Prozess der Modellbildung zu beobachten und selbst regulierend zu steuern. Mathematische Modellbildung („Modellierungstätigkeiten“) dominiert die Phasen eines Problemlöseprozesses. Ausgehend von einem Sachverhalt (Problem) und dessen Analyse wird ein mathematisches Modell aufgestellt. Das aufgestellte mathematische Modell und dessen Lösung werde interpretiert und mit dem Ziel untersucht, das Problem zu lösen. Zu diesem Problemlöseprozess gehört auch die Validierung des Modells.

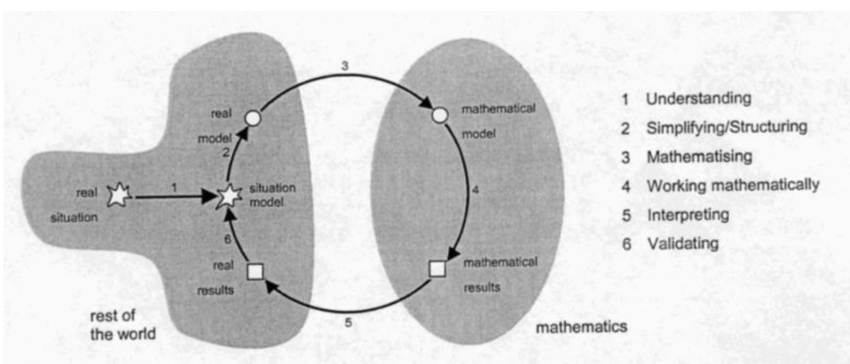


Abb.: Modellbildungsprozess nach Blum u. Leiß

Als Modellbildungskompetenz wird eine Gruppe von Kompetenzen (in gradueller Ausprägung) beschrieben, die sich dem Konzept der mathematischen Kompetenz unterordnet. Fähigkeiten und Fertigkeiten in der Modellbildung können in einem Niveaustufenmodell strukturiert werden, das durch die folgenden Stufen charakterisiert werden kann (Keune 2004).

Niveaustufe 1: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes
Niveaustufe 2: Selbstständige Modellbildung
Niveaustufe 3: Reflexion über Modellbildung

Die einzelnen Niveaustufen können durch Modellierungsfähigkeiten beschrieben werden, deren Ausprägung entscheidend die Modellbildungskompetenz des „Problemlösers" bestimmt.

Niveaustufe 1: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

- Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben
- Fähigkeit einzelne Phasen zu charakterisieren
- die Fähigkeit einzelne Phasen zu unterscheiden bzw. während eines Modellbildungsprozesses zu lokalisieren

Niveaustufe 2: Selbstständige Modellbildung

- Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln
- die Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven
- Fähigkeit zur selbstständigen Modellbildung (Informationen aus einem Sachverhalt und Daten auswerten, Variabilisierung, Aufstellen eines Modells, Modelllösung, Bewertung der Modelllösung)

Niveaustufe 3: Reflexion über Modellbildung

- Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses
- Fähigkeit über den Anlass von Modellbildung zu reflektieren
- Fähigkeit Kriterien der Modellbildungsevaluation zu charakterisieren

2.2 Problemlösen als „Step by Step“ - Modellbildung

Modellieren umfasst einen Komplex eng miteinander verflochtener Modellierungsfähigkeiten, deren bewusste Anwendung zur Lösung von Problemen über einen längeren Zeitraum entwickelt werden müssen. In einem Unterrichtsversuch (Klasse 8, Gymnasium) haben wir in den Themenbereichen „Lineare Funktionen“ und „Prismen und Kreis“ (Rahmenrichtlinien Gymnasien Mathematik 2005) in insgesamt 40 Stunden versucht, Modellierungsfähigkeiten beim Lösen von Problemen aus Sachsituationen auf verschiedenen Niveaustufen herauszubilden. Dabei haben wir Modellierungsaufgaben „konstruiert“, deren Komplexität und Anforderungsniveau Fähigkeiten in den Niveaustufen 1 bis 3 entsprechen.

(1) Analyse der Ausgangssituation zum Problemlösen zu Beginn „Lineare Funktionen“

Es wurden u.a. folgende Aufgaben eingesetzt, bei denen die Schüler ihre Meinung aufschreiben sollten. Die Aufgabe HERZSCHLAG wurde konstruiert, um primär Fähigkeiten der Niveaustufe 1 zu rekonstruieren d.h., die Schüler erkennen und beschreiben Phasen der Modellbildung.

HERZSCHLAG
Während sportlicher Aktivitäten sollte die Herzfrequenz eines Menschen bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Diese maximale Grenze der Herzfrequenz hängt unter anderem vom Lebensalter des Menschen, seiner körperlichen Fitness, dem Geschlecht und dem Ruhepuls (Herzfrequenz ohne Anstrengung) ab. Einige Beispieldaten sind in der Tabelle dargestellt.

max. Herzfrequenz	180	190	195	185
Lebensalter	40	30	18	35

Die Schüler einer 8-ten Klasse sollten in einem Mathematikprojekt eine Formel zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz aufstellen und erarbeiteten die Formel:

$$f = 220 - a$$

a) Beschreibe stichpunktartig, wie die Schüler die Formel erhalten haben könnten.
b) Welche Möglichkeiten könnten die Schüler genutzt haben, um die aufgestellte Formel zu überprüfen.
Auf der Basis weiterer Daten veränderten die Schüler die Berechnungsvorschrift und erhielten am Ende des Mathematikprojektes die Formel:

$$f = 208 - (0{,}7 \cdot a)$$

c) Wie könnten die Schüler auf die zweite Formel gekommen sein?
d) Welche weiteren Schritte könnten unternommen werden, um die Formel zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz zu verbessern.

In der Aufgabe HERZSCHLAG sind mögliche zu berücksichtigende Faktoren zur Berechnung der maximalen. Herzfrequenz benannt und es wird die Möglichkeit weiterer Einflüsse offen gelassen. Die gegeben Werte sind ohne Einheiten dargestellt und implizieren die Größen Frequenz in Schlägen je Minute und Lebensalter in Jahren. Keiner der untersuchten Schüler hat die Vernachlässigung der Einheiten und insbesondere weiterer Faktoren erwähnt. Fast alle Schüler haben die Ermittlung der Formel, entweder als Summierung des Alters und der maximalen Herzfrequenz oder als Subtraktion von einer angenommenen maximalen Herzfrequenz von 220 und des Lebensalters beschrieben, etwa die Hälfte der Schüler hat die Variablenzuordnung erwähnt. Es sind Größenteils zwei Typen von Antworten erkennbar. Ein Teil der Schüler stellt einen Bezug der Formel zur Realität her, indem z.B. die eigene max. Herzfrequenz berechnet und diese z.B. bei sportlicher Betätigung gemessen wird. Der andere Teil der Schüler begründet die Formel innermathematisch, z.B. durch Einsetzen aller Werte in die Formel. Wenige Schüler haben eine Überprüfung der Formel an der Realität als Anlass beschrieben, diese zu verbessern. „sie könnten gemerkt haben, dass das nicht ganz funktioniert (mit der 1. Formel) z.B. hat dann ein 5-jähriger eine Herzfrequenz von 215, das ist unlogisch“ (Konrad) oder „208 könnte die genauere Angabe des Durchschnitts der maximalen Herzfrequenz sein“ (Robina). Einige Schüler haben rechnerisch motivierte Begründungen angeführt, die Formel zu verändern, um die „Fehler“ zu den Tabellenwerten rechnerisch zu beheben. Die letzte Teilaufgabe hat ein Großteil der Schüler nicht bearbeitet. Einige Schüler haben erwähnt, dass weitere Faktoren berücksichtigt werden müssen oder sahen eine rechnerisch motivierte Änderungsmöglichkeit, haben aber keine weiteren Überlegungen dazu angeführt. Beispielhaft für eine stark innermathematisch angelegte Aufgabenbearbeitung ohne großen Bezug zu Realität ist die Lösung von Michael.

a) sie haben vielleicht f + a gerechnet, meistens 220
b) haben mit anderen Formeln mit ähnlichem Prinzip probiert
c) durch Umstellen der Gleichungen
d) die Gleichungen umstellen

Ein höheres Fähigkeitsniveau bei der Bearbeitung der Aufgabe HERZSCHLAG lässt die Lösung von Franziska vermuten. Diese Schülerin hat ebenfalls die nahe liegende rechnerisch motivierte Aufstellung der ersten Formel beschrieben, geht aber in den weiteren Teilaufgaben weg vom mathematischen Modell, indem sie mögliche ärztliche Untersuchungen vermutet bzw. die Berücksichtigung der Fitness im Realmodell vorschlägt und somit das mathematische Modell in Bezug zur Realität setzt.

a) die Schüler könnten auf die Formel gekommen sein, indem sie die Daten der maximalen Herzfrequenz + das Lebensalter rechnen $(180 + 40 = 220)$ und das ergibt in allen Fällen den Wert 220
b) sie könnten Daten aus ärztlichen Untersuchungen genutzt haben
c) durch genauere Werte

d) man könnte die Fitness der Personen in die Formel mit einbeziehen

Anhand einer weiteren Aufgabe HOCHAUSBAU wird eine mögliche Herangehensweise an die Auswertung und Bewertung solcher kompetenzorientierter Aufgaben vorgestellt. Möglich erscheint die Auswertung im Sinne eines Partial-Kredit-Scoring Systems werden je Teilaufgabe die Schülerlösung anhand eines Erwartungshorizontes eingeschätzt und die untersuchte Fähigkeitsausprägung auf einer Skala einordnet.

HOCHHAUSBAU

Es soll auf einer freien Fläche in der Innenstadt ein neues Hochhaus errichtet werden. Das Hochhaus darf eine maximale Höhe von 45 Metern nicht überschreiten.
Als Mitglied einer Schülergruppe, die an einem Designwettbewerb zur Gestaltung des Hochhauses teilnimmt, bist du für die Berechnung der Geschosshöhen verantwortlich. Deine Gruppe möchte im Erdgeschoss und in den darüber liegenden Etagen Wohnungen einrichten.
a) Ermittle die mögliche Anzahl der Wohnetagen unter den gegebenen Voraussetzungen.
Deine Gruppe entscheidet sich jetzt im Erdgeschoss eine hohe Eingangshalle und Geschäftsräume zu planen. In den darüber liegenden Etagen sollen Wohnungen entstehen.

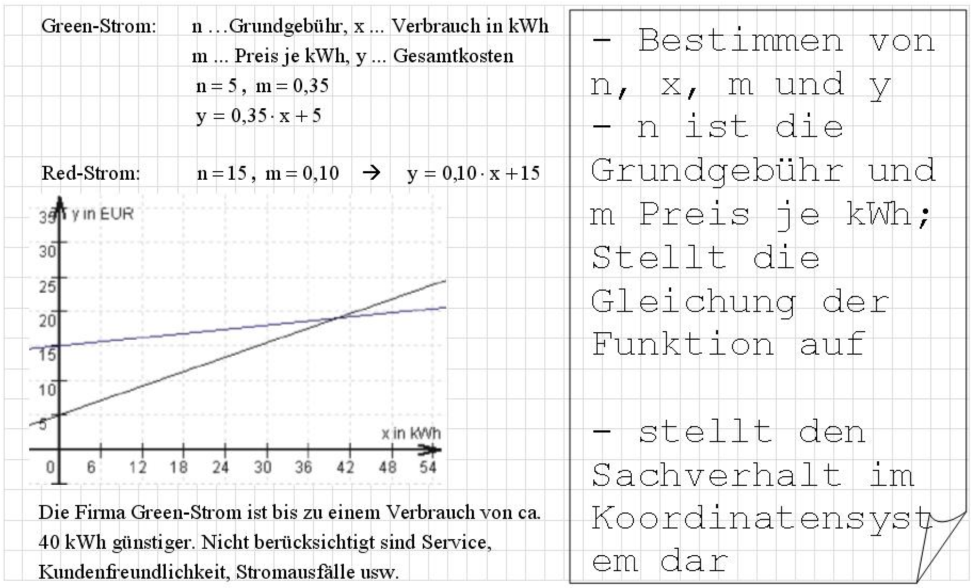
b) Ermittle die mögliche Anzahl von Wohnetagen, wenn im Erdgeschoss nur Geschäftsräume und die Eingangshalle gebaut werden sollen.
Bei einem Treffen der Schülergruppe möchtest du deine Ergebnisse mit einer Skizze vorstellen.
c) Bereite eine Skizze mit Angaben zu den Geschosshöhen vor.

(2) Lineare Funktionen als „Modellbildungswerkzeuge“

Die im Folgenden dargestellt Aufgabe STROMTARIFE wurde mit dem Ziel konzipiert Fähigkeiten der Schüler zu rekonstruieren, welche sich in die Niveaustufen 1 und auch 3 einordnen lassen. Primär sind Fähigkeiten des Erkennens und Beschreibens von Modellbildungstätigkeiten gefordert (Niveaustufe I), wenn die Schüler bei der Aufgabenbearbeitung einzelne Schritte und mögliche Annahmen, Vereinfachungen, Schlussfolgerungen, etc. in der „fiktiven Schülerlösung“ erkennen sollen.

STROMTARIFE
Schüler einer 8ten Klasse sollen die Tarifbedingungen zweier Stromanbieter (Green-Strom und Red-Strom) vergleichen und den günstigsten Anbieter ermitteln. Die Firma Green-Strom berechnet eine Grundgebühr von monatlich 5,- EUR und pro Kilowattstunde (kWh) 35Ct. Bei der Firma Red-Strom kostet die Kilowattstunde 10 Ct. und die Grundgebühr beträgt 15,00 EUR. Die siehst hier die Lösung der Aufgabe durch einen Schüler.
Erkläre stichpunktartig, welche Schritte der Schüler bei der Lösung gegangen ist. Schreibe deine Stichpunkte direkt auf das Aufgabenblatt an die entsprechende Stelle.

Die Schüler erhielten auf dem Arbeitsblatt folgende „fiktive“ Schülerlösung (auf der linken Seite des Arbeitsblattes). Im Folgenden ist eine Schülerlösung (auf der rechten Seite dargestellt) der Aufgabe STROMTARIFE wiedergegeben.



Der Großteil der Schüler bearbeitete die Aufgabe ähnlich der obigen Lösung der Schülerin Linda. Die Schüler beschreiben die Variablenzuordnung, das Aufstellen der Gleichungen sowie die grafische Darstellung der Funktionen sowie das Ablesen des Schnittpunktes als Lösung der Aufgabe. Auf die Antwort des „fiktiven“ Schülers bezüglich Service, Kundenfreundlichkeit und Stromausfälle geht keiner der Schüler ein, d.h., eine Reflexion der Modellbildung ist nicht erkennbar. Die Aufgabe RASENMÄHEN wurde mit dem Ziel konzipiert Fähigkeiten der Schüler zu rekonstruieren, welche sich primär in der Niveaustufe 2 verorten lassen. Die Bearbeitung der Aufgabe erfordert Fähigkeiten aus allen Phasen des Modellbildungsprozesses.

RASENMÄHEN
Stell dir vor, deine Familie diskutiert über die Gestaltung eures Gartens. Deine Mutti möchte den ganzen Garten mit Rasen ausgestalten und bittet dich, eine Übersicht zu erstellen, wie viel Rasen in Abhängigkeit von der Zeit gemäht werden kann. Da eure Gartenfläche rechteckig ist, und der Rasenmäher genau eine Schnittbreite von 0,5 m besitzt, schätze du noch, wie viel Fläche in m^2 je Minute man schaffen kann.

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, die die Abhängigkeit der gemähten Fläche von der Zeit darstellt.

b) Stelle die Funktion grafisch in einem Koordinatensystem dar.

Du möchtest am nächsten Tag deine Ergebnisse im „Familienrat“ vorstellen und auf mögliche Einwände und Fragen gut vorbereitet sein.

c) Fertige eine Skizze an, die den Garten und den „Weg“ des Rasenmähers darstellt.

d) Welche Annahmen und Vereinfachungen musst du treffen, damit deine Funktion gültig ist.

e) Welche Faktoren, Größen und Gegebenheiten lassen sich nur schwer in der Funktionsgleichung berücksichtigen?

Im Folgenden sind zwei Schülerlösungen der Teilaufgaben d) und e) wiedergegeben.

d) Annahmen:
1. Rasenmäher fährt immer gleich schnell,
2. gibt keine Hindernisse auf dem Weg
Vereinfachungen: Rasenmäher muss nicht um Kurven fahren (Geschwindigkeit würde nicht konstant sein)

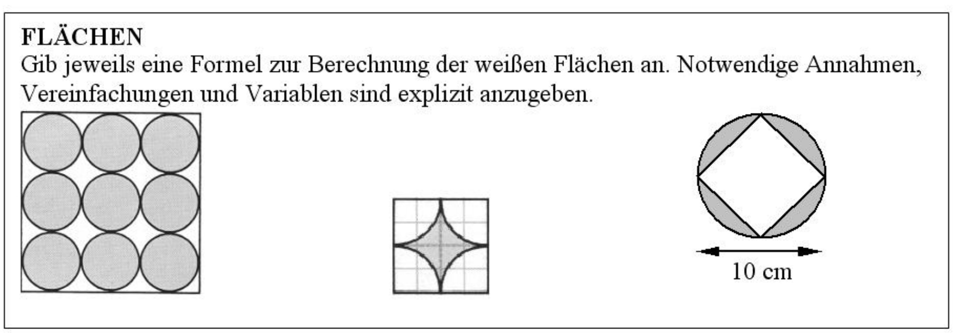
e) 1. Dass der Rasenmäher nicht immer gerade geht u. somit manchmal kleine Streifen hinterlasst.
2. Könnte Hindernisse im Weg geben.
3. Der Rasenmähende macht keine Pause.
(Sebastian, Klasse 8)

d) Ich muss annehmen, dass der Rasenmäher in den Kurven genauso viel Zeit braucht und Fläche mäht wie auf den Geraden Flächen, außerdem muss der jenige der mäht immer das gleiche Schritttempo haben.

e) In der Funktionsgleichung lässt sich nur schwer darstellen, dass das Schritttempo auch mal langsamer oder schneller wird. Außerdem kann es ja sein, dass der Strom ausfällt und ich nicht mehr weitermachen kann.
(Christiane, Klasse 8)

(3) Berechnungen am Kreis (Fläche, Umfang, Kreisteile)

Als Test-und Klausuraufgaben, die den Charakter von Modellierungsaufgaben haben, wurden u.a. die Aufgabe FLÄCHEN und ENTFERNUNGSMESSUNG gestellt. Die Aufgabe FLÄCHEN fokussiert auf Fähigkeiten der Mathematisierung und beleuchtet nur einen Teil des Modellbildungsprozesses auf der Niveaustufe II.



Innerhalb der Aufgabenbearbeitung der Problemstellung ENTFERNUNGSMESSUNG werden Verfahrenskenntnisse der Modellvalidierung sowie Fähigkeiten, welche sich primär auf

Niveaustufe 3 einordnen lassen, angesprochen.

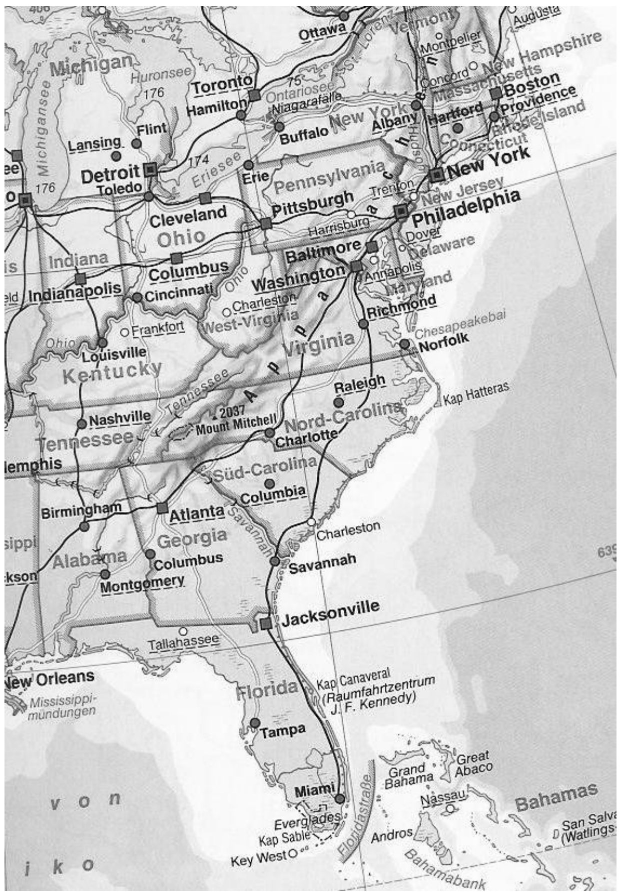
ENTFERNUNGSMESSUNG
Mittels eines Laufrades werden Entfernungen, z.B. bei Verkehrsunfällen gemessen.
a) Schildere stichpunktartig die Methode der Entfernungsmessung mittels Laufrad.
b) Wie könnte man die Qualität (Genauigkeit) der Entfernungsmessung mittels Laufrad überprüfen?
c) Von welchen Einflussgrößen hängt die Genauigkeit der Entfernungsmessung mittels Laufrad ab?
d) Welche der in Aufgabe c) genannten Einflussgrößen sind mathematisch leicht berechenbar und welche sind deiner Meinung nach eher schwer berechenbar?

Im Ergebnis des Unterrichts konnten bezüglich der Modellbildungskompetenz folgende Qualitätserhöhung des Wissens und Könnens (betreffs der Modellierungsfähigkeiten) erreicht werden. Die Schülerinnen und Schüler erkennen deutlich den Unterschied zwischen innermathematische Aufgaben und Aufgaben mit Realitätsbezug und können differenzieren zwischen Begriffen wie Modell, Realität, Modelllösung und Problemlösung. Die Schüler wissen, dass die mathematische Lösung im Sinne einer Modellvalidierung innerhalb der Realität geprüft werden muss. Die Schüler können eigene Handlungen im Modellbildungsprozess verorten und besitzen ein höheres Maß an kritischer Distanz zum Problemkreis Mathematik und Anwendung von Mathematik im täglichen Leben. Die Schüler haben am Ende der Unterrichtsreihe viel häufiger sich selber und die Aussagen und Annahmen ihrer Mitschüler hinterfragt, nach Alternativen oder Grenzen von Annahmen und Abstraktion gesucht.

2.3 Problemlösungen gemeinsam in „Teamwork“ finden

Aufgabe: Landung eines Raumkapsel in den USA

Vorhersagen über den genauen Ort der Landung einer unbemannten Raumkapsel sind häufig schwierig zu treffen. Für eine solche Landung sei nun garantiert, dass sie innerhalb eines kreisförmigen Gebietes stattfindet, das an Birmingham, Atlanta und Nashville grenzt. Die größte „Wahrscheinlichkeit“ der Landung soll in der Mitte dieses Gebietes bestehen. Welche Faktoren können die Landephase beeinflussen? Wie groß ist die Fläche des Lande-



gebietes? Wo befindet sich der Punkt, wo die Landung am günstigsten wäre? Hinweis: Die Entfernung Detroit - Miami beträgt 1855 km (Luftlinie).

Die Musterlösung hier strukturiert aufgeschrieben nach Blum/ Leiß

1. PROBLEMSITUATION VERSTEHEN

Faktoren wie die Wetterlage können die Landephase beeinflussen. Die Schüler sollen erkennen, dass zur Berechnung des Flächeninhalts des Landegebietes Radius oder Umfang des Kreises bestimmt werden müssen.

2. Problem strukturieren/präzisieren

Der Kreis kann als Umkreis des Dreiecks B (Birmingham), A (Atlanta), N (Nashville) konstruiert werden.

3. Problem mathematisieren

Die Konstruktion des Mittelpunkts des Umkreises liefert den Punkt mit der größten Landewahrscheinlichkeit. Für die Flächenberechnung muss der Maßstab berücksichtigt werden. Abb. 2 Kartenausschnitt des relevanten Gebietes mit Konstruktion der notwendigen geo-

metrischen Objekte

Die drei Orte Birmingham, Atlanta und Nashville werden zu einem Dreieck verbunden, dessen Mittelsenkrechten einander im Umkreismittelpunkt M schneiden.

4. Mathematische Werkzeuge auswählen, erschaffen und anwenden

Mittels der gegebenen Entfernung Detroit - Miami kann über eine Verhältnisbildung die reale Größe des bestimmten Durchmessers berechnet werden. Somit erhält man einen Durchmesser von 360 km.

Berechnung des Flächeninhaltes: $A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (360\ km)^2 = 101788\ km^2$

5. Ergebnis interpretieren

Die Schüler sollen die Bedeutung des Punktes mit der größten „Landewahrscheinlichkeit“ diskutieren (z.B. wäre dies der bevorzugte Ort für die Presse, die über das Ereignis berichten möchte).

6. Ergebnis validieren

Die Resultate für die unbemannte Raumfahrt (wie die Präzisierung der Landungen) sollten festgehalten werden.

Diese Aufgabe wurde vier Schülern zur selbstständigen Lösung in Gruppenarbeit gestellt. Die Schüler unterschieden sich im Leistungsverhalten und in der Ausprägung von Erkenntnisinteresse. Sie arbeiteten unter „Laborbedingungen“ ohne Kommunikationsmöglichkeiten mit dem Lehrer. Die sprachlichen Äußerungen der Schüler im Problemlösungsprozess wurden als Tonbandaufzeichnung erfasst und ausgewertet. Bei der Auswertung der sprachlichen Äußerungen der Schüler wurden folgende Aspekte (Kategorien) berücksichtigt:

Kategorie 1: Arbeitsbezogene Verhaltensweisen

Gehen die Schüler zielstrebig vor? Welche Schüler sorgen in welcher Weise für eine Orientierung an den Zielen der Aufgabe?

Kategorie 2: Charakter der Gruppenarbeit

Beschränkt sich die Gruppe auf eine Zusammenführung der Einzelleistungen oder werden die Potenziale von Teamarbeit ausgeschöpft?

Kategorie 3: Gruppenstruktur

Wurde ein Gruppenleiters festgelegt? Wie wurde der Gruppenleiter wirksam? Haben alle Schüler zur Lösungsfindung beigetragen?

Kategorie 4: Resultat der Gruppenarbeit

Wurde die Aufgabe korrekt gelöst? Sind die Gültigkeitsbereiche der Lösung diskutiert worden? Wurde die Lösung am Sachverhalt „geprüft“ und kritisch gewertet?

Ein weiterer Aspekt war die Analyse der sprachlichen Äußerungen der einzelnen Schüler A, B, C und D und eine mögliche Zuordnung zu den Niveaustufen der Herausbildung von Modellierungsfähigkeiten (Modellbildungskompetenz).

Hier das Protokoll der sprachlichen Äußerungen (im Wortlaut):

C1: Wo liegt Nashville?

D1: Diese 3 Punkte sind dann ...

B1: Wo?

D2: Wo ist Atlanta?

C2: Nashville ist da so schräg rüber.

B2: Ach da!

A1: Ist das nicht England eigentlich?

C3: Dachte ich auch.

D3: Müssen wir da jetzt den Mittelpunkt herausfinden, oder? Wir können ja erstmal eine Skizze machen.

C4: Detroit-Miami. Wo sind Detroit und Miami? Und dann?

D4: Wo ist jetzt Miami?

C5: An der Spitze da.

D5: Detroit ist da oben.

C6: Wozu braucht man diese Entfernung?

D6: Ist das eine Tangente oder so etwas?

C7: Wozu brauchen wir die Entfernung, um den Kreis zu zeichnen?

D7: Guck mal, wenn man die Punkte verbindet!

C8: Wir konstruieren jetzt in die Karte rein.

A2: Sollen wir jetzt den Außenkreis konstruieren?

D8: Ich habe einen Zirkel.

C9: Wir müssen mal gucken, ob das da oben eine Tangente ist.

A3: Nein. Das ist keine Tangente, sondern eine Passante.

D9: Wir können es ja mal ausprobieren, oder?

C10: Kann ich mal dein Lineal haben? Das ist aber keine Tangente?

D10: Wir können die Tangente durch Parallelverschiebung an den Kreis bringen.

A4: Dann haben wir ein Dreieck.

D11: Hat mal einer ein langes Lineal?

A5: Wir haben nur 35 Minuten.

D12: Das bringt sowieso nichts mit der Parallelverschiebung.

A6: Ich hab den Ansatz gesagt.

B3: Welche Beeinflussungen gibt es? Da sind sicher nachher irgendwelche Luftbewegungen.

D13: Wer hat denn gesagt, wir sollen den Inhalt dieses Dreiecks da berechnen?

B4: Die Landestelle ist der Kreis um das Dreieck herum.

D14: Wir können ja erst mal aufschreiben, welche Faktoren die Landung beeinflussen. Luftturbulenzen, Eintrittswinkel in die Atmosphäre. Wenn du zu steil eintriffst, verglühst du sofort, dann gibt's auch keine Landung mehr.

D15: Wenn der den Fallschirm aufmacht, der Punkt mit der höchsten Landewahrscheinlichkeit ...

C11: ... ist der Mittelpunkt von diesem Kreis. Das ist ja der Mittelpunkt zwischen diesen 3 Punkten.

A7: Da ist genau Ohio.

D16: Ich hab das hier einfach eingezeichnet.

C12: Das ist natürlich auch eine Möglichkeit.

D17: Wollen wir das mal machen mit der Parallelverschiebung.

B5: Was willst du mit Parallelverschiebung erreichen. Von Atlanta nach Nashville in die Zirkelspanne nehmen und vergleichen.

D17: Mal messen, wie oft Atlanta – Nashville in die Strecke hineinpasst.

B6: Was war das jetzt, 1800?

D18: Wir sollen doch diese Landefläche berechnen. Wir müssen aufschreiben, dass Birmingham – Atlanta 8-mal in Detroit – Miami passt.

D19: Mann, das passt nicht rein. Die Reststrecke von Nashville – Atlanta, wenn man das einteilt, ist genau Birmingham – Atlanta. Aber was bringt uns das?

B7: Wir müssen den Radius bestimmen.

A8: Muss man alles konstruieren oder kann man auch messen?

C13: Jetzt kann man die 3. Seite berechnen.

A9: Das geht doch gar nicht.

D20: Man muss es erst abziehen und dann durch 5 teilen.

B8: Ah, jetzt versteht ich das. 324 kommt raus. Punkt- vor Strichrechnung.

D21: Was haben wir jetzt gemacht.

C14: Wir haben die Strecke Atlanta – Nashville berechnet.
Wie viel Zeit haben wir noch?

A10: Guck mal, ob danach die Strecke reinpasst.
Und die Hälfte von der anderen Strecke?

D22: Die müssen wir erst noch konstruieren.

B9: Das ist genau 10-mal der Radius.

D23: Es passt, es passt, oder doch nicht. Und jetzt Birmingham – Nashville?
1,2,3,4,5,6-mal der Radius und dann die Hälfte Birmingham – Atlanta.

A11: Das bringt uns überhaupt nichts.

D24: Was sollen wir denn machen?

A12: Na den Radius vom Kreis bestimmen. Ich muss erstmal testen, ob das funktioniert.

D25: Landewahrscheinlichkeitspunkt, oder wie?

B10: Der Radius ist gleich 168 km. Dann können wir jetzt den Flächeninhalt ausrechnen.

D26: $89000 km^2$. Dann wären wir fertig, oder?

B11: Wir sollten noch die Oberflächenbeschaffenheit der Landefläche berücksichtigen.

C15: Und den Eintrittswinkel in die Atmosphäre.

Die Analyse der sprachlichen Äußerungen entsprechend der o.g. Kategorien 1 bis 4 stützt folgende Einschätzungen:

K1: Die Schüler haben stets nur versucht, die Anteile bestimmter Strecken der Strecke Detroit-Miami zu berechnen, anstatt einen für die gesamte Karte gültigen Maßstab zu bestimmen.

K2: Während der Gruppenarbeit wurden stets die Ideen aller vier Teilnehmer in den Bearbeitungsprozess einbezogen. Auch bei unterschiedlichen Intensitäten der Beteiligung (siehe K3 „Gruppenstruktur“) kann die Zusammenarbeit als konstruktiv eingeschätzt werden. Es fanden keine Phasen von Einzelarbeit statt, außerdem hat sich kein Schüler aus der Gruppe ausgeschlossen.

K3: Die Schüler Anne (D) und Michael (A) dominieren die Gruppenarbeit (Anzahl der sprachlichen Äußerungen) Somit bringen sie die Lösungsfindung entscheidend voran, lassen jedoch auch die Meinungen der anderen Schüler zu. Sie sammeln die verschiedenen Äußerungen der Teilnehmer und sortieren die relevanten Ideen heraus. Außerdem sorgen sie für ein zielstrebiges Bearbeiten der Aufgabe und verhindern damit ein Abschweifen von der eigentlichen Thematik.

K4: Nach anfänglichen Problemen mit der geeigneten Berücksichtigung eines Maßstabes konnte der Lösungsprozess erfolgreich fortgesetzt werden. Ferner wurden die Einflüsse verschiedener äußerer Faktoren diskutiert und in die Rechnungen einbezogen. Es wurde auch über den „Sinn“ der Aufgabe unter dem Aspekt, dass Landungen von Raumkapseln in den USA immer zu Wasser erfolgen, weil die USA dicht besiedelt sind und das Landegebiet bevölkerungsreich ist.

Die sprachlichen Äußerungen A1 -A13, B1-B9, C1-C16 und D1-D26 haben wir dann unter dem Aspekt der Niveaustufen 1 bis 3 zur Herausbildung von Modellierungsfähigkeiten analysiert und eine entsprechende Zuordnung, wie

Schüler A:

Niveaustufe 1 (A1, A2, A5, A6, A7, A9)
Niveaustufe 2 (A3, A4, A8, A10, A11, A12)
Niveaustufe 3 (A13)

Der Modellbildungskreislauf wird von Schüler A erkannt und es findet teilweise bereits selbstständige Modellbildung statt. Der Schüler befindet sich somit auf der Niveaustufe 2, die Fähigkeiten zur kritischen Analyse des Modellbildungs- prozeßes müssen noch ausgebaut werden.

Schüler B:

Niveaustufe 1 (B1, B2, B6, B8, B9)
Niveaustufe 2 (B4, B7, B10)
Niveaustufe 3 (B3, B5, B11)

Die Fähigkeit zur selbstständigen Modellbildung ist bei Schüler B ausgeprägt und führt ferner zu einer Reflexion der einzelnen durchgeführten Modellierungsschritte. Der Schüler befindet sich auf der Niveaustufe 3, die jedoch noch erweitert werden sollte um die Fähigkeiten der Thematisierung weitergehender mathematischer Zusammenhänge.

Schüler C:

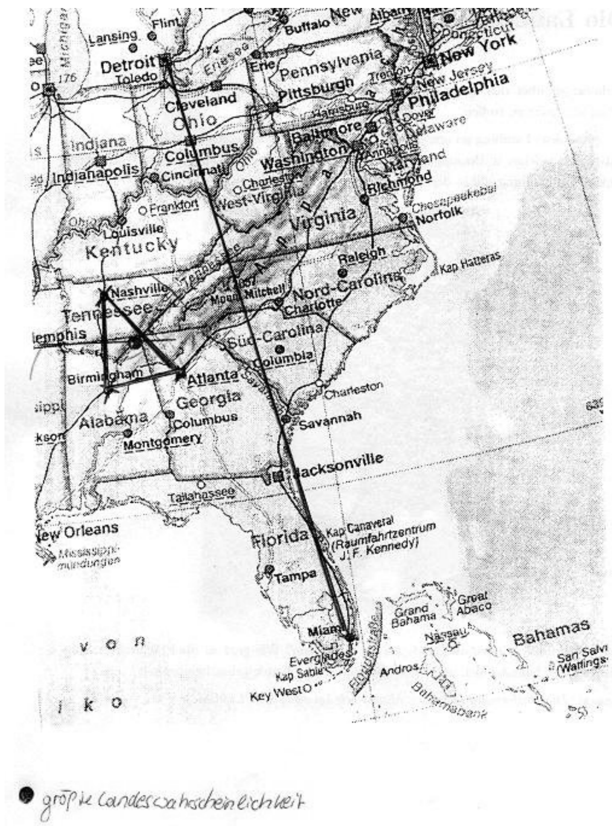
Niveaustufe 1 (C1, C2, C3, C4, C5, C6, C10, C14)
Niveaustufe 2 (C7, C8, C9, C11, C12, C13, C15)
Niveaustufe 3 (C16)

Vom Schüler C ist der Modellbildungsprozess verstanden und durchlaufen worden, außerdem werden selbstständig verschiedene Lösungsansätze entwickelt. Über Niveaustufe 2 hinausgehende Fähigkeiten wie beispielsweise zur Durchführung einer Modellbildungsevaluation sind noch nicht ausreichend ausgeprägt. Interessant ist, dass er die Realitätsnähe der Aufgabe in Frage stellt.

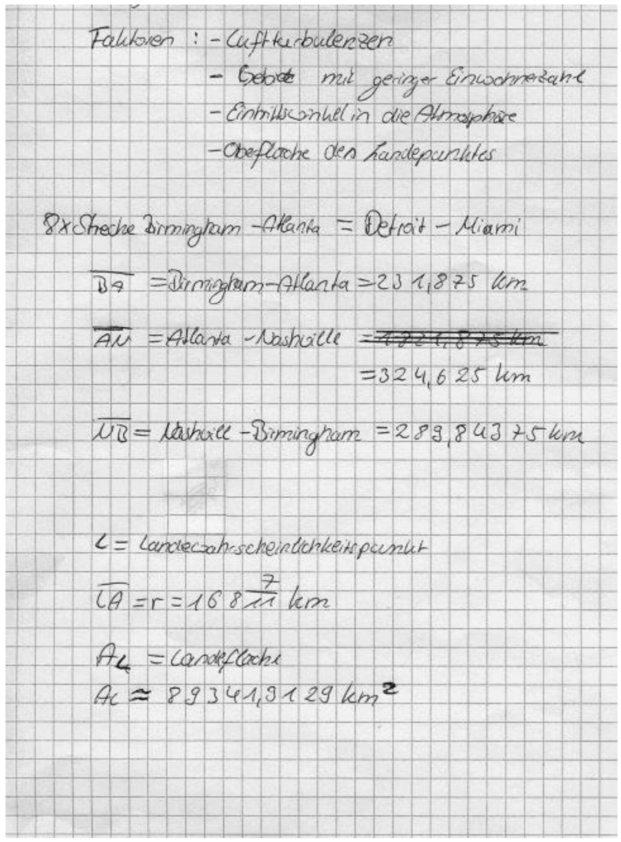
Schüler D:

Niveaustufe 1 (D1, D2, D4, D5, D6, D8, D9, D10, D11, D12)
Niveaustufe 2 (D3, D7, D15, D16, D17, D20, D22, D24, D25, D26)
Niveaustufe 3 (D13, D14, D18, D19, D21)

Über die eigenständige Modellbildung hinaus verfügt Schüler D über die Fähigkeiten, den Modellbildungsverlauf in Frage zu stellen und über die Notwendigkeiten der einzelnen Prozesse zu reflektieren. Der Schüler befindet sich auf Niveaustufe 3, wobei eine Ausweitung der Betrachtungen auf andere Gebiete der Mathematik nicht stattfindet. Keiner der Schüler reflektierte über die rechnerische Genauigkeit der Lösung, über Fehler beim Messen der Strecken zwischen den Städten und mögliche „Fortpflanzung“ ungenauer Abmessungen bei der numerischen Lösung des Problems. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen, dass die Schüler große Schwierigkeiten hatten ihre Lösungsideen strukturiert aufzuschreiben und sich dabei der mathematischen Sprache (Zeichen, Variable, Größen) zu bedienen und für eine übersichtliche und in allem nachvollziehbare Problemlösung zu nutzen. Dies werten wir als ein großes Defizit mathematischer Grundbildung. Das zeigen die folgenden Abbildungen der von Michael „aufgeschriebenen Problemlösung“. (Abb. 5 und Abb. 6)



Die hier geschilderten unterrichtlichen Erfahrungen zeigen, dass ein gezielter Unterricht die Kompetenz zur Modellbildung bei den Schülerinnen und Schülern herausbilden kann. Unabhängig vom konkret gewählten Ansatz (Betrachtung einzelner Phasen und Prozesse der Modellbildung vs. Betrachtung des Gesamtprozesses) und der curricularen Einbindung



Faktoren : - Luftturbulenzen
- Gebiet mit geringer Einwohnerzahl
- Eintrittswinkel in die Atmosphäre
- Oberfläche des Landepunktes

8x Strecke Birmingham - Atlanta = Detroit - Miami

$\overline{BA}$ = Birmingham - Atlanta = 231,875 km

$\overline{AN}$ = Atlanta - Nashville = ~~[illegible]~~
= 324,625 km

$\overline{NB}$ = Nashville - Birmingham = 289,84375 km

L = Landewahrscheinlichkeitspunkt

$\overline{LA} = r = 168\frac{7}{11}$ km

A_L = Landefläche
$A_L \approx 89341,3129\ km^2$

(integrierter oder isolierter Einsatz der Modellbildung) ist durch Verwendung geeigneter Probleme und Modellbildungsaufgaben ein Wissen, Fähigkeiten und Einstellungen bei den Schülern erreichbar, welche diese zu kompetenten Nutzern der Mathematik im Sinne der Anwendung und Modellbildung befähigen. Die vorliegenden unterrichtlichen Erfahrungen und Untersuchungen zeigen auch, dass Modellbildung schon in der unteren Sekundarstufe I integrierbar ist und Schülerinnen und Schülern dazu verhilft, ein modernes Bild der Mathematik zu erfahren, das auf der sie umgebenden Erfahrungswelt aufbaut, persönliche Erlebnisse und Kenntnisse integriert und Mathematik als ein Mittel zu Realitätserfahrung, -beschreibung und -erkenntnis erlebbar macht. Die durchgeführte Analyse der Tonbandprotokolle ermöglicht eine Rekonstruktion der Herangehensweise von Schülern an Modellbildungsaufgaben. Es kann festgestellt werden, in welcher Intensität die Kompetenzen zur Lösung dieser Aufgaben ausgeprägt sind und in welcher Weise deren Weiterentwicklung bei jedem einzelnen Schüler nötig ist. Außerdem kann ermittelt werden, dass bei den meisten Schülern die Fähigkeiten zu einer effektiven Bearbeitung der Problemstellungen vorhanden sind. Dies beinhaltet eine sinnvolle Arbeitsteilung und eine konstruktive Zusammenführung der Einzelerarbeitungen, wobei die auf diese Weise erreichten Resultate zu selten schülerseitig hinterfragt wurden. Weitere Schritte zur Erhöhung der Modellbildungskompetenzen müssen somit auf die Fähigkeiten zur kritischen Reflexion der eigenen Lösungswege abzielen, wobei hiermit sowohl inner- als auch außermathematische Reflexionen gemeint sein sollen. Die Auswertung der aufgeschriebenen Problemlösungen zeigt große Defizite in der Verwendung von Variablen, in der systematischen Darstellung des Lösungsweges, im Deutlichmachen des Wesentlichen. Auffallend ist, dass die im Team erarbeitete und sprachlich fixierte Problemlösung keine Entsprechung in der aufgeschriebenen Problemlösung fand.

3 Modellbildungsaufgaben zur Herausbildung von Kompetenzen

3.1 Niveaustufe 1

Ein Auto – Zwei Bremswege

Die Messung des Bremsweges eines Autos hat in zwei verschiedenen Fällen folgende Werte ergeben:

Geschwindigkeit v in $\frac{km}{h}$	50	75	100	125	150	175
Bremsweg s in m	14	31	55	86	125	170

Geschwindigkeit v in $\frac{km}{h}$	50	75	100	125	150	175
Bremsweg s in m	23	55	98	153	220	300

a) Welche Umstände können zu diesen unterschiedlichen Messergebnissen geführt haben?

b) In der Fahrschule lernt man folgende Faustregel zur Berechnung des Bremsweges:

$$s \text{ [in m]} \ = \frac{\left(v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{]}\ \right)^2}{100}$$

Wie ist diese Regel mit den Messwerten zu vereinen? Stelle eine geeignetere Faustregel auf!

c) Wie verändern sich die durchgeführten Betrachtungen bei Berücksichtigung der Reaktionszeit des Fahrers?

I. Problemsituation verstehen

Zunächst muss den Schülern bewusst werden, dass den beiden Situationen, in denen der Bremsweg des Autos bestimmt wurde, vollkommen unterschiedlichen Bedingungen zugrunde lagen. Es kann überlegt werden, ob die zweite Messung bei regennasser Fahrbahn aufgenommen wurde oder welche weiteren Umstände zu diesen Ergebnissen geführt haben könnten (Teilaufgabe a). Hier können eine vereiste Fahrbahn oder schlechter werdende Bremsen oder Reifen genannt werden.

II. Realmodell

Da bei dieser Aufgabe das mathematische Modell in Form einer Formel bereits vorgegeben ist, können die Schüler vermuten, wie das dazugehörige Realmodell beschaffen sein könnte. Über diese Fähigkeiten sollten die Schüler verfügen, da ihnen die Modellbildungsphasen bekannt sind. Das Realmodell soll den Zustand der Straße, der Bremsen und Reifen sowie der Umgebung vernachlässigen und lediglich die Geschwindigkeit des Autos berücksichtigen, aus der die Vollbremsung erfolgt.

III. Mathematisches Modell

Die Schüler sollen nachvollziehen, wie die vorgegebene Faustformel entstanden sein könnte. Dies ist nur bedingt möglich, da die Messwerte nur näherungsweise mit der Formel harmonieren. Dies kann aber leicht begründet werden, da es sich um eine Regel handelt, die sich die Fahrschüler leicht merken sollen.

IV. Mathematische Berechnungen

Durch Einsetzen von Geschwindigkeitswerten in die Formel und Vergleich mit den beiden Messreihen können die Schüler feststellen, dass die zweite Messreihe mit der Formel vereinbar ist. Es ist zu vermuten, dass die Faustformel zur Sicherheit höhere Werte für den Bremsweg ausgibt, die aber tatsächlich nur bei Regen auftreten.

Für eine trockene Bahn kann durch Herausgreifen von Wertepaaren aus der ersten Messreihe eine weitere Faustregel aufgestellt werden (Teilaufgabe b):

$$s \text{ [in m]} \; = \frac{\left(v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{] }\right)^2}{180}$$

Bei Berücksichtigung der Reaktionszeit des Fahrers ergibt sich durch Überlegungen ein längerer Bremsweg, der sich durch Abänderung der Faustformeln berechnen lässt (Teilaufgabe c). Der zurückgelegte Weg während der Reaktionszeit berechnet sich mit $s_0 = v \cdot 1\text{s}$. Wenn die Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ angegeben ist, fällt hier die Einheit s weg und man erhält den Bremsweg in m als Zahlenwert der Geschwindigkeit. Da im Straßenverkehr meist die Einheit $\frac{km}{h}$ genutzt wird, muss zur Einheitenumrechnung noch durch 3,6 dividiert werden.

$$s_1 \text{ [in m]} \; = \frac{\left(v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{] }\right)^2}{180} + \frac{v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{]}}{3,6}$$

bzw.

$$s_2 \text{ [in m]} \; = \frac{\left(v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{] }\right)^2}{100} + \frac{v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{]}}{3,6}$$

V. MATHEMATISCHE LÖSUNGSEVALUATION

In die neue Faustformel können nun einige Geschwindigkeitswerte eingesetzt werden, um sie durch die Werte der ersten Messreihe zu bestätigen. Dabei ist darauf zu achten, dass die ursprüngliche Faustformel von den Schülern nun nicht als falsch angesehen wird, da sie bei nasser Straße durchaus ihre Relevanz behält. Es ist darauf zu achten, dass eine Faustformel leicht zu merken sein soll und außerdem eine gewisse Toleranz berücksichtigt. Aus diesen Gründen sollten bei Berücksichtigung der Reaktionszeit des Fahrers noch Veränderungen an den Faustformeln vorgenommen werden:

$$s_1 \text{ [in m]} \; = \frac{\left(v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{] }\right)^2}{180} + \frac{v \text{ [in } \frac{km}{h}\text{]}}{2}$$

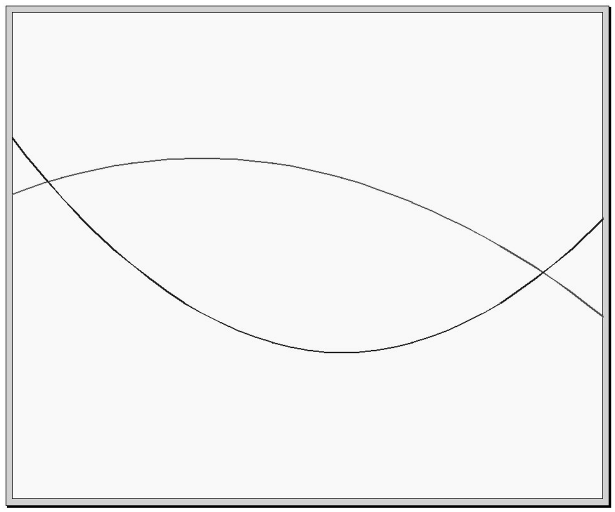
Die Formel für die Berechnung des Bremsweges bei nasser Fahrbahn kann analog verändert werden.

VI. REALE LÖSUNGSEVALUATION

Der Einfluss der Wetterverhältnisse auf die zu nutzenden Faustformeln sowie deren Bedeutung für den Straßenverkehr sollten diskutiert werden. Außerdem sollen die Schüler erkennen, dass sich der Autofahrer nicht mehrere Faustregeln merken möchte und aus Sicherheitsgründen die Regel für die nassen Wetterverhältnisse Priorität besitzt, obwohl diese im Trockenen zu große Werte für den Bremsweg liefert.

Rätselhafte Kurven

Ein realer Sachverhalt wurde durch die angegebene graphische Darstellung modelliert:



a) Welche der folgenden Sachverhalte könnte dieser Darstellung zu Grunde gelegen haben?

   (A) Jahresverlauf der Wasserspiegel zweier Seen

   (B) Höhe zweier Golfbälle während des Fluges

   (C) In zwei Kassen eines Supermarktes befindliches Geld während eines Tages

b) Erläutere die reale Situation, die von diesem Modell beschrieben wird!

c) Wie müssten die Achsen des Diagrammes beschriftet werden? Interpretiere es hinsichtlich wichtiger Punkte!

I. Problemsituation verstehen

Die Schüler wählen aus den drei Realsituationen den Vorschlag (A), da dieser ein sinnvolles Durchlaufen des Modellbildungsprozesses ermöglicht (Teilaufgabe a). Vorschlag (B) ist nicht möglich, da die Höhe eines Golfballes nach dem Abschlag nicht durch eine nach oben geöffnete Parabel beschrieben werden kann. Auch Vorschlag (C) entfällt, da das Geld nicht kontinuierlich der Kasse zugefügt bzw. entnommen wird, sondern in größeren diskreten Portionen.

II. Realmodell

Das Finden eines Realmodells kann von den Schülern nachempfunden werden (Teilaufgabe b), beispielsweise könnten die Werte der Wasserspiegel im Laufe eines Jahres täglich aufgezeichnet worden sein und müssen nun zur weiteren Verarbeitung in die Form eines mathematischen Modells überführt werden.

III. Mathematisches Modell

Näherungsweise können die Werte des Jahresverlaufes durch Parabeln beschrieben werden. Dies ermöglicht eine Berechnung der Schnittpunkte der Kurven und liefert eine anschauliche Darstellung der Problematik, die auf diese Weise verstanden und interpretiert werden kann.

IV. Mathematische Berechnungen

Die Ermittlung der Funktionsgleichung ist zur Bearbeitung der Aufgabe nicht erforderlich, da die wichtigen Punkte wie Schnitt- und Extrempunkte nur interpretiert, und nicht berechnet werden sollen. Dies kann als Zusatzaufgabe durchgeführt werden, falls es die Unterrichtssituation verlangt, z.B. zur Festigung der dazu notwendigen Verfahren. Die Abszisse ist mit der Zeit zu beschriften (Januar – Dezember), die Ordinate mit der Höhe des Wasserspiegels (Teilaufgabe c).

V. Mathematische Lösungsevaluation

Die dargestellten Parabeln stellen nur dann ein geeignetes Modell dar, wenn die Abweichungen von den realen Messwerten der Wasserstände nicht zu stark abweichen. Da diese Werte in der Aufgabenstellung nicht gegeben sind, kann die Angemessenheit des Modells hier nicht bewertet werden, sollte aber von den Schülern bedacht werden.

VI. Reale Lösungsevaluation

Die Schnittpunkte beider Graphen liefern jene Tage im Jahr, an denen die Wasserspiegel beider Seen gleich hoch sind. Die Extrempunkte der beiden Funktionen entsprechen den Tagen mit dem höchsten bzw. niedrigsten Wasserstand (Teilaufgabe c). Es kann gefolgert werden, dass die nach oben geöffnete Parabel einen See der Nordhalbkugel beschreibt, da das Klima in der Jahresmitte (Sommer) trocken ist. Die nach unten geöffnete Parabel lässt auf ein zur Jahresmitte feuchtes Klima schließen (Winter) und es wird sich aus diesem Grund um einen See handeln, der auf der Südhalbkugel liegt. Der konträre Verlauf kann jedoch auch auf regionale Klimaschwankungen zurückgeführt werden.

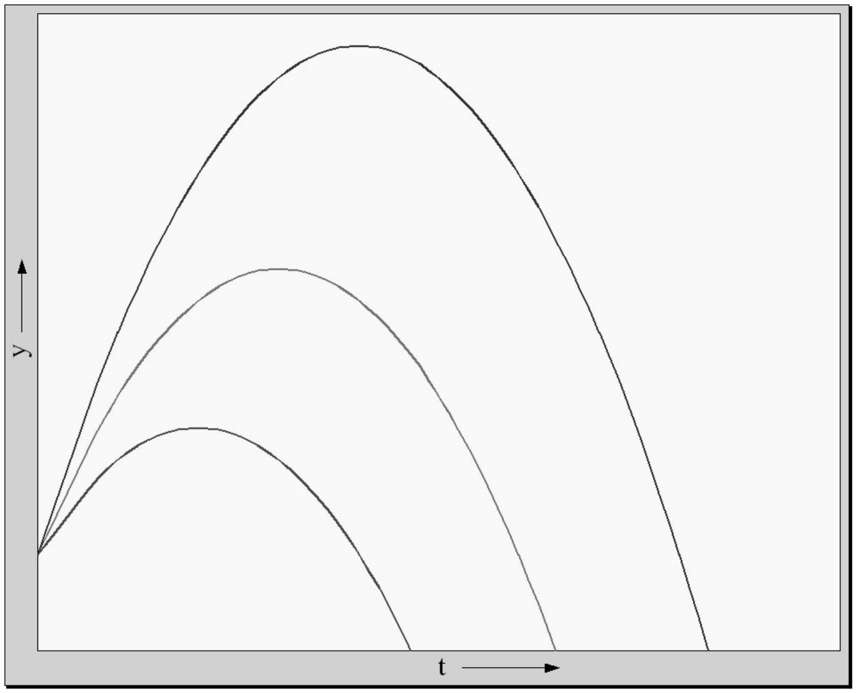
Ein ungewöhnliches Billardspiel

Wenn eine Billardkugel zweckentfremdet wird und man sie senkrecht nach oben wirft, ergibt sich bei Vernachlässigung der Erdanziehungskraft eine geradlinig gleichförmige Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Der zurückgelegte Weg kann dann aus der Gleichung $y = v_0 \cdot t$ berechnet werden. Der freien Fall der Kugel kann durch die Gleichung $y = 4,905 \cdot t^2$ beschrieben werden. Die beiden Bewegungen überlagern sich und man erhält für den senkrechten Wurf nach oben folgende Funktion:

$$y = v_0 \cdot t - 4,905 \cdot t^2$$

a) Welche Informationen über die Wurfsituation können dem angegebenen Diagramm entnommen werden?

b) Stellt die Funktion ein angemessenes Modell dar? Welche Aspekte werden vernachlässigt? Verändere eventuell die Funktion, so dass sie im Einklang mit der graphischen Darstellung steht!



c) Stelle eine Formel auf, mit der man die größte Höhe der Billardkugel während des Fluges berechnen kann.

I. Problemsituation verstehen

Es handelt sich um eine Kugel, die dreimal senkrecht nach oben geworfen wird, wobei unterschiedliche Wurfhöhen erreicht werden. Dies ist auf unterschiedliche Anfangsgeschwindigkeiten zurückzuführen. Ferner kann dem Diagramm entnommen werden, dass zu Beginn des Wurfes eine gewisse Anfangshöhe vorhanden ist, die bei jedem der Würfe den gleichen Wert hat (Teilaufgabe a).

II. Realmodell

Das Realmodell wird durch die Überlegung gebildet, dass die Höhe der Kugel bis zu einem bestimmten Punkt zunimmt, bis die Kugel kurzzeitig zum Stillstand kommt und dann bis zum Auftreffen auf den Boden abnimmt. Die Umkehrpunkte der drei kugeln liegen hierbei in unterschiedlichen Höhen.

III. Mathematisches Modell

Die Schüler können dann feststellen, dass die Luftreibung hier vernachlässigt werden kann und die Parabeln somit ein angemessenes Modell der Realsituation darstellen.

Beim Vergleich mit der Funktionsgleichung muss festgestellt werden, dass die Anfangshöhe noch nicht berücksichtigt wurde. Die Gleichung muss also ergänzt werden (Teilaufgabe b):

$$y = v_0 \cdot t - 4,905 \cdot t^2 \mathbf{+h}$$

IV. Mathematische Berechnungen

Das Modell soll nun genutzt werden, um eine Höhenberechnung durchzuführen (Teilaufgabe c). Dazu kann die Mitte beider Nullstellen berechnet werden oder man nutzt die y-Koordinate der Scheitelpunktsformel mit $a = -4,905$, $b = v_0$ und $c = h$:

$$h_{max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-19,62h - v_0^2}{-19,62}$$

V. Mathematische Lösungsevaluation

Es sollten verschiedene Werte in die Formel zur Höhenberechnung eingesetzt werden, um zu überprüfen, ob sie realistische Werte liefert. Außerdem bleibt auswertend festzustellen, dass die ergänzte Funktionsgleichung die vorgegebenen Parabeln, und somit das Modell liefert.

VI. Reale Lösungsevaluation

Es können Werte für die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangshöhe eingesetzt werden, um eine Vorstellung von dem real ablaufenden Vorgang zu erhalten. Außerdem könnte das verwendete Modell mit Hilfe eines Experimentes bestätigt werden, indem der vorliegende Versuch für verschiedene Anfangswerte durchgeführt wird.

Ideales Körpergewicht

Das ideale Körpergewicht eines Menschen kann über verschiedene Faustregeln bestimmt werden. Die beiden bekanntesten seinen im Folgenden angegeben:

Faustregel (1): $G = K - 100$
Faustregel (2): $G = \frac{K^2}{400}$

K... Körpergröße in cm
G... Idealgewicht in kg

a) Welche Faktoren sollte eine Faustregel zur Berechnung des idealen Körpergewichtes berücksichtigen? Inwieweit werden diese Berücksichtigungen von den Faustregeln (1) und (2) vorgenommen?

b) Für welche Werte von K sind die Regeln (1) und (2) sinnvoll? Wie weit weicht das ideale Körpergewicht beider Regeln höchstens voneinander ab?

c) Überprüfe die Regeln mit Hilfe der folgenden Gewichtstabelle eines Arztes:

Körpergröße in cm	160	170	180	190	200	210
Idealgewicht in kg	59	70	81	91	102	114

Für welche der beiden Regeln würdest du dich entscheiden?

I. Problemsituation verstehen

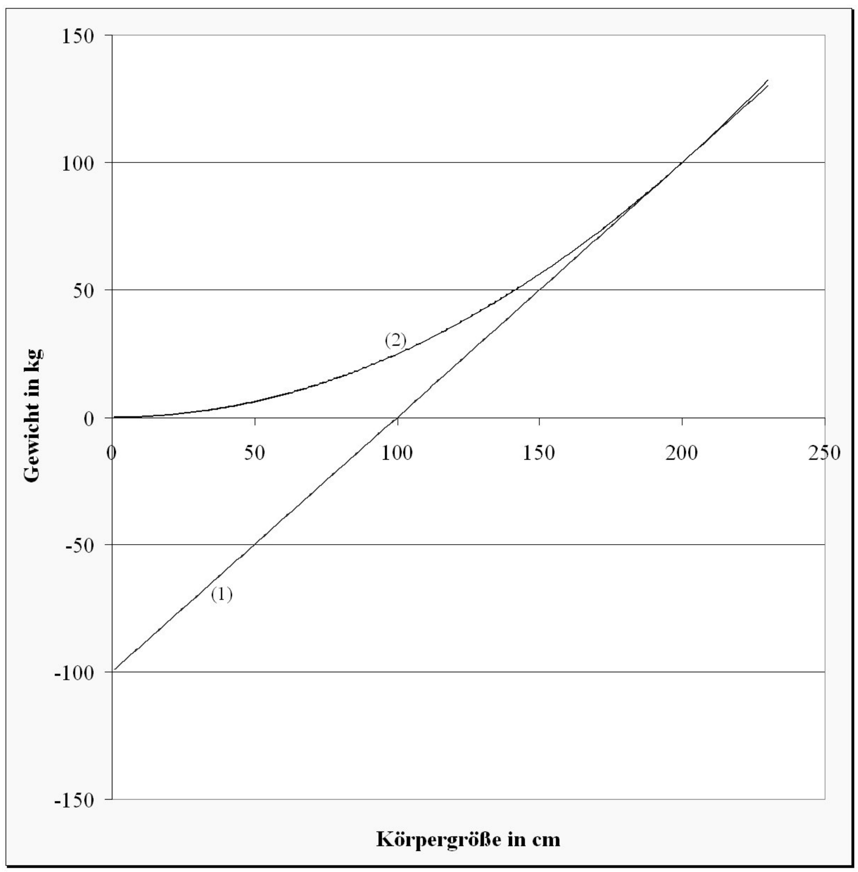
Das ideale Körpergewicht hängt von der Körpergröße der Person ab, jedoch auch von deren Geschlecht, Alter und Gesundheitszustand. Die beiden Faustregeln berücksichtigen ausschließlich die Körpergröße (Teilaufgabe a).

II. Realmodell

Das Realmodell entsteht durch die Entscheidung über durchzuführende Abstraktionen, wobei die Schüler thematisieren sollten, ob die Vernachlässigung von Geschlecht, Alter und Gesundheitszustand gerechtfertigt ist oder ob der reale Sachverhalt hierdurch verfälscht wird.

III. Mathematisches Modell

Die vorgegebene Gleichung (1) liefert für $K < 100$ negative Werte für das Gewicht und darf somit für diese Werte nicht genutzt werden. Größere Werte von K liefern zwar ein positives Ergebnis für das Gewicht, weichen jedoch stark von den realen Erwartungen ab. Dies trifft auch auf Gleichung (2) zu und sollte zu der Entscheidung führen, dass beide Gleichungen nur für Erwachsene verwendet werden dürfen (Teilaufgabe b).



IV. Mathematische Berechnungen

Aus der anzufertigenden graphischen Darstellung kann die maximale Abweichung des Idealgewichtes entnommen werden. Mit den beiden Gleichungen kann überprüft werden, dass der Abstand höchstens 25 kg bei einer Körpergröße von 100 cm beträgt. Da zuvor festgelegt wird, die Gleichungen nur für Erwachsene zu nutzen, ergibt sich für die Abweichung bei 150 cm ein Betrag von $6,25$ kg. Stärkere Abweichungen ergeben sich erst wieder bei Körpergrößen, die über 230 cm liegen und somit ausgeschlossen werden können (Teilaufgabe b).

V. Mathematische Lösungsevaluation

Unter Berücksichtigung der Gültigkeitsbereiche beider Gleichungen ist deren Sinnhaftigkeit im Zusammenhang mit dem realen Problem nachgewiesen. Die Gewichtstabelle des Arztes liefert Ergebnisse für das ideale Körpergewicht, die für kleine Werte näherungsweise aus Gleichung (1) und für große Werte im festgelegten Gültigkeitsbereich aus beiden Gleichungen hervorgehen.

VI. Reale Lösungsevaluation

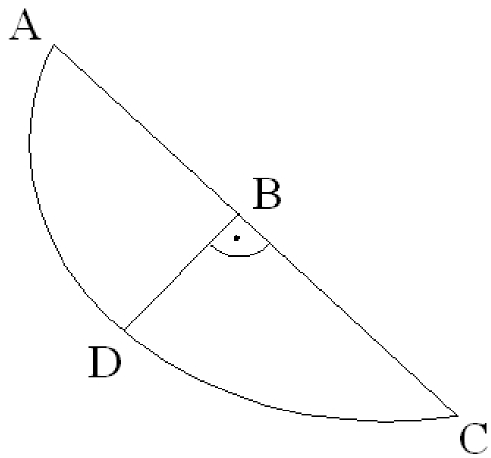
Der Vergleich mit der Gewichtstabelle des Arztes, dass Faustregel (1) für kleinere Körpergrößen besser geeignet ist, wobei für große Personen ($K \geq 180$) beide Regeln geeignet sind und für Personen mit $K \geq 210$ liefert die Faustregel (2) genauere Ergebnisse (Teilaufgabe c).

Optimaler Empfang?

Bei der Konstruktion von Satellitenantennen müssen verschiedene Gesichtspunkte berücksichtigt werden, um einen optimalen Fernsehempfang gewährleisten zu können. Dazu werden diese Parabolspiegel durch Funktionen charakterisiert. Wie lautet für eine in nachfolgender Konzeptzeichnung beschriebene Antenne die dazugehörige Charakterisierung?

I. Problemsituation verstehen

Durch die Angabe von Funktionsgleichungen, welche die Parabolspiegel charakterisieren sollen, können Aussagen wie z.B. über die Empfangsqualität auf alle Antennen dieses Typs übertragen werden.



II. Realmodell

Die „Umrandung" soll durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden, wobei die Antennen somit auf ihre Querschnitte reduziert werden. Weitere Aspekte wie das verwendete Material oder Belastbarkeit werden nicht berücksichtigt.

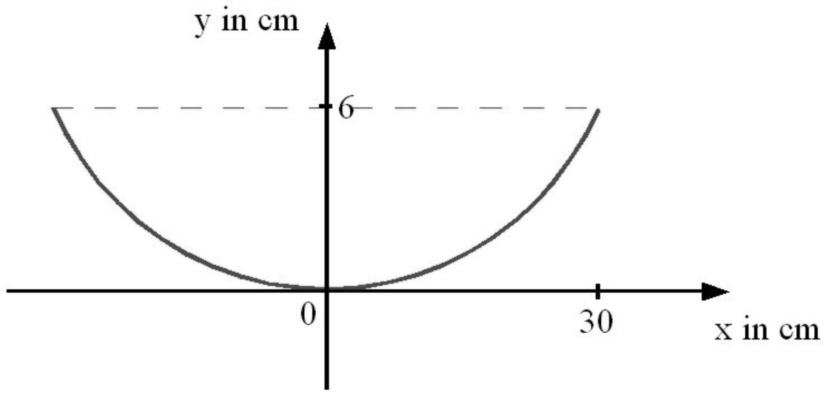
III. Mathematisches Modell

Mit der Annahme, dass es sich bei dem Querschnitt um eine Parabel handelt, legt man diesen in ein Koordinatensystem. Hierbei sollte darauf geachtet werden, dass die Wahl der Lage des Koordinatensystems zu möglichst einfachen Berechnungen führt (Scheitelpunkt im Koordinatenursprung).

IV. Mathematische Berechnungen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{mit } b = c = 0$$



$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 \\
&\quad \text{mit } P(30|6) \\
\Rightarrow 6 &= a \cdot 30^2 \\
a &= \frac{1}{150} \\
\Rightarrow f(x) &= \frac{1}{150} \cdot x^2
\end{aligned}
$$

V. Mathematische Lösungsevaluation

Über eine Probe kann man die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{150} \cdot x^2$
mit $f(30) = \frac{1}{150} \cdot 30^2 = 6$ bestätigen.

VI. Reale Lösungsevaluation

Die Schüler sollen besprechen, ob die gewählte Charakterisierung ausreicht, um die Gewährleistung eines optimalen Fernsehsignals beschreiben zu können. Außerdem stellt sich die Frage, welche weiteren Möglichkeiten der Charakterisierung von Parabolspiegeln bestehen.

Jeder gegen jeden

Sebastian wird bei Sportturnieren häufig als Protokollführer engagiert. Bei diesen Turnieren spielt in der Regel jede Mannschaft gegen jede. Um einen Zeitplan aufzustellen, muss er zu Beginn jedes Turniers die Anzahl der Spiele bestimmen. Für 3 bzw. 4 Mannschaften hat er diese Anzahl bereits ermittelt:

3 Spiele bei 3 Mannschaften
A – B
A – C
B – C

6 Spiele bei 4 Mannschaften
A – B
A – C
A – D
B – C
B – D
C – D

Bei Turnieren, an denen noch mehr Mannschaften teilnehmen, nimmt diese Vorgehensweise viel Zeit in Anspruch. Um den Aufwand zu verringern, möchte Sebastian eine Formel aufstellen. Er unterbreitet dafür folgenden Vorschlag:

$$s = \frac{n(n-1)}{2}$$

a) Prüfe die Formel an Sebastians und an eigenen Beispielen! Für welche Anzahl von Mannschaften kann sie verwendet werden?

b) In der 1. Fußball-Bundesliga finden in jeder Saison an 34 Spieltagen jeweils 9 Spiele statt. Aus Gründen der Fairness wird jede Begegnung zweimal angesetzt (Heim- und Auswärtsspiel). Wie viele Mannschaften spielen in der 1. Bundesliga?

I. Problemsituation verstehen

Die Anzahl der Begegnungen kann eindeutig aus der Anzahl der Mannschaften ermittelt werden. Für kleine Turniere kann dies die Auflistung der einzelnen Partien verdeutlichen, für große Turniere soll eine Berechnungsformel genutzt werden.

II. Realmodell

Das Realmodell berücksichtigt nur die Anzahl der Mannschaften, Spielausfälle oder Wiederholungsspiele werden hierbei vernachlässigt.

III. Mathematisches Modell

Die vorgegebene Gleichung liefert für 3 Mannschaften 3 Spiele, bei 4 Mannschaften sind es 6 Spiele. Sebastians Beispiele sind somit bestätigt und ein eigenes Beispiel kann die vorgeschlagene Formel weiter stützen. Ab $n = 1$ liefert der Formel realistische Ergebnisse (Teilaufgabe a):

A – B	B – D
A – C	B – E
A – D	C – D
A – E	C – E
B – C	D – E

$$s = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$$

IV. Mathematische Berechnungen

Das Modell soll nun genutzt werden, um aus einer Spielanzahl die Anzahl der Mannschaften zu bestimmen. In der Bundesliga gibt es insgesamt $34 \cdot 9 = 306$ Spiele. Da jede Begegnung zweimal gespielt wird, erhält man $306 : 2 = 153$ verschiedene Partien (Teilaufgabe b).

$$\begin{aligned}
153 &= \frac{n(n-1)}{2} \\
306 &= n^2 - n \\
0 &= n^2 - n - 306 \\
n_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 306} \\
n_{1/2} &= 0,5 \pm 17,5 \\
\\
n_1 &= 18 \\
n_2 &= -17 \quad \rightarrow \text{entfällt}
\end{aligned}$$

V. Mathematische Lösungsevaluation

Die Lösung n_2 entfällt, da eine negative Anzahl von Mannschaften nicht existieren kann. Das Ergebnis $n = 18$ ist realistisch und fußballinteressierte Schüler werden dieses Ergebnis bestätigen können. Die Faustformel wurde somit vielfach bestätigt und kann als allgemeingültig angesehen werden.

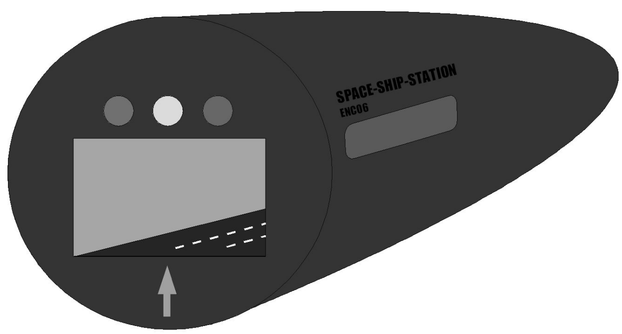
VI. Reale Lösungsevaluation

Die Formel liefert nur dann ein korrektes Ergebnis, wenn die Anzahl der Mannschaften als einziger Einflussfaktor auf die Spieleanzahl angesehen wird. Bei Berücksichtigung weiterer Einflüsse muss von den Schülern diskutiert werden, inwiefern die Formel dann näherungsweise gültig ist.

3.2 Niveaustufe 2

Der Weltraumbahnhof

Viele Astronauten der Weltraumorganisationen streben für die kommenden Jahrzehnte bemannte Raumflüge zum Mars an. Wenn dieses Ziel erreicht sein wird, werden die Menschen weitere Planeten unseres Sonnensystems besuchen wollen. Wegen der großen Entfernungen müssen Weltraumbahnhöfe als Zwischenstationen eingerichtet werden.



Die Einflugöffnung des Weltraumbahnhofes sei 30 m breit und 14 m hoch. Raumschiffe dürfen nur dann den Bahnhof anfliegen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) Die Querschnittsfläche des Raumschiffes darf höchstens halb so groß sein wie die Einflugöffnung des Bahnhofes.

(2) Der Sicherheitsabstand muss zu allen vier Wänden des Bahnhofes identisch sein.

Welche Ausmaße hat das größtmögliche Raumschiff, das den Bahnhof anfliegen darf? Wie groß wäre dann der Sicherheitsabstand?

I. Problemsituation verstehen

Die vorgegebenen Bedingungen für das Anfliegen des Bahnhofes schränken die Ausmaße des größtmöglichen Raumschiffes ein. Der maximal erlaubte Querschnitt muss wegen Bedingung (2) ein Rechteck darstellen, welches ähnlich zur Einflugöffnung sein muss.

II. Realmodell

Als Realmodell kann man sich ein Raumschiff mit einem rechteckigen Querschnitt vorstellen, das sich in die Einflugöffnung des Bahnhofes bewegt. Die Seitenlängen des Querschnittes liegen (echt) zwischen $0\ m \times 0\ m$ und $30\ m \times 14\ m$.

III. Mathematisches Modell

Der Flächeninhalt der Einflugöffnung $A_{Einflug} = 30\ m \cdot 14\ m = 420\ m^2$ liefert zusammen mit Bedingung (1) eine maximale Querschnittsfläche des Raumschiffes von $A_R = \frac{1}{2} \cdot 420\ m^2 = 210\ m^2$. Somit kann man unter Berücksichtigung von Bedingung (2) das Modell aufstellen (d... Sicherheitsabstand):

$$(30 - 2d)(14 - 2d) = 210$$

IV. Mathematische Berechnungen

$$\begin{aligned}
(30 - 2d)(14 - 2d) &= 210 \\
420 - 88d + 4d^2 &= 210 \\
4d^2 - 88d + 210 &= 0 \\
d^2 - 22d + 52,5 &= 0 \\
d_{1/2} &= 11 \pm \sqrt{11^2 - 52,5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= 19,28\ m \quad \rightarrow \text{entfällt} \\
d_2 &= 2,72\ m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= 24,56\ m \\
b &= 8,56\ m
\end{aligned}$$

V. Mathematische Lösungsevaluation

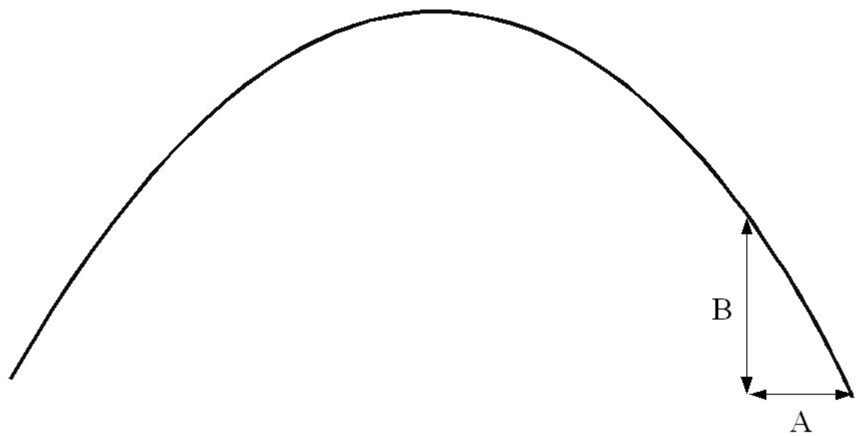
Der Sicherheitsabstand d_1 entfällt, da er die Ausmaße der Einflugöffnung übersteigt. Der Sicherheitsabstand $d_2 = 2,72\ m$ ist somit der hierfür gültige Wert. Die sich daraus ergebenden Werte für die Kantenlängen des maximalen Raumschiffquerschnittes genügen den Bedingungen (1) und (2).

VI. Reale Lösungsevaluation

Das Modell lieferte realistische Werte für den Sicherheitsabstand und den maximalen Raumschiffquerschnitt, wobei explizit auf die Bedeutung des Sicherheitsabstandes eingegangen werden sollte. Dabei ist die Sinnhaftigkeit der Bedingungen (1) und (2) zu diskutieren.

Bogenbrücken

In Deutschland findet man zahlreiche frei gespannte Massivbogenbrücken. Eine der größten ist die Kylltalbrücke bei Bitburg/Eifel, die 1999 dem Verkehr übergeben wurde. Die Spannweite des Bogens beträgt 223 m. Da ein Wanderer die Höhe der Brücke ermitteln möchte, schätzt er zwei in seiner unmittelbaren Nähe befindliche Abschnitte der Brücke. Abschnitt A schätzt er durch Vergleich mit seiner Körpergröße auf 1,20 m und Abschnitt B auf 2 m.



a) Wie kann der Wanderer die Höhe der Brücke bestimmen?

b) Um wie viel Prozent ändert sich die ermittelte Brückenhöhe, wenn der Wanderer den Abschnitt A auf 10 cm weniger geschätzt hätte?

I. Problemsituation verstehen

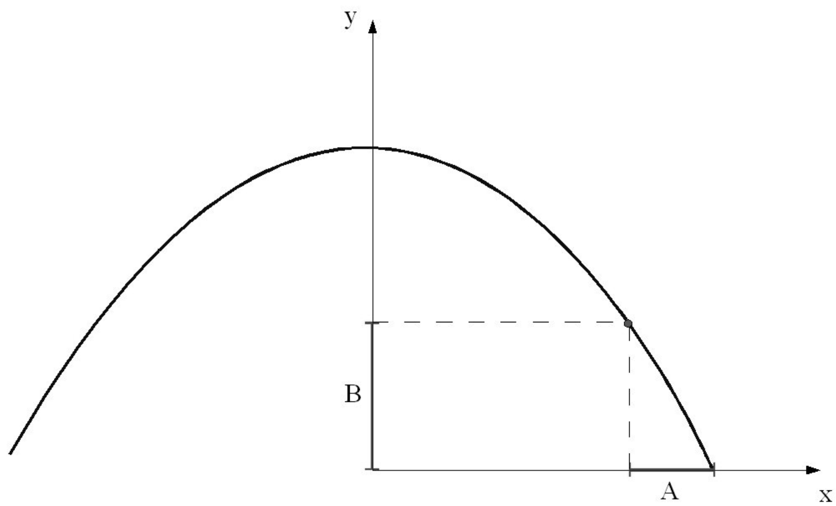
Aus den geschätzten Angaben für den unteren Bereich der Brücke soll deren Gesamthöhe bestimmt werden.

II. Realmodell

In der gegebenen Skizze wurde für die Brücke eine Linie verwendet, dieser erste Modellschritt muss von den Schülern erkannt werden.

III. Mathematisches Modell

Als mathematisches Modell sollte eine Parabel genutzt werden, die geeignet in ein Koordinatensystem gelegt wird. Es bietet sich an, den Koordinatenursprung in die Mitte zwischen die beiden Brückenenden zu legen.



IV. Mathematische Berechnungen Die Wahl des Koordinatensystems liefert $b = 0$ und somit $f(x) = ax^2 + c$. Die Punkte $P_1(111,5 \mid 0)$ und $P_2(110,3 \mid 2)$ können in die Funktionsgleichung eingesetzt werden und ergeben ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 111,5^2 + c \\ 2 &= a \cdot 110,3^2 + c \end{aligned}$$

Als Lösungen erhält man $a = -0,0075$ und $c = 93,24$.

Falls Abschnitt A auf 10 cm weiniger geschätzt wird, kann man die Rechnung analog führen, jedoch mit $P_3(110,4 \mid 2)$ anstelle von P_2. Man erhält dann $a = -0,0082$ und $c = 101,87$.

V. Mathematische Lösungsevaluation

Die Funktionsgleichung zum angewandten Parabelmodell lautet $f(x) = -0,0075 \cdot x^2 + 93,24$ (Schätzung zu Teilaufgabe a). Im zweiten Fall ergibt sich $f(x) = -0,0082 \cdot x^2 + 101,87$. Die Berechnungen entsprechen den Höhen $93,24\ m$ bzw. $101,87\ m$, die Schätzungen weichen somit um 9 Prozent voneinander ab.

VI. Reale Lösungsevaluation

Die Schüler können besprechen, welche weiteren Möglichkeiten der Schätzung bzw. Bestimmung der Brückenhöhe existieren und wie die Genauigkeiten dieser Methoden einzuschätzen sind.

Die optimale Bushaltestelle

Eine Bushaltestelle von 20 m Länge und 4 m Breite wird durch schmückende Holzpfeiler begrenzt.

a) Wie könnten die Pfeiler so aufgestellt werden, dass die Fläche der Bushaltestelle möglichst groß wird? Dabei soll die Anzahl der Pfeiler nicht verändert werden und die rechteckige Form der Haltestelle erhalten bleiben.

b) Welche größtmögliche Fläche stände zur Verfügung, wenn die Form nicht beibehalten werden müsste?

I. Problemsituation verstehen

Da die Größe der Holzpfeiler nicht bekannt ist, wird zunächst nur die Gesamtlänge der Seiten der Bushaltestelle betrachtet. Die Anzahl der Pfeiler wird nicht verändert, somit bleibt die Summe der drei Seitenlängen konstant.

II. Realmodell

Wenn man die Breite der Haltestelle vergrößert, so verkleinert sich deren Länge. Wird die Breite verkleinert, so vergrößert sich die Länge, wobei die rechteckige Form erhalten bleibt (Teilaufgabe a).

III. Mathematisches Modell

Die Summe der drei Seitenlängen beträgt konstant $2a + b = 2 \cdot 4 + 20 = 28$. Aus dem umgestellten Term $b = 28 - 2a$ ergibt sich für den Flächeninhalt der Bushaltestelle:

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ &= a \cdot (28 - 2a) \end{aligned}$$

IV. Mathematische Berechnungen

Die x-Koordinate des Scheitelpunktes der Funktion $A(a) = a \cdot (28 - 2a)$ kann als Mittelpunkt beider Nullstellen ermittelt werden. Die Nullstellen lauten $a_{N1} = 0$ und $a_{N2} = 14$. Der Scheitelpunkt hat dann die x-Koordinate $a_S = 7$, die den Maximalwert für den Flächeninhalt liefert.
Es ergibt sich mit $b = 14$ ein Flächeninhalt von $A = 98\ m^2$.

Einen größeren Flächeninhalt würde ein Halbkreis ergeben (Teilaufgabe b). Die zur Verfügung stehende Anzahl von Pfeilern setzt den Umfang $u = 2\pi r$ fest, woraus sich $r = 8,92\ m$ errechnen lässt.
Für den Flächeninhalt ergibt sich dann $A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = 124,92\ m^2$.

V. Mathematische Lösungsevaluation

Über eine Probe kann aus $98 = a \cdot (28 - 2a)$ die Kantenlänge a bestätigt werden. Der für den Halbkreis berechnete Flächeninhalt ist der maximal mögliche, da ein Kreis für einen konstanten Umfang stets die größte Fläche liefert.

VI. Reale Lösungsevaluation

Die Schüler sollten diskutieren, welche Form für eine Bushaltestelle die geeignetste darstellt, da hier die Einfahrt des Busses und das Zusteigen der Fahrgäste gewährleistet werden muss.

Architektur einer Eisenbahnbrücke

Ein Architekt wird zum Bau einer Eisenbahnbrücke beauftragt. Zur Inspiration besichtigt er verschiedene Brücken und fotografiert sie. Im Folgenden ist das Foto jener Brücke zu sehen, an der er sich beim Bau seiner eigenen Brücke orientieren möchte. Diese Eisenbahnbrücke von 62 m Länge und 20 m Höhe wird von 2 Betonbögen getragen. Auf jedem dieser Bögen befinden sich 10 Betonpfeiler. Der Architekt benötigt zur Vervollständigung seiner Unterlagen die Länge und die Masse dieser Pfeiler. Wie kann er diese Daten bestimmen?

I. Problemsituation verstehen

Die Brücke wird von 2 Bögen und deren senkrecht der Erdoberfläche verlaufenden Pfeilern getragen. Wenn das Volumen bekannt ist, kann mit der Dichte von Beton die Masse der Pfeiler bestimmt werden.

II. Realmodell

Die Abstände der Pfeiler können bis auf den mittleren Teil der Bögen als konstant angenommen werden. Da der Querschnitt der Pfeiler ebenso konstant sein soll, kann das Volumen eines Pfeilers aus dessen Querschnittsfläche und der Länge berechnet werden. Hierbei muss die Querschnittsfläche abgeschätzt werden, da dazu keine Angaben gegeben sind.

III. Mathematisches Modell

Jeder der Bögen kann durch jeweils eine Parabel von 31 m Länge und 20 m Höhe modelliert werden. Die Nullstellen lauten somit $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = 31$. Daraus ergibt sich der Scheitelpunkt $S(15,5 \mid 20)$.

IV. Mathematische Berechnungen

Die Funktionsgleichung kann aus den bekannten Punkten mit Hilfe eines Gleichungssystems aus der allgemeinen Darstellung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $c = 0$ ermittelt werden.

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 31^2 + b \cdot 31 \\ 20 &= a \cdot 15,5^2 + b \cdot 15,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{20 - 15,5b}{15,5^2} \\ &= \frac{20}{15,5^2} \cdot 31^2 + b\left(31 - \frac{31^2}{15,5}\right) \\ &= 80 - 31b \\ 80 &= 31b \\ b &= 2,58 \\ a &= -0,0832 \end{aligned}$$

Somit erhält man als Funktionsgleichung $f(x) = -0,0832x^2 + 2,58x$. Da sich die Pfeiler an bestimmten Stellen der x-Achse befinden, kann deren Höhe nun als zugehöriger Funktionswert bestimmt werden. Die Position der Pfeiler muss von den Schülern abgeschätzt werden, wobei eine Vernachlässigung der in der Nähe des Scheitelpunkts etwas enger stehenden Pfeiler zu einer äquidistanten Betrachtung führt. Dabei wird die x-Achse zwischen den Nullstellen in 11 gleich lange Strecken aufgeteilt. Also stehen die Pfeiler im Abstand von $2,82$ m nebeneinander.

Pfeiler Nr.	x	y
1	2,82	6,61
2	5,64	11,90
3	8,45	15,87
4	11,27	18,51
5	14,09	19,83
6	16,91	19,84
7	19,73	18,52
8	22,55	15,88
9	25,36	11,91
10	28,18	6,63

Bei einer geschätzten Querschnittsfläche der Pfeiler von $A_Q = 5\ m \cdot 0,5\ m = 2,5\ m^2$ und einer Pfeiler-Gesamtlänge von $145,5\ m$ ergibt sich ein Volumen von $V = 145,5\ m \cdot 2,5\ m^2 = 363,75\ m^3$. Mit der Dichte für Beton $\rho_{Beton} \approx 2000 \frac{kg}{m^3}$ erhält man für die Masse $m = \rho_{Beton} \cdot V = 2000 \frac{kg}{m^3} \cdot 363,75\ m^3 = 727,5\ t$.

V. Mathematische Lösungsevaluation

Die mittels Funktionsgleichung errechneten Höhen der einzelnen Pfeiler harmonieren mit den angenommenen Werten für die Nullstellen und den Scheitelpunkt.

VI. Reale Lösungsevaluation

Die Ergebnisse für Länge und Masse der Betonpfeiler sind realistisch, jedoch nur approximativ, da verschiedene Annahmen wie die Äquidistanz der Pfeiler vorgenommen wurden.

Radrennen

Bei einem Radrennen erhalten die Fahrer für das Erreichen von Zwischenstationen Zeitgutschriften, deren Höhe sich nach der Platzierung richtet:

Platzierung	1	2	3
Zeitgutschrift in s	180	165	140

a) Erkennst du ein System in der Vergabe der Zeitgutschriften? Stelle eine Formel zur Berechnung der Gutschriften aus der Platzierung auf!

b) Wie groß sind die Zeitgutschriften für die weiteren Platzierungen? Welchen Sinn macht dieses Vergabesystem?

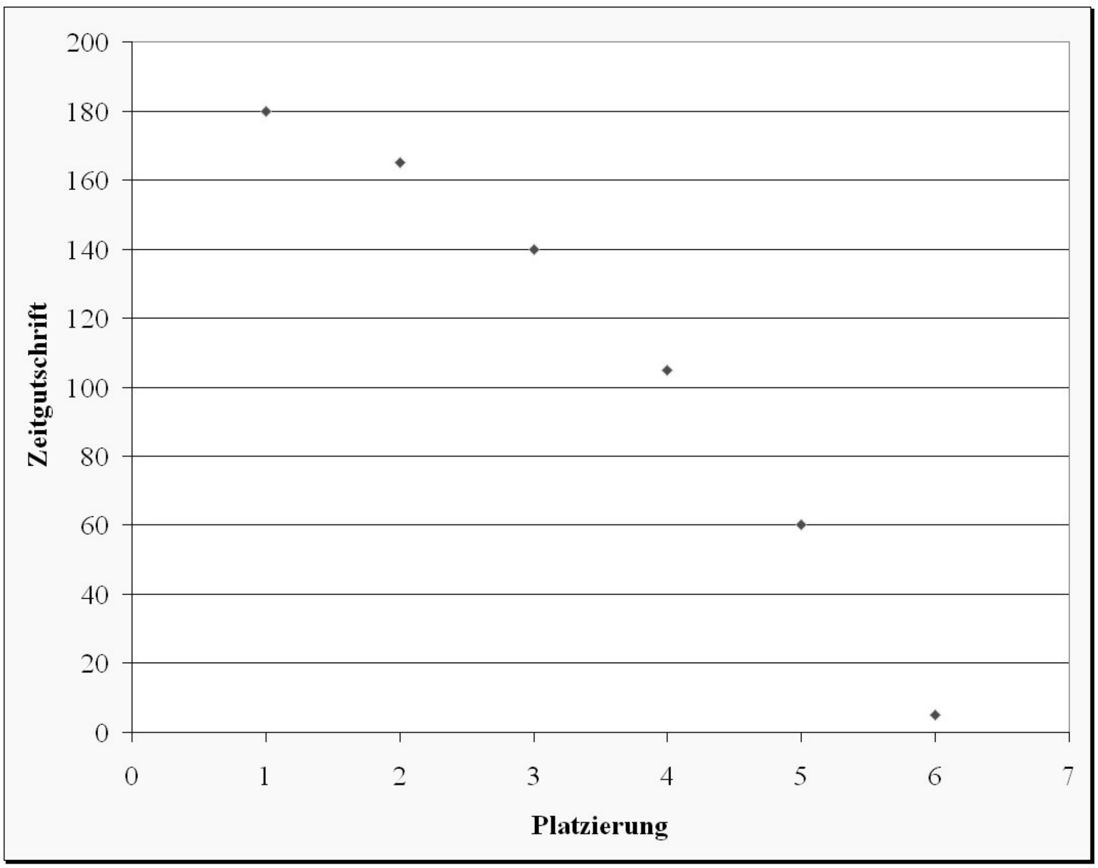
I. Problemsituation verstehen

Die Zeitgutschriften sind in Wirklichkeit Abzüge vom jeweiligen Zeitstand im Gesamtklassement des Fahrers, da im Radsport eine geringere Zeit stets besser ist als eine höhere, da man eine festgelegte Strecke schneller zurückgelegt hat.

II. Realmodell

Je höher die Platzierung, umso geringer fällt die Zeitgutschrift aus. Der Abstand zwischen den Gutschriften beträgt zunächst 15 $s$und danach 25 s. Die Schüler können vermuten, dass sich die Abstände um jeweils 10 s erhöhen.

III. Mathematisches Modell



Wenn die Vermutungen graphisch dargestellt werden, ist der parabolische Verlauf zu erkennen. Da der Graph symmetrisch zur y-Achse ist, verschwindet der Parameter b in der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$.

IV. Mathematische Berechnungen

Nun können die bekannten Punkte in $f(x) = ax^2 + c$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} 180 &= a + c \\ 165 &= 2^2 \cdot a + c \\ 140 &= 3^2 \cdot a + c \end{aligned}$$

Man erhält $a = -5$, $c = 185$ und somit die Funktion $f(x) = -5x^2 + 185$, mit der die vermuteten Werte bestätigt werden können.

Platzierung	1	2	3	4	5	6
Zeitgutschrift in s	180	165	140	105	60	5

V. Mathematische Lösungsevaluation

Durch Einsetzen der Wertepaare können sowohl die Vermutung als auch die Funktionsgleichung in ihrer Richtigkeit nachgewiesen werden.

VI. Reale Lösungsevaluation

Die Punkte im Koordinatensystem dürfen nicht verbunden werden, da Platzierungen stets ganzzahliger Natur sind. Somit handelt es sich nicht um eine Parabel, sondern um 6 Punkte einer Parabel.

Wie misst man die Höhe einer Tanne?

Förster benötigen möglichst genaue Angaben über die Höhen der im Wald wachsenden Bäume. Die Höhenbestimmung bei Nadelbäumen ist schwierig, da der Stamm wegen des dichten Wuchses mit einem Zollstock nicht erreicht werden kann. Dagegen lässt sich die Verbindung von der Baumspitze zu den Spitzen der untersten Äste problemlos vermessen. Diesen Wert bestimmt der Förster für den im Vordergrund des Fotos zu erkennenden Baum und erhält $7,15\ m$. Außerdem ist ihm bekannt, dass diese Tannensorte so wächst, dass ihre Höhe stets $3\ m$ größer ist als ihre Breite. Wie hoch und breit ist die Tanne?

Überprüfe das Ergebnis mit Hilfe des Fotos, dessen Breite in der Wirklichkeit $10\ m$ entspricht!

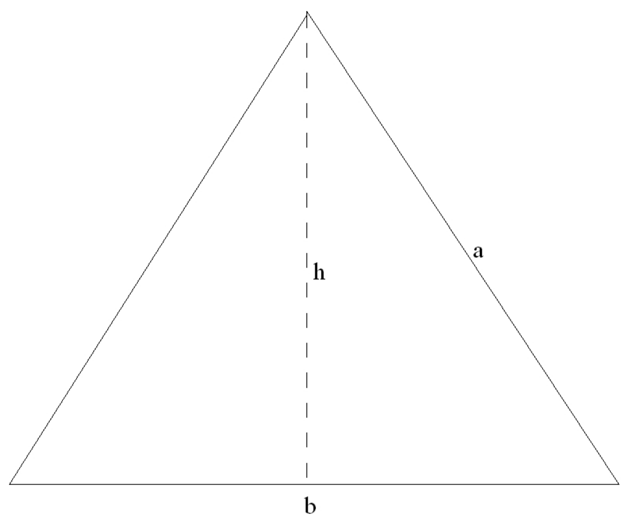
I. Problemsituation verstehen

Da die Höhe der Tanne stets 3 m größer ist als die Breite, ergeben sich je nach Größe unterschiedliche Formen. Eine 1 m breite Tanne wäre bei 4 m Höhe deutlich „schlanker“ als eine 30 m breite und somit 33 m hohe Tanne.

II. Realmodell

Die Tannenbreite und -höhe hängen unmittelbar voneinander ab, wobei unberücksichtigt bleibt, dass jeder Baum unterschiedlich wächst. Es kann sich also lediglich um eine näherungsweise Regel für eine bestimmte Tannensorte handeln.

III. Mathematisches Modell



Zur Modellierung des Längsschnittes der Tanne wird ein gleichschenkliges Dreieck genutzt. Wenn dieses Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt wird, kann der Satz des Pythagoras verwendet werden.

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

IV. Mathematische Berechnungen

Nun können die bekannten Zusammenhänge bzw. Werte eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
7,15^2 &= (b+3)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
0 &= \frac{5}{4}b^2 + 6b - 42,1225 \\
0 &= b^2 + \frac{24}{5}b - 33,698 \\
b_{1/2} &= -\frac{12}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 33,698} \\
b_1 &= 3,88 \\
b_2 &= -8,68 \quad \rightarrow \text{entfällt}
\end{aligned}$$

V. Mathematische Lösungsevaluation

Da eine negative Breite nicht möglicht ist, erhält man genau eine gültige Lösung. Diese kann durch eine Probe überprüft werden. Die Schüler sollten den Gültigkeitsbereich austesten und auf den Zusammenhang $b > 0 \Rightarrow h > 3$ stoßen.

VI. Reale Lösungsevaluation

Die Ergebnisse $b_1 = 3,88\ m$ und somit $h = 6,88\ m$ können durch Vermessen des Fotos mit einem Lineal bestätigt werden, obwohl die berechnete Höhe der Tanne etwas zu klein ausgefallen ist. Hiermit wird der approximative Aspekt solcher Regeln deutlich.

3.3 Niveaustufe 3

Wasserstraße in Berlin

Ein Reiseleiter erklärt den Touristen, dass die Wasserstraße in Berlin einer „großen Regenrinne“ ähnelt. In der Mitte sei das Wasser also am tiefsten und zum Rand hin wird es immer flacher. Ein Tourist entdeckt auf einem Hinweisschild einige interessante Informationen:

Berliner Wasserstraße
Tiefster Punkt: 11 m Breite: 22 m

Wie viel Wasser kann der Kanal pro Kilometer aufnehmen?

Bei Trockenheit ist die Wasserstraße häufig nur bis zu einer Höhe von 9 m gefüllt. Was resultiert daraus für den Schiffsverkehr? Wie stark reduziert sich die für die Schiffe verfügbare Wasserbreite?

I. Problemsituation verstehen

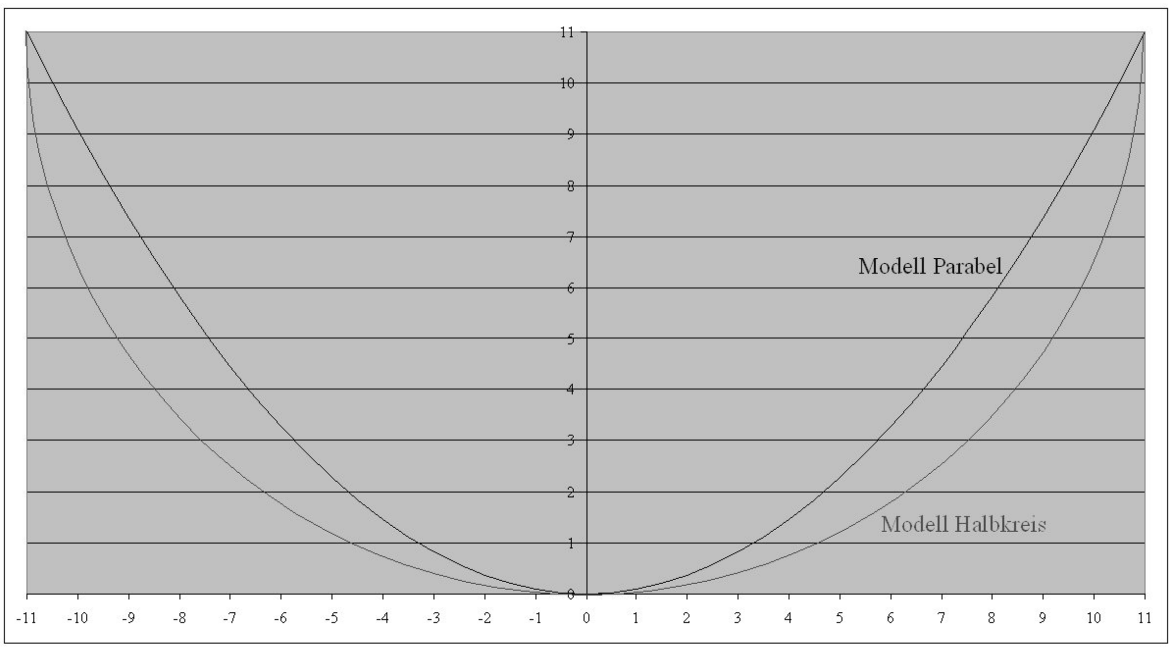
Je geringer der Füllstand des Kanals, umso geringer die für den Schiffsverkehr nutzbare Wasserbreite und -tiefe. Schiffe mit einem großen Tiefgang können unter diesen Umständen nicht mehr verkehren.

II. Realmodell

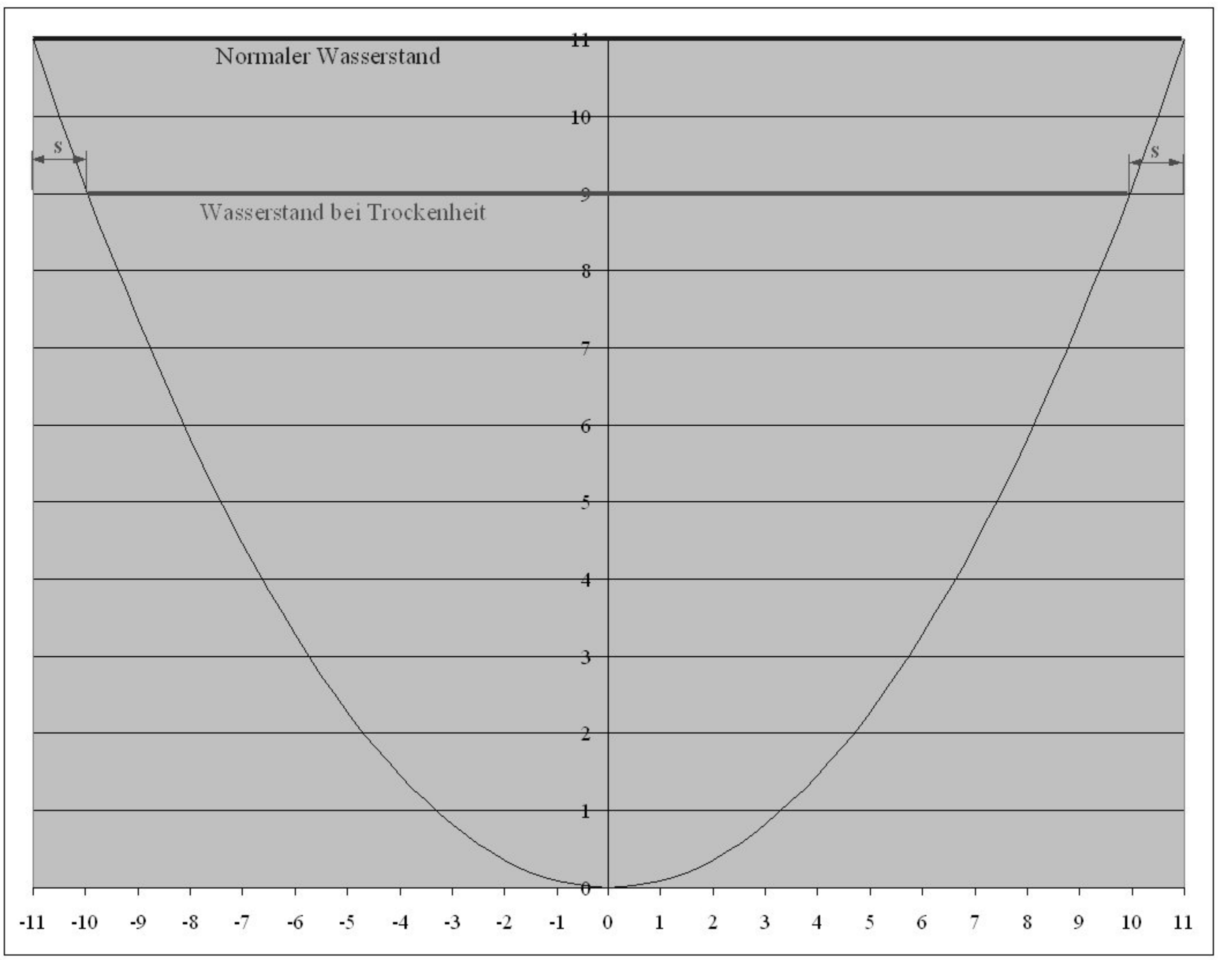
Das Fassungsvermögen ist von Querschnitt und Länge des Kanalabschnitts abhängig. Für die Ermittlung der nutzbaren Breite bei Trockenheit muss eine Beziehung zur Wasserstandshöhe hergestellt werden.

III. Mathematisches Modell

Der Querschnitt des Kanals könnte beispielsweise durch einen Halbkreis, der sich für die Berechnung des Fassungsvermögens anböte, oder eine Parabel, die für die Berechnung der nutzbaren Breite geeignet wäre, umschrieben werden.



$$V_{\text{Fassungsvermögen}} = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 \cdot 1\ km$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \pi (11\ m)^2 \cdot 1000\ m$$
$$= 190066\ m^3$$



Die Berechnung der nutzbaren Breite soll über eine Funktionsgleichung erfolgen. Der tiefste Punkt des Kanals (Scheitelpunkt der Parabel) sollte in den Koordinatenursprung gelegt werden. Wegen der Symmetrie zur y-Achse ergibt sich $b = 0$ und wegen des Verlaufes durch den Koordinatenursprung $c = 0$.

Somit gilt für die Funktionsgleichung:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 \\ 11 &= a \cdot 11^2 \\ a &= \frac{1}{11} \end{aligned}$$

Die zu verwendende Funktionsgleichung lautet also $f(x) = \frac{1}{11} \cdot x^2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{11}x^2 \\ 9 &= \frac{1}{11}x^2 \\ &= \\ x_1 &= 9,95 \\ x_2 &= -9,95 \end{aligned}$$

In Folge der Trockenheit ergibt sich auf beiden Seiten des Kanals jeweils eine Verminderung s der Wasserbreite um $1,05\ m$, also insgesamt um $2,10\ m$.

V. Mathematische Lösungsevaluation

Die Ermittlung der Wasserbreite erfolgte über die Berechnung der Argumente zu dem dazugehörigen Funktionswert $y = 9\ m$. Zur Lösungsfindung hätten auch geometrische Verfahren (Dreiecksbeziehungen und Satz des Pythagoras) genutzt werden können.

VI. Reale Lösungsevaluation

Durch eine Verringerung der Wasserbreite um $9,5\ \%$ auf $19,90\ m$ wird der Schiffsverkehr deutlich eingeschränkt, da größere Schiffe nicht mehr nebeneinander fahren können.

Der Fosbury-Flop

Der amerikanische Leichtathlet RICHARD-DOUGLAS FOSBURY revolutionierte bei den Olympischen Spielen 1968 den Hochsprung mit einer von ihm entwickelten Technik. Der Fosbury-Flop ist eine Art Rückwärtsroller, mit dem man mit dem Rücken in der Luft „liegend“, also mit dem Gesicht nach oben, die Sprunglatte überquert. Mit dieser Technik gelang ihm 1968 in Mexico City der Olympiasieg. Dadurch wurde seine Art zu springen in aller Welt bekannt und setzte sich schnell überall durch.

Um diesen Sprung genauer zu untersuchen, betrachten wir im Folgenden anstatt des gesamten Körpers des Leichtathleten nur den Körperschwerpunkt. Dieser Punkt befindet sich bei Fosbury in 1,05 m Höhe. Da der berühmte Fosbury-Sprung von vielen Journalisten fotografiert wurde, konnte aus dem Fotomaterial bestimmt werden, dass es sich bei seiner Flugkurve um eine Normalparabel handelt, die um den Faktor 1,5 gestreckt ist (in der zum Boden senkrechten Richtung). Außerdem ist bekannt, dass für den Abstand zwischen der Absprungstelle und der Sprunganlage 91 cm gemessen wurden.

a. Mit welcher Sprunghöhe gelang Fosbury dieser historische Olympiasieg? (Im höchsten Punkt der Flugbahn befindet sich der Körperschwerpunkt 5 cm über der Sprunglatte.)

b. In welcher Höhe befand sich sein Körperschwerpunkt, als er von der Absprungstelle 0,5 m entfernt war?

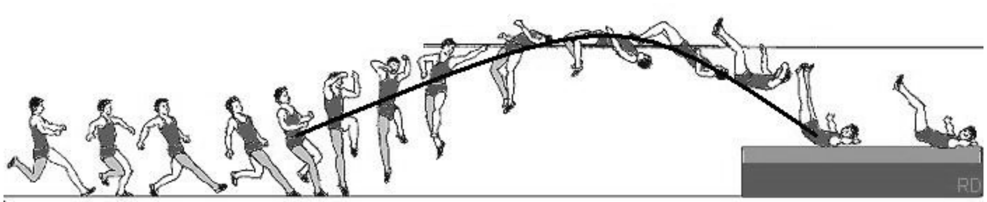
c. Welche Entfernung hatte der Springer von der Absprungstelle, als er wieder den Boden erreichte?

d. Berücksichtige nun, dass sich auf dem Boden eine Matte befindet, die den Springer auffängt. Die Matte hatte eine Höhe von 0,6 m. Welche Entfernung zur Absprungstelle ergibt sich dann?

Nachdem der 21-jährige die Goldmedaille für die Vereinigten Staaten von Amerika gewonnen hatte, wurde er wie ein Held gefeiert.

I. Problemsituation verstehen

Zunächst wurde mit Hilfe von Hochsprung-Fotographien erarbeitet, dass die Flugbahn des Hochspringers durch eine Parabel beschrieben werden kann. Zur Vereinfachung des mathematischen Modells wird anstelle des gesamten Springers nur der Körperschwerpunkt betrachtet. Die Schüler versuchen zunächst an einer Skizze, das Problem zu erfassen und können dann erkennen, welche Größen zur Lösung des Problems gegeben und welche gesucht sind.



II. Realmodell

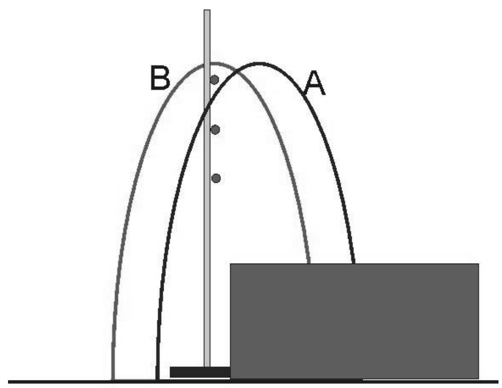
Mit Hilfe einer Skizze kann gezeigt werden, wie wichtig das Finden einer richtigen Absprungstelle für einen erfolgreichen Sprung ist. Bei einem zu spät vollzogenen Sprung (A) können lediglich zwei Latten überwunden werden, während bei einem optimalen Absprung (B) alle drei Latten übersprungen werden können.

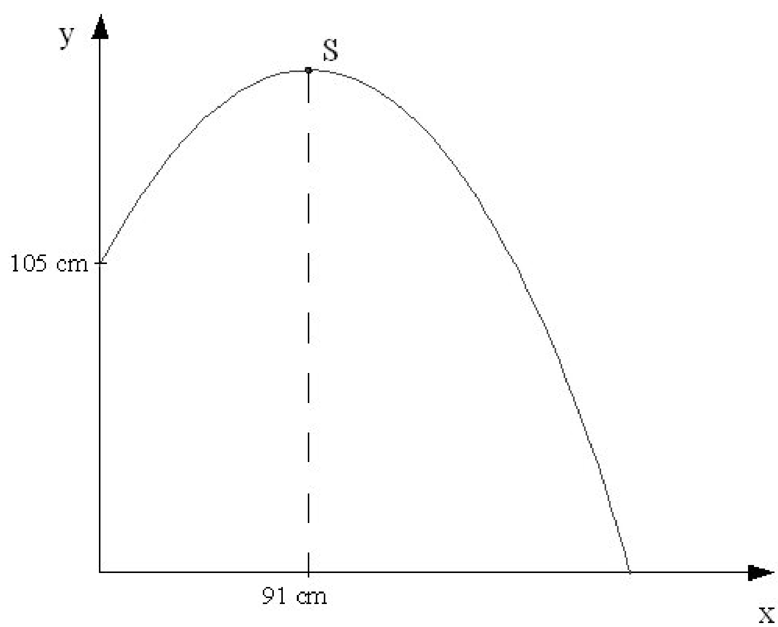
III. Mathematisches Modell

Zur Lösung wird die allgemeine Form einer quadratischen Funktion benötigt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Größen $a = -1,5$ und $c = 1,05$ können direkt aus der Aufgabenstellung abgelesen werden.





IV. Mathematische Berechnungen

Zur Bestimmung von Parameter b wird die Scheitelpunktsformel benötigt:

$$S\left(-\frac{b}{2a} \;\middle|\; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Da die x-Koordinate des Scheitelpunkts mit 91 cm bekannt ist, kann daraus b bestimmt werden zu $b = 2,73$.

Die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion lautet dann:

$$f(x) = -1,5x^2 + 2,73x + 1,05$$

(a) Die Sprunghöhe h entspricht der y-Koordinate des Scheitelpunkts. Es ergibt sich:

$$h = \frac{4ac - b^2}{4a} = 2,29 \text{ m}$$

Unter Berücksichtigung der Höhe der Sprunglatte erhält man für die Sprunghöhe 2.24 m.

(b) Eine Entfernung von $0,5$ m von der Absprungstelle bedeutet, dass $x = 0,5$ sein muss. Um diese Teilaufgabe zu lösen, müssen die Schüler erkannt haben, dass die Absprungstelle bei $x = 0$ liegt. Die Schüler berechnen also:

$$f(0,5) = -1,5 \cdot 0,5^2 + 2,73 \cdot 0,5 + 1,05 = 2,04 \text{ m}$$

Auch hier soll das Ergebnis anhand des Graphen überprüft werden.

(c) Die Schüler erkennen, dass der Springer den Boden dort erreicht, wo sich die Nullstelle der Funktion befindet. Mit der Lösungsformel werden die Nullstellen bestimmt:

$$x_1 = 2,15 \text{ m}$$

$$x_2 = -0,33 \text{ m}$$

(d) Die Sprungweite unter Berücksichtigung der Matte kann bestimmt werden, indem in die Funktionsgleichung $y = 0,6$ eingesetzt wird. Somit kann wieder die Lösungsformel verwendet werden:

$$0,6 = -1,5x^2 + 2,73x + 1,05$$

Zur Anwendung der Lösungsformel wird die Normalform benötigt:

$$0 = x^2 - 1,82x - 0.3$$

Als Lösungen erhalt man:

$$x_1 = 1,97 \text{ m}$$

$$x_2 = -0,15 \text{ m}$$

V. Mathematische Lösungsevaluation

Die Lösungen x_2 entfallen jeweils, da sie vor der Absprungstelle liegen und somit nicht möglich ist. Als eindeutige Lösungen für die Sprungweiten mit bzw. ohne Matte erhält man somit die Lösungen x_1.

VI. Reale Lösungsevaluation

Von entscheidender Bedeutung für die Unterrichteinheit ist die Motivation durch ein tatsächlich stattgefundenes sporthistorisches Ereignis. Außerdem sollte die Relevanz für den Sportler verdeutlicht werden. Es muss zunächst die optimale Absprungstelle gefunden werden, um sportlichen Erfolg erlangen zu können. Ferner wird während der Erarbeitung der Lösung die Fähigkeit entwickelt, unwichtige Informationen „auszublenden“. Dies ist besonders wichtig für die in höheren Klassenstufen folgenden noch komplexeren Aufgaben.

Welche Schiffe dürfen passieren?

Die Pfeiler der Tower Bridge sind von der Wasseroberfläche bis zum Grund der Themse 9 m tief. Da es sich um eine Zugbrücke handelt, können auch große Schiffe zwischen den beiden Hauptpfeilern passieren. Dazu wird der Straßenverkehr auf der Brücke unterbrochen und die beiden Brückenflügel werden angehoben. Kleine Schiffe dürfen auch den Raum zwischen Hauptpfeilern und Ufer nutzen, der jeweils 26 m breit ist. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass der Grund der Themse von den 9 m tiefen Pfeilern bis zum Ufer gleichmäßig bis zur Wasseroberfläche ansteigt.

Wie groß dürfen Schiffe höchsten sein, um die Brücke zwischen Hauptpfeilern und Ufer passieren zu dürfen?

I. Problemsituation verstehen

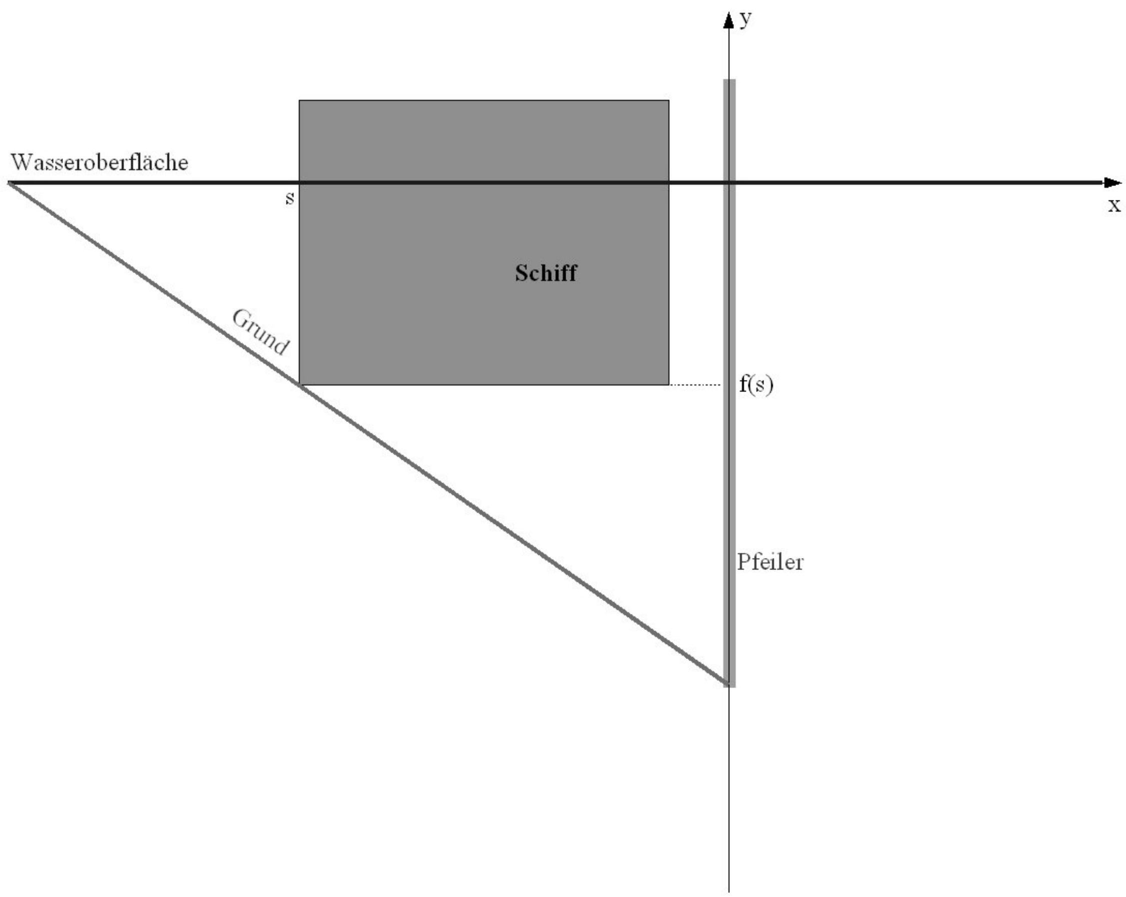
Da der zu betrachtende Wassergrund eine Schräge darstellt, dürfen sich die Schiffe nicht zu stark dem Ufer nähern. Der Abstand vom Ufer richtet sich zusätzlich nach der Position des Schiffes zwischen Ufer und Pfeiler.

II. Realmodell

Der Abstand zwischen Brücke und Wasseroberfläche wird bei den Berechnungen nicht berücksichtigt, da nur der Tiefgang, nicht aber die Höhe der Schiffe zu berechnen ist.

III. Mathematisches Modell

Der schräge Wassergrund kann mittels einer linearen Funktion beschrieben werden. Es sollte ein Sicherheitsabstandes von 1 m zum Pfeiler berücksichtigt werden. Die maximal mögliche Querschnittsfläche soll nun durch die Nutzung der linearen Funktion bestimmt werden.



IV. Mathematische Berechnungen

Die lineare Funktion hat die Form $f(x) = mx + n = -\frac{9}{26}x - 9$. Daraus ergibt sich folgende maximal mögliche Querschnittsfläche:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot \left(-\frac{9}{26}x - 9\right) \end{aligned}$$

Da die Nullstellen bei $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = -26$ liegt, muss die x-Koordinate des Scheitelpunktes $x_S = -13$ lauten. Da die Parabel nach unten geöffnet ist, stellt der Scheitelpunkt $S(-13 \mid -4,5)$ein Maximum dar. Der Flächeninhalt des Querschnitts beträgt somit $A = 58,5\ m^2$, wobei dies der Hälfte der Dreiecksfläche entspricht, die von Wasseroberfläche, Grund und Pfeiler gebildet wird.

V. Mathematische Lösungsevaluation

Bei Berücksichtigung des Sicherheitsabstandes zum Pfeiler verringert sich die maximal mögliche Fläche um $A_{sicher} = 1\ m \cdot 4,5\ m = 4,5\ m^2$ auf $A_{ges} = 54\ m^2$.

VI. Reale Lösungsevaluation

Im Unterricht muss mit den Schülern herausgestellt werden, dass die Verwendung eines Rechteckes als Querschnittsfläche des Schiffes eine grobe Näherung ist und individuelle Schiffstypen unberücksichtigt bleiben. Ferner sollte diskutiert werden, ob ein Sicherheitsabstand zum Grund der Themse in die Berechnungen hätte einbezogen werden müssen.

Ein computergesteuerter Springbrunnen

Die Computersteuerung eines Springbrunnens kann den Druck des aus der Düse austretenden Wassers variieren. Es wird intern die Bahnkurve der Wassertropfen berechnet, um sicherzustellen, dass die Tropfen auch bei starkem Wind innerhalb des Beckens auftreffen. Die Düse befindet sich in der Mitte des Wasserbeckens.

a) In welchen Bereichen des Beckens können die Wassertropfen des Springbrunnens auftreffen?

b) Welche größte Höhe erreichen die Tropfen? (Die Tropfen haben 1 m von der Düse entfernt bereits eine Höhe von 2 m überwunden.)

c) An welcher Stelle des Beckens erreichen die Wassertropfen die größte Höhe?

Daten des Springbrunnens:

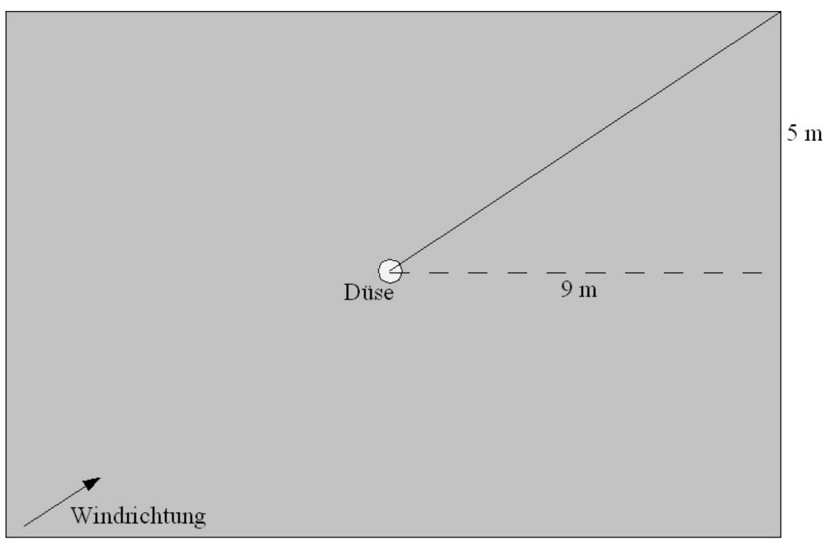
- Höhe der Düse: 20 cm
- Maße des Beckens: 10 $m \times 18$ m

I. Problemsituation verstehen

Bei Windstille entsteht als Flugbahn der Wassertropfen keine Parabel. Die dabei erreichte Höhe hängt von dem eingestellten Düsendruck ab, welcher für diesen Fall unbekannt ist.

II. Realmodell

Über den Düsendruck kann geregelt werden, dass die Wassertropfen innerhalb des Beckens auftreffen. Die maximal mögliche Parabel ergibt sich bei Wind aus Richtung einer der vier Ecken des Beckens.



III. Mathematisches Modell

Die Bahn der Wassertropfen soll durch eine Parabel beschrieben werden, die durch die Spitze der Düse verläuft und eine Nullstelle in einer der Ecken des Beckens hat. Die Funktionsgleichung hat dann die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Die dazugehörige Parabel soll durch die Punkte $P_1(s \mid 0)$, $P_2(1 \mid 2,2)$ und $P_3(0 \mid 0,2)$ verlaufen, wobei sich aus P_3 die Erkenntnis $c = 0,2$ ergibt.

IV. Mathematische Berechnungen

Die Entfernung s (Düse – Beckenecke) kann über den Satz des Pythagoras berechnet werden.

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{9^2 + 5^2} \\ &= 10,3 \end{aligned}$$

Somit kann folgendes Gleichungssystem aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 10,3^2 + b \cdot 10,3 + 0,2 \\ 2,2 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 0,2 \end{aligned}$$

Mit $a = 2 - b$ erhält man dann:

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - b) \cdot 10,3^2 + b \cdot 10,3 + 0,2 \\ -212,38 &= -95,79b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 2,22 \\ a &= -0,22 \end{aligned}$$

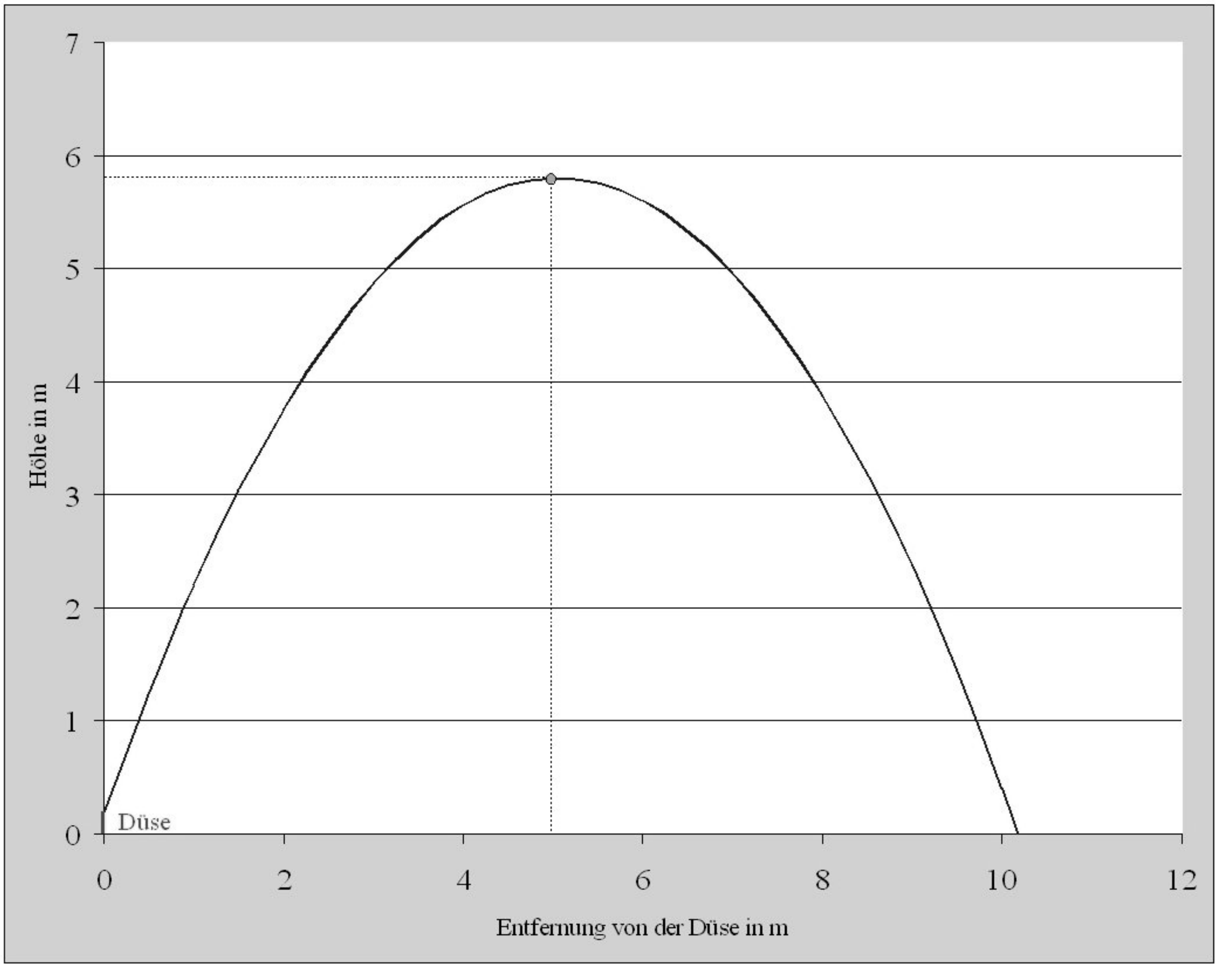
Die Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = -0,22x^2 + 2,22x + 0,2$

Als Mittelpunkt der Nullstellen kann die x-Koordinate des Scheitelpunktes bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 10,09x - 0,91 \\ x_{1/2} &= \frac{10,09}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10,09}{2}\right)^2 + 0,91} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 10,3 \\ x_2 &= -0,09 \end{aligned}$$

So ergibt sich der Scheitelpunkt $S(5,105 \mid 5,8)$.



V. Mathematische Lösungsevaluation

Die Wassertropfen erreichen also $5,105\ m$ von der Düse entfernt ihre maximale Höhe von $5,8\ m$.

VI. Reale Lösungsevaluation

Die Bedeutung der Nullstelle x_2 sollte diskutiert werden, da der zwischen dieser Nullstelle und der Düse verlaufende Parabelteil zwar existiert, aber dort nicht den Verlauf des Wassers beschreibt.

Notlandung

Flugzeuge eines bestimmten Flugzeugtyps fliegen bei Windstille mit einer Höchstgeschwindigkeit von $850\frac{km}{h}$. Aufgrund von Winden kann es zu Abweichungen der Ankunftszeiten kommen.

Beim Flug der Route Frankfurt a.M. — Washington muss diese Ankunftszeit innerhalb eines 90-Minuten-Zeitfensters liegen. Größere Abweichungen darf der Wind nicht verursachen, da sonst die Flugsicherheit gefährdet wäre. Es müsste zur Notlandung kommen.

a) Wie lange dauert der Flug mindestens, wie lange höchstens?
b) Berechne die maximal erlaubte Windgeschwindigkeit, bei der noch keine Notlandung erfolgen muss!
c) Überlege, welche weiteren Faktoren die Flugzeit beeinflussen können!

I. Problemsituation verstehen

Die Fluggeschwindigkeit ist vom herrschenden Wind abhängig, wobei zu große Windgeschwindigkeiten die Notlandung hervorrufen.

II. Realmodell

Die Entfernung Frankfurt a.M. — Washington kann mit 7000 km dem Altas entnommen werden. Die kleinste Geschwindigkeit wird bei Gegenwind, die größte bei Rückenwind registriert. Also werden im Folgenden diese beiden Extremfälle berücksichtigt.

III. Mathematisches Modell

Da die Fluggeschwindigkeit als konstant angenommen werden soll, erhält man die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} v + v_W &= \frac{s}{t - t_F} \\ v - v_W &= \frac{s}{t} \end{aligned}$$

IV. Mathematische Berechnungen

$$\begin{aligned} v + v_W &= \frac{s}{\frac{s}{v - v_W} - t_F} \\ &= \frac{s}{\frac{s - t_F + t_F v_W}{v - v_W}} \\ (v + v_W)(s - t_F v + t_F v_W) &= s(v - v_W) \\ 0 &= t_F v_W^2 + 2 s v_W - t_F v^2 \\ 0 &= v_W^2 + \frac{2s}{t_F} v_W - v^2 \\ v_{W1/2} &= -\frac{s}{t_F} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{t_F}\right)^2 + v^2} \\ v_{W1/2} &= -\frac{7000\ km}{1,5\ h} \pm \sqrt{\left(\frac{7000\ km}{1,5\ h}\right)^2 + \left(850\ \frac{km}{h}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{W1} &= 77\ \frac{km}{h} \\ v_{W2} &= -9410\ \frac{km}{h} \quad \rightarrow \text{entfällt} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit von 77 $\frac{km}{h}$ liefert eine Minimalzeit von $t_1 = 9\ h$(Gegenwind) bzw. eine Maximalzeit von $t_2 = 7,5\ h$(Rückenwind).

V. MATHEMATISCHE LÖSUNGSEVALUATION

Bei Seitenwinden wird der Wert für die Flugdauer zwischen $t_1 = 9\ h$ und $t_2 = 7,5\ h$ liegen.

VI. REALE LÖSUNGSEVALUATION

Der Flug könnte durch eine Zwischenlandung oder eventuelle Umwege beeinflusst werden, was die durchgeführten Berechnungen nicht berücksichtigen.

Ein lebenswichtiges Gerät: Das Radar

„Radar" ist ein Kurzwort für die englische Bezeichnung „radio detecting and ranging" und bedeutet, dass ein Objekt durch Funkwellen aufgefunden und die Entfernung bestimmt wird.

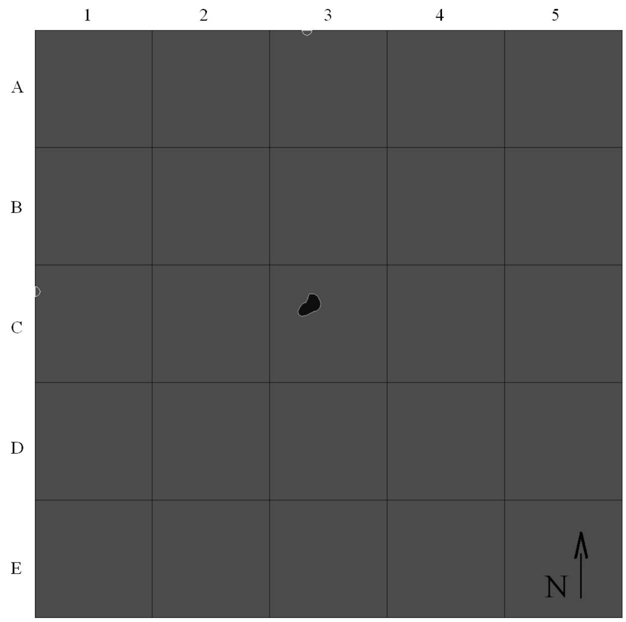
Ein Düsenjet (Typ A) tritt in A3 in das vom Radarschirm erfasste Gebiet ein, umfliegt auf schnellstem Wege einen in C3 befindlichen Felsen und tritt in C1 wieder aus dem Radarfeld aus.

Drei weitere Jets (Typ B) treten aus NO-Richtung in das Radarfeld ein und fliegen geradlinig in Richtung SW. Die drei Jets fliegen nebeneinander im gleichen Abstand von jeweils 500 m. Die Radar-Software berechnet automatisch, wie viele mögliche Kollisionspunkte mit dem Typ A – Jet existieren. Hierfür gibt die Software für jeden der drei Typ B – Jets eine andere Anzahl dieser möglichen Kollisionspunkte aus.

Wo befinden sich diese möglichen Kollisionspunkte?

I. PROBLEMSITUATION VERSTEHEN

Es kann nur dann zu Kollisionen kommen, falls die Jets auf der gleichen Höhe fliegen. Deshalb werden die berechneten Punkte als „mögliche" Kollisionspunkte bezeichnet.



II. Realmodell

Da Gerade und Parabel höchstens zwei Schnittpunkte haben können, müssen die drei Typ B -Jets mit der Route des Typ A - Jets keinen, einen und zwei mögliche Kollisionspunkte besitzen.

III. Mathematisches Modell

Es bietet sich an, den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitelpunkt der Flugkurve des Typ A - Jets zu legen.

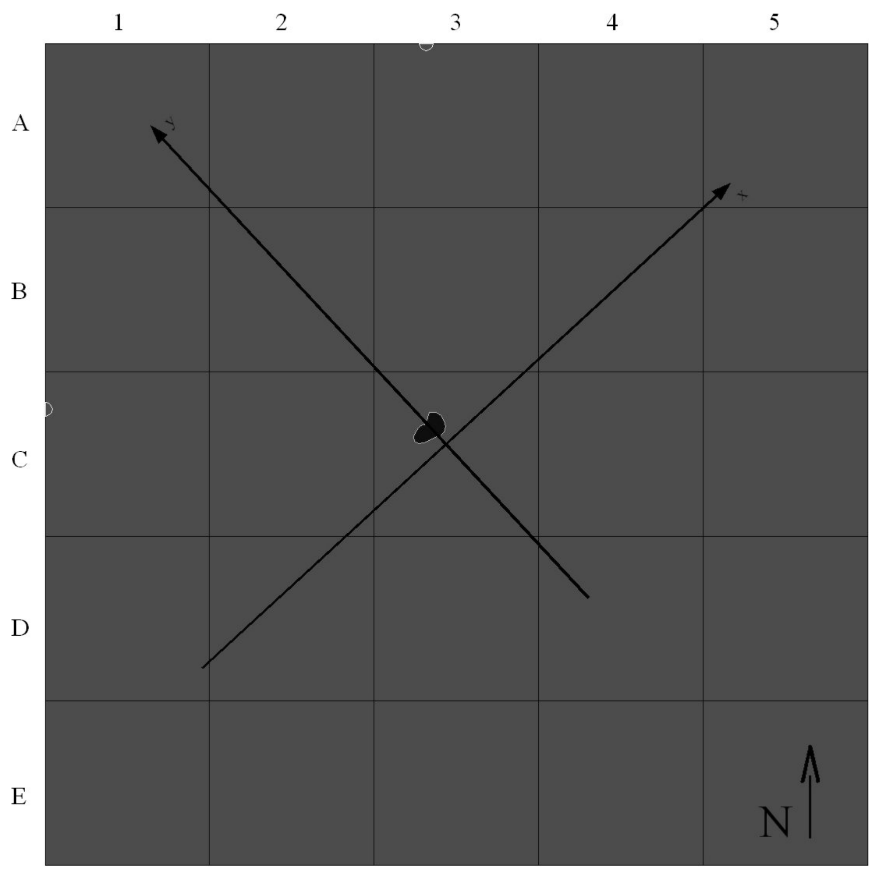
Aus geeigneten Punkten des Radars können nun die Funktionsgleichungen der Flugbahnen aufgestellt werden.

Typ A:

Es ergibt sich $f(x) = ax^2$ mit dem aus dem Koordinatensystem abgelesenen Eintrittspunkt $P(1580 \mid 1840)$. Analog hätte der Austrittspunkt aus dem Radarfeld gewählt werden können.

$$\begin{aligned} 1840 &= a \cdot 1580^2 \\ a &= 0,0007 \end{aligned}$$

$$f(x) = 0,0007 \cdot x^2$$



Typ B:

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= 500 \\
g_2(x) &= 0 \\
g_3(x) &= -500
\end{aligned}
$$

IV. Mathematische Berechnungen

Mögliche Kollision 1:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g_1(x) \\
0,0007 \cdot x^2 &= 500 \\
x_{1/2} &= \pm 845 \\
\Rightarrow & \quad P_1(845 \mid 500) \quad P_2(-845 \mid 500)
\end{aligned}
$$

Mögliche Kollision 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= g_2(x) \\ 0,0007 \cdot x^2 &= 0 \\ x &= 0 \\ \Rightarrow & \quad P_3(0 \mid 0) \end{aligned}$$

Mögliche Kollision 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= g_3(x) \\ 0,0007 \cdot x^2 &= -500 \\ x \notin \mathbb{R} &\Rightarrow \text{kein Kollisionspunkt} \end{aligned}$$

V. MATHEMATISCHE LÖSUNGSEVALUATION

Die Schnitte zwischen der quadratischen und den linearen Funktionen liefern erwartungsgemäß zwei (P_1 und P_2), eine (P_3) und keine Lösung.

VI. REALE LÖSUNGSEVALUATION

Die Flugbahn vom Typ A - Jet kann als Parabel angenommen werden, da der Jet nicht den kürzesten Weg (geradlinig), sondern den schnellsten Weg fliegt. Um nicht am Felsen abbremsen zu müssen, ist eine möglichst gleichmäßig verlaufende Kurve zu wählen, was durch die Parabel approximativ erreicht wird.

Literatur

[1] Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefle, Ul., Schneider, P. S., Tillmann, K.-J. u. Weiß, M., *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*, Opladen: Leske + Budrich, 2001

[2] Blum,W., Leiß, D., *Modellieren lernen mit der „Tanken“-Aufgabe*, mathematik lehren No. 128, 2004

[3] Keune, M., *Niveaustufenorientierte Herausbildung von Modellbildungskompetenzen, Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hildesheim Franzbecker, 2004

[4] Maaß, K., *Mathematisches Modellieren im Unterricht-Ergebnisse einer empirischen Studie Hildesheim*, Franzbecker, 2004

[5] Marxer, M., *Validieren lernen*, PM 47.Jg. No.3, 2005

[6] *Rahmenrichtlinien Gymnasien Mathematik*, LSA 2004

[7] OECD - Deutsches PISA-Konsortium, *Schülerleistungen im internationalen Vergleich*, Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, 2000

[8] Henning, H., Keune, M., *Modellbildung und Tabellenkalkulation*, Mathematik in der Schule 38, Heft 3, Pädagogischer Zeitschriftenverlag, 2000

[9] Henning, H., Keune, M., *Diskrete Modellbildung und Tabellenkalkulation*, Der Mathematikunterricht 47, Heft 3, 2001

[10] Henning, H., Keune, M., *Modelling and Spreadsheet Calculation*, Proceedings of the Second Internatinal Conference of the Teaching of Mathematics, 2002

[11] Heymann, H.W. *Allgemeinbildung und Mathematik*, Beltz, 1996

[12] Keune, M., *Modelling and Spreadsheet Calculation*, Mathematical Modelling in Education and Culture: ICTMA 10, 2003

[13] Lamon, S.J. *Mathematical Modelling and the Way the Mind Works*, Teaching and Learning Mathematical Modelling, Chichester: Albion Publishing, 1997

Bildnachweis

Kartenausschnitte USA: *Der große Weltatlas, Knaur*
Sonstige Fotos: *www.pixelquelle.de*