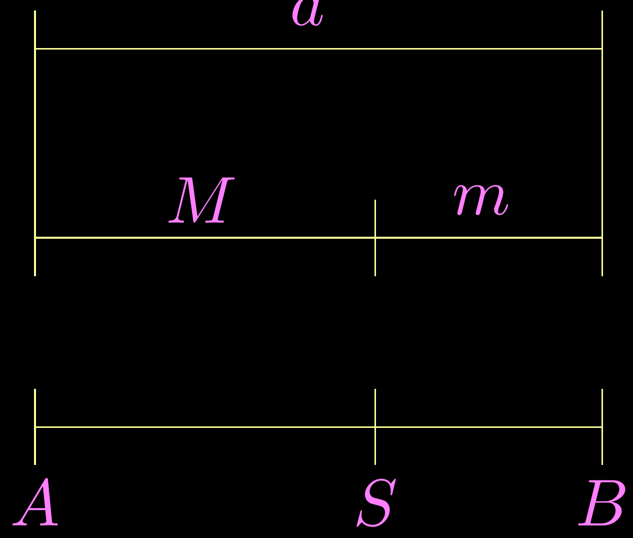
Goldener Schnitt – Faszination des Schönen in Arithmetik und Geometrie

Prof. Dr. Herbert Henning, Christian Hartfeldt
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
eMail: herbert.henning@mathematik.uni-magdeburg.de

Grundlagen zum Goldenen Schnitt

Definition (Goldener Schnitt). *Sei* a *die Länge der Strecke* $\overline{AB}$. *Ein Punkt* S *teilt diese im Goldenen Schnitt, falls sich die größere Teilstrecke (Major* M*) zur kleineren (Minor* m*) verhält wie die Gesamtstrecke zum größeren Teil:*

$$M : m = a : M.$$



Die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen bildet die Verhältniszahl $\mu = \frac{M}{m}$.

Um diese Zahl mathematisch exakt zu bestimmen, benutzen wir obige Definition und ersetzen dabei die Gesamtstrecke a durch den Ausdruck $(M + m)$. Dann gilt

$$x = (M + m) : M.$$

Nach weiteren mathematischen Umformungen erhält man die Gleichung $0 = x^2 - x - 1$, denn

$$\begin{aligned}
x &= \frac{M+m}{M} \\
x &= \frac{M}{M} + \frac{m}{M} \\
x &= 1 + \frac{m}{M} \quad \left(\text{aus } x = \frac{M}{m} \text{ folgt } \frac{1}{x} = \frac{m}{M}\right) \\
x &= 1 + \frac{1}{x} \\
x^2 &= x + 1 \\
x^2 - x &= 1 \\
x^2 - x - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Nach Anwendung der bekannten p-q-Formel ergeben sich als Lösungen für die quadratische Gleichung $0 = x^2 - x - 1$ folgende zwei Werte

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Für die charakteristische Verhältniszahl des Goldenen Schnitt's ergibt sich somit die positive Zahl

$$\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339\ldots.$$

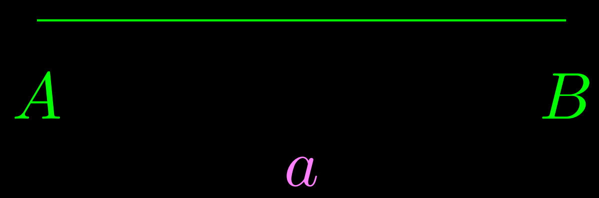
Mit diesem Wert lässt sich nun die Proportion gegebener Streckenpaare prüfen oder die Lage von Teilungspunkten berechnen.

Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.

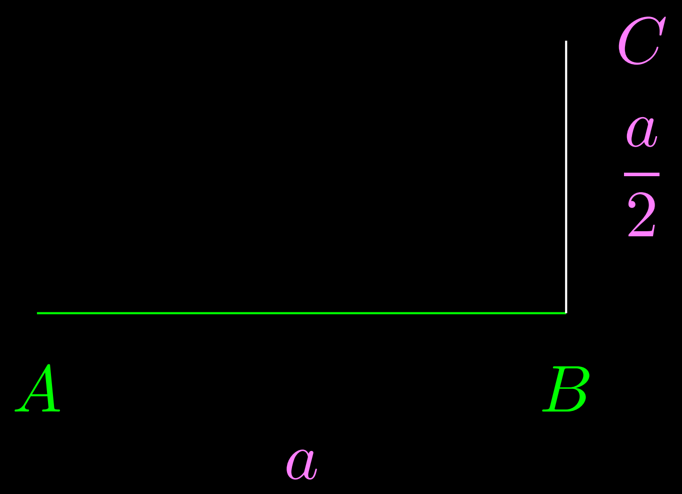
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



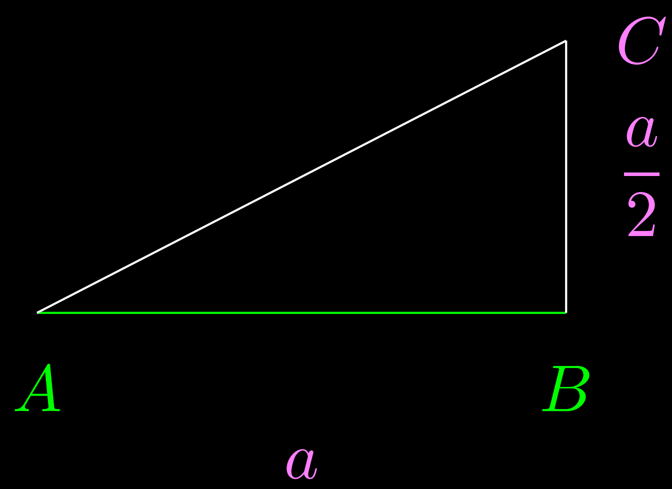
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



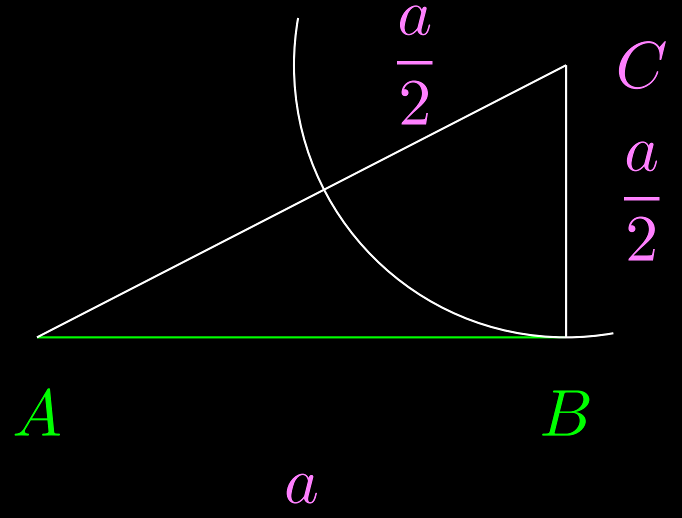
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



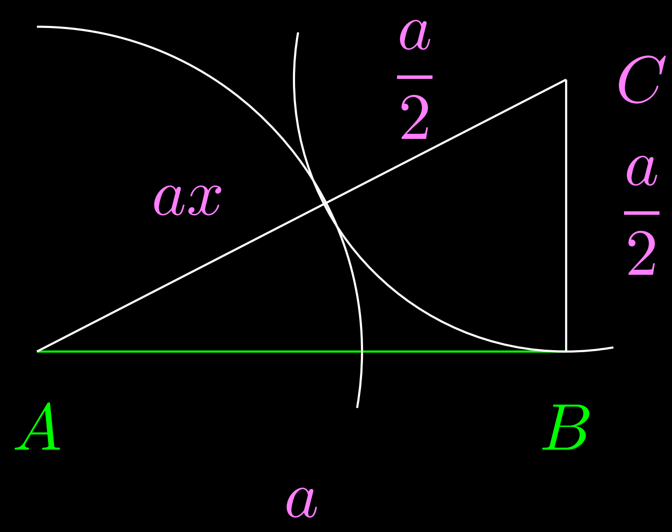
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



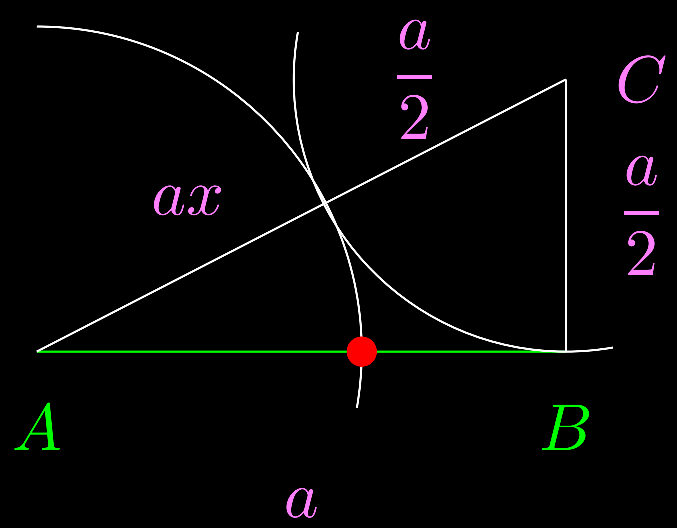
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



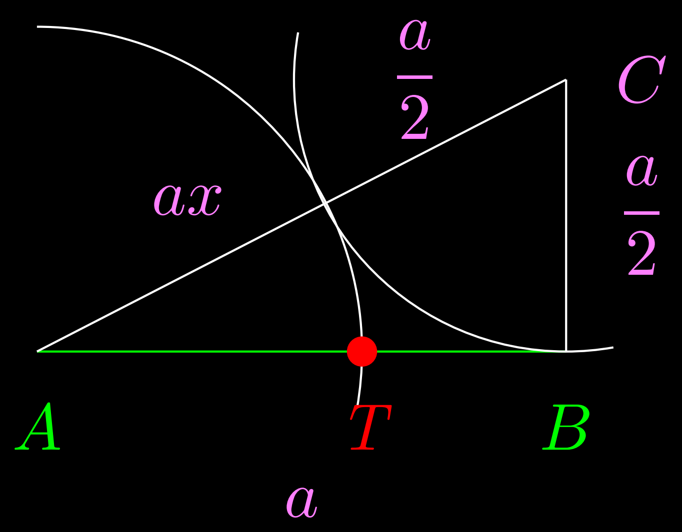
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke $\overline{AB}$ soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



Begründung: $\overline{AT} = ax$. Nach dem Pythagoras im Dreieck ABC folgt

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(ax + \frac{a}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow a^2 = a^2x^2 + a^2x \quad \Big| : a^2$$

$$1 = x^2 + x \text{ oder } x^2 + x - 1 = 0$$

das ist genau die Bestimmungsgleichung für σ. Damit erhält man

$$\overline{AT} : \overline{AB} = \sigma a : a, \text{ also } \overline{AT} : \overline{AB} = \sigma.$$

∎

Die Goldene Schnittzahl μ

Die Proportion der stetigen Teilung $1 : x = x : (1 + x)$ ergibt die quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Deren positive Lösung $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398875\ldots$ ist die Goldene Schnittzahl μ. μ erfüllt die Bedingung

$$\mu^2 = \mu + 1, \tag{1}$$

denn

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1.$$

Multipliziert man die Gleichung (1) mit μ^n, erhält man

$$\mu^{n+2} = \mu^{n+1} + \mu^n.$$

Diese Gleichung hat die Struktur einer Rekursionsformel der Fibonacci-Folge. Mit ihrer Hilfe lassen sich beliebige Potenzen von μ linearisieren:

$$
\begin{aligned}
\mu^0 & = 1 \\
\mu^1 & = \mu \\
\mu^2 = \mu^1 + \mu^0 & = \mu + 1 \\
\mu^3 = \mu^2 + \mu^1 & = 2\mu + 1 \\
\mu^4 = \mu^3 + \mu^2 & = 3\mu + 2 \\
\mu^5 = \mu^4 + \mu^3 & = 5\mu + 3 \\
\mu^6 = \mu^5 + \mu^4 & = 8\mu + 5
\end{aligned}
$$

Das Quadrat von μ hat demnach die merkwürdige Eigenschaft, die gleichen Dezimalen zu haben, wie die Zahl μ selbst. Gleiches gilt auch für ihren reziproken Wert $\frac{1}{\mu}$:

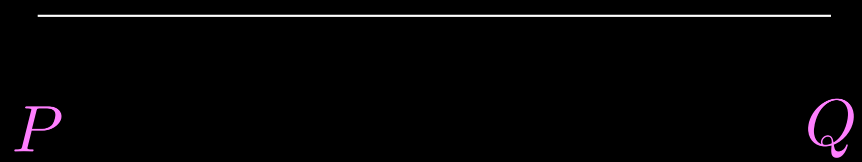
$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\ldots = \mu - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Es gilt somit auch:

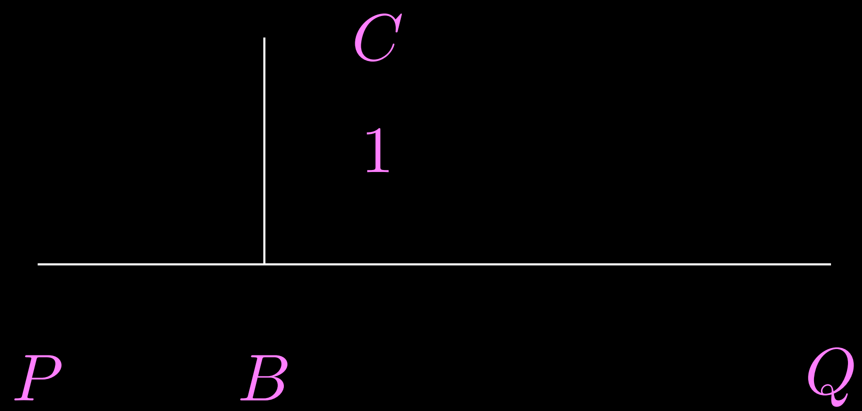
$$\mu + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}.$$

Konstruktion von σ und μ

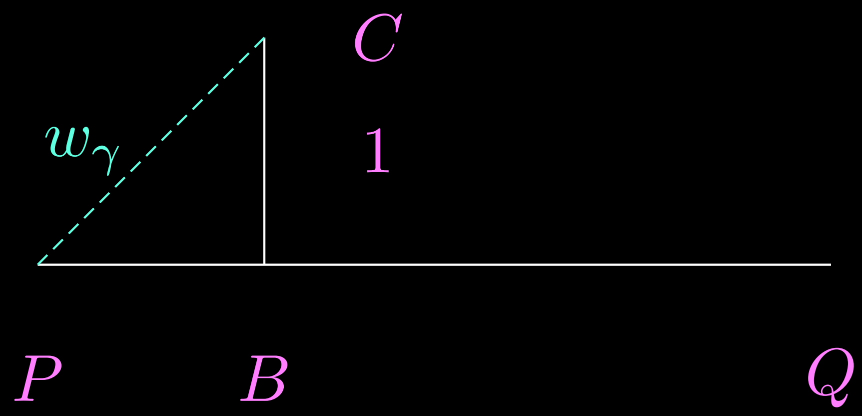
Konstruktion von σ und μ



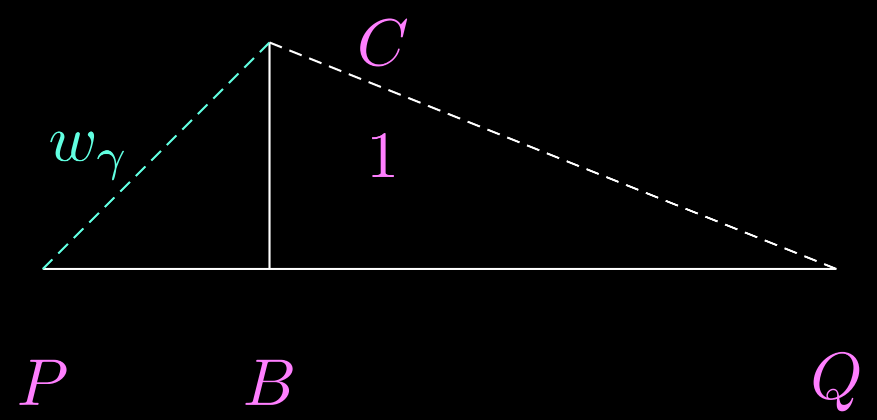
Konstruktion von σ und μ



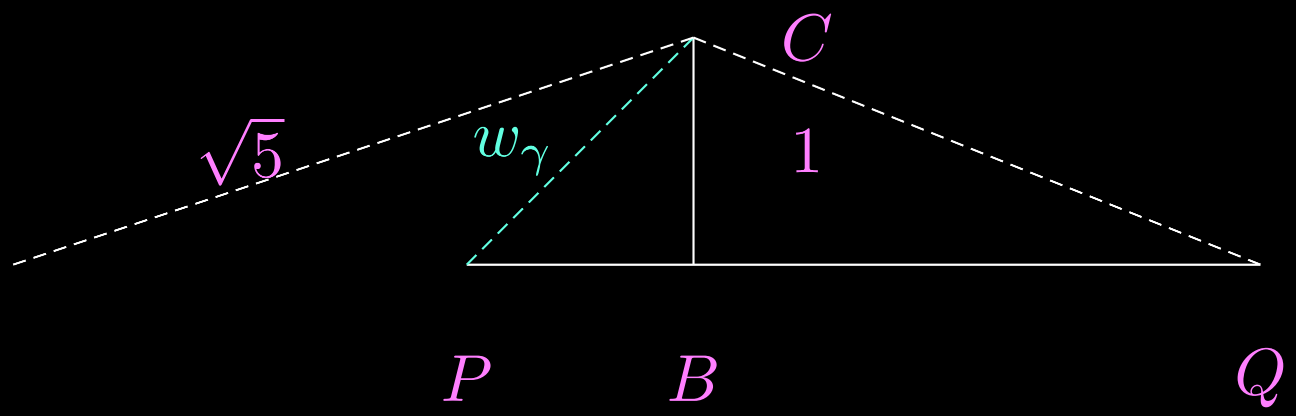
Konstruktion von σ und μ



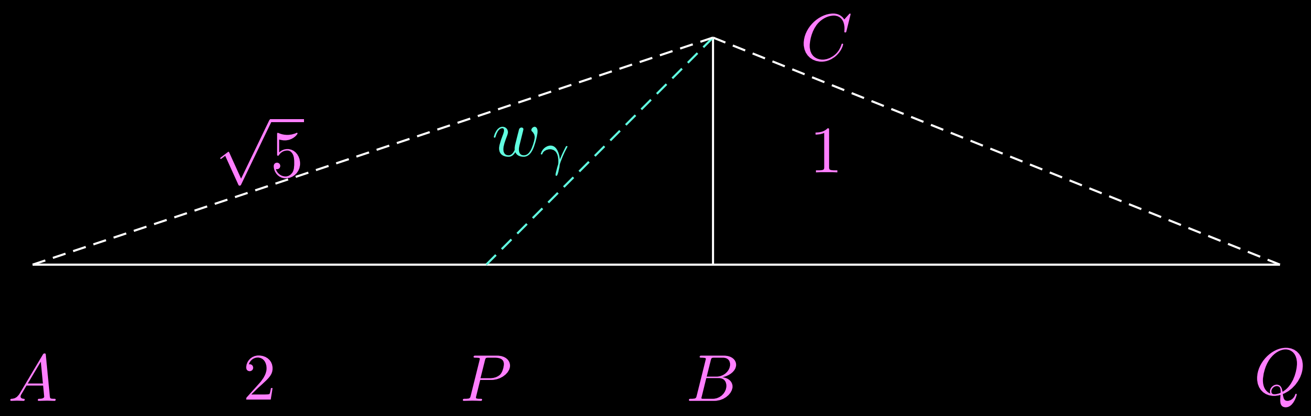
Konstruktion von σ und μ



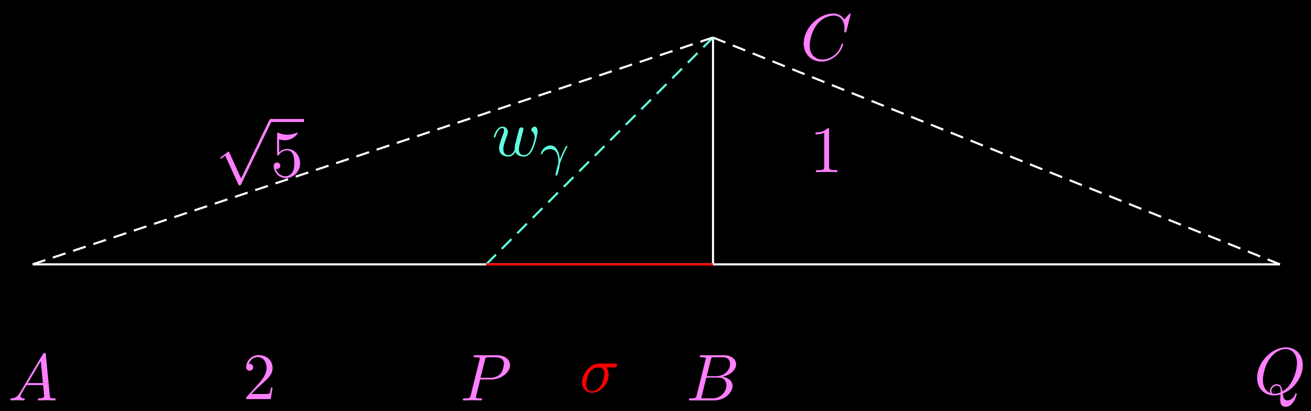
Konstruktion von σ und μ



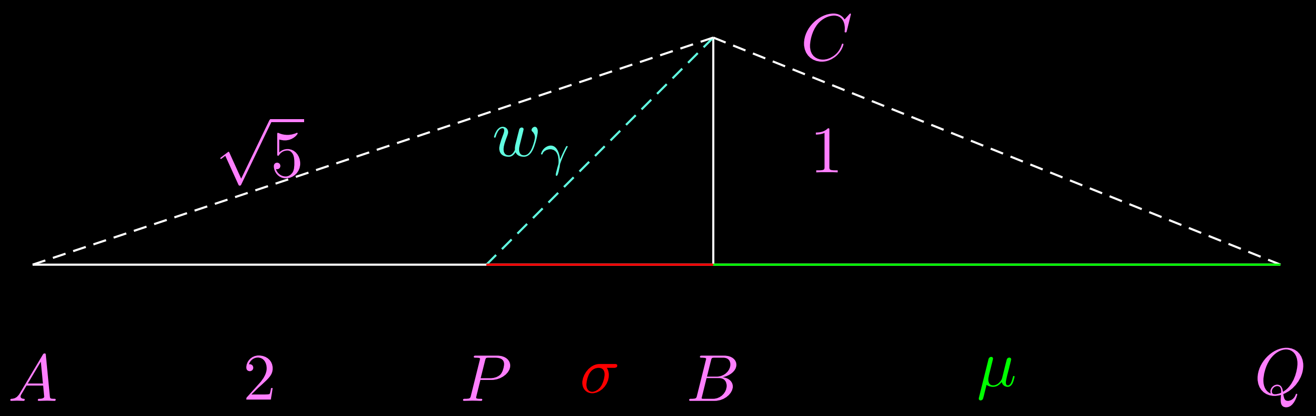
Konstruktion von σ und μ



Konstruktion von σ und μ



Konstruktion von σ und μ



Begründung: Nach Pythagoras ist $\overline{AC} = \sqrt{5}$. Die Winkelhalbierende w_γ teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis der anliegenden Seiten. Mit $\overline{PB} = x$ ergibt sich

$$\frac{x}{2-x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \longleftrightarrow \sqrt{5}x = 2 - x \iff x(\sqrt{5}+1) = 2$$

$$\iff x = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sigma.$$

Q teilt $\overline{AB}$ außen im selben Verhältnis. Mit $\overline{QB} = y$ ergibt sich

$$\frac{y}{2+y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \longleftrightarrow \sqrt{5}y = 2 + y \iff y(\sqrt{5}-1) = 2$$

$$\iff y = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \mu.$$

$\blacksquare$

Goldenes Rechteck

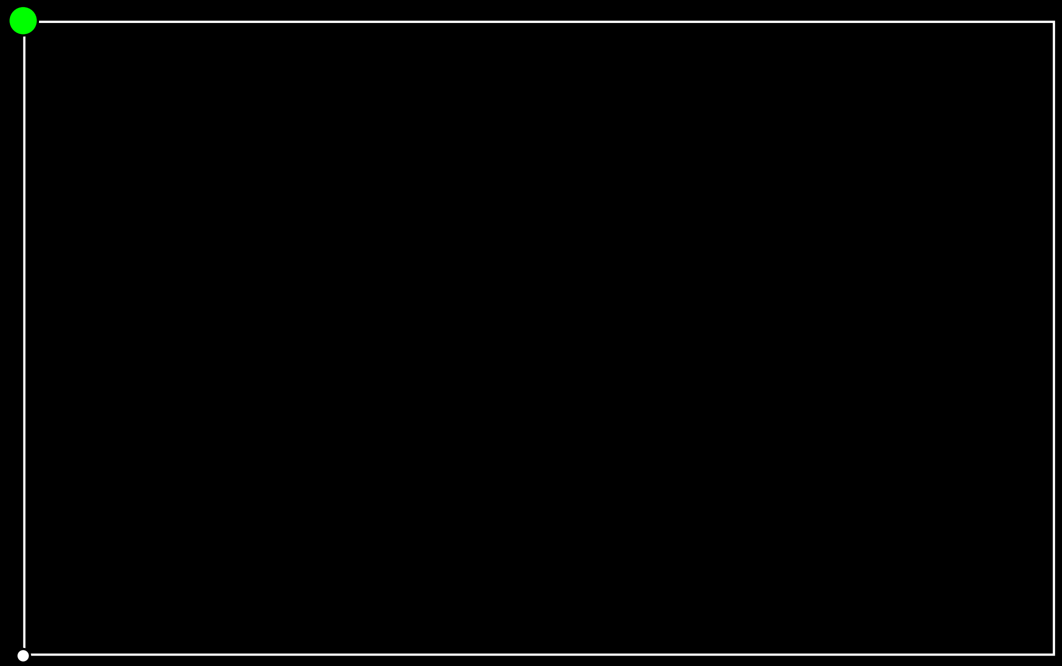
Wird ein Goldenes Rechteck in ein Quadrat und ein übriggebliebenes (kleineres Goldenes) Rechteck aufgeteilt und dieser Vorgang mehrfach wiederholt, so entsteht eine Punktfolge, die sich durch eine spiralförmige Linie verbinden lässt, die Goldene Spirale. Es handelt sich dabei um eine logarithmische Spirale, deren Behandlung (wegen des dabei notwendigen Rückgriffs auf Polarkoordinaten) in der Mittelstufe allerdings ungünstig ist. Eine brauchbare Näherung stellt die von Kepler gezeigte Viertelkreisfolge dar.

Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.

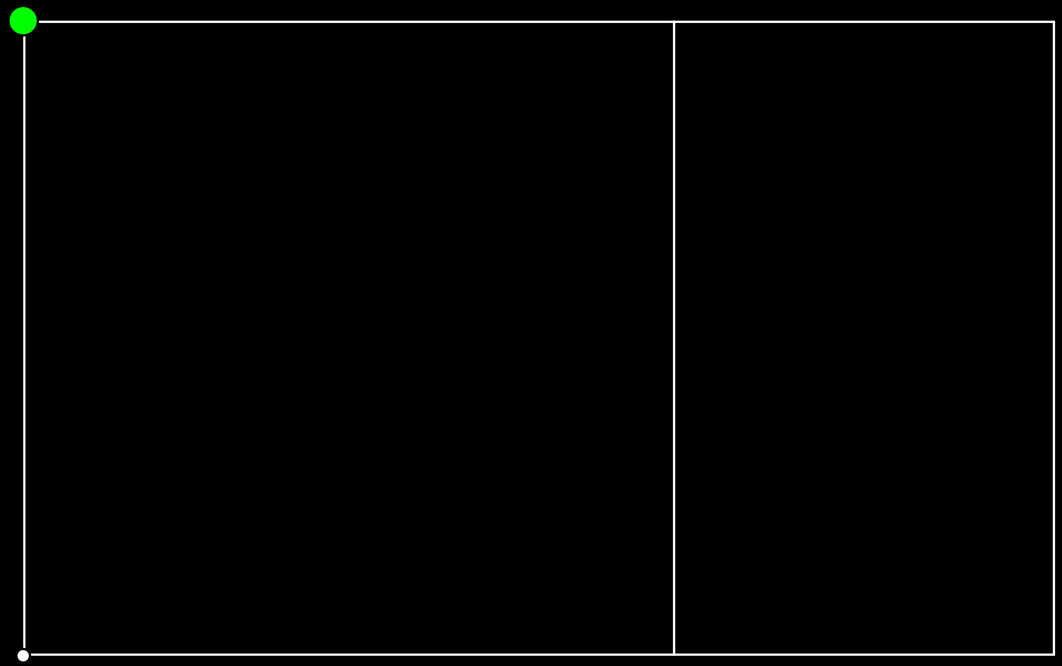
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



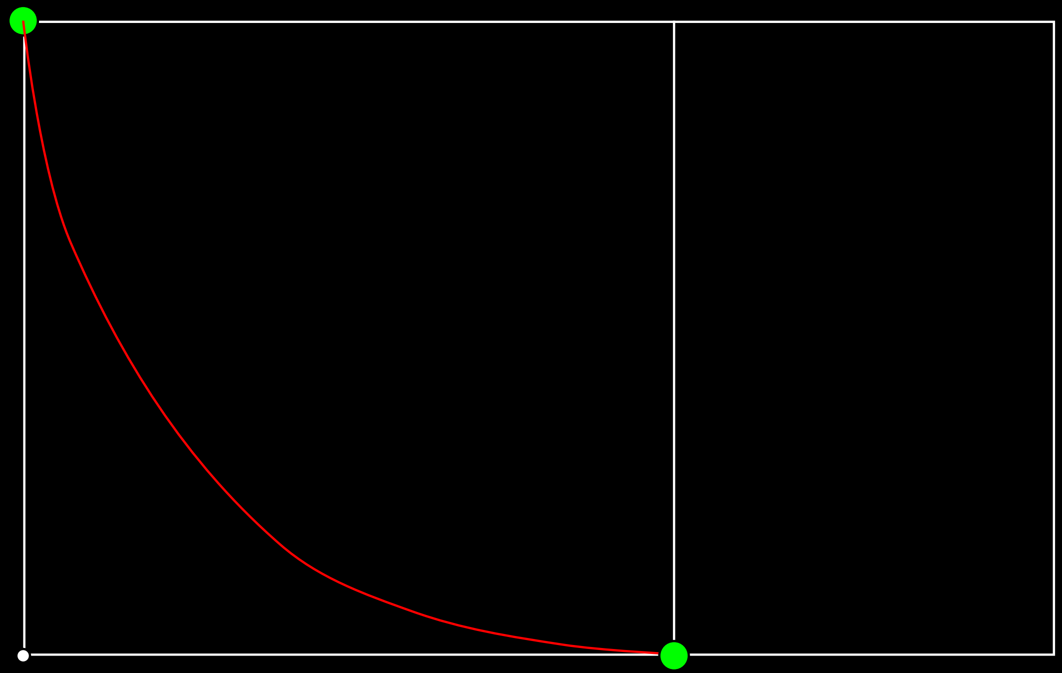
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



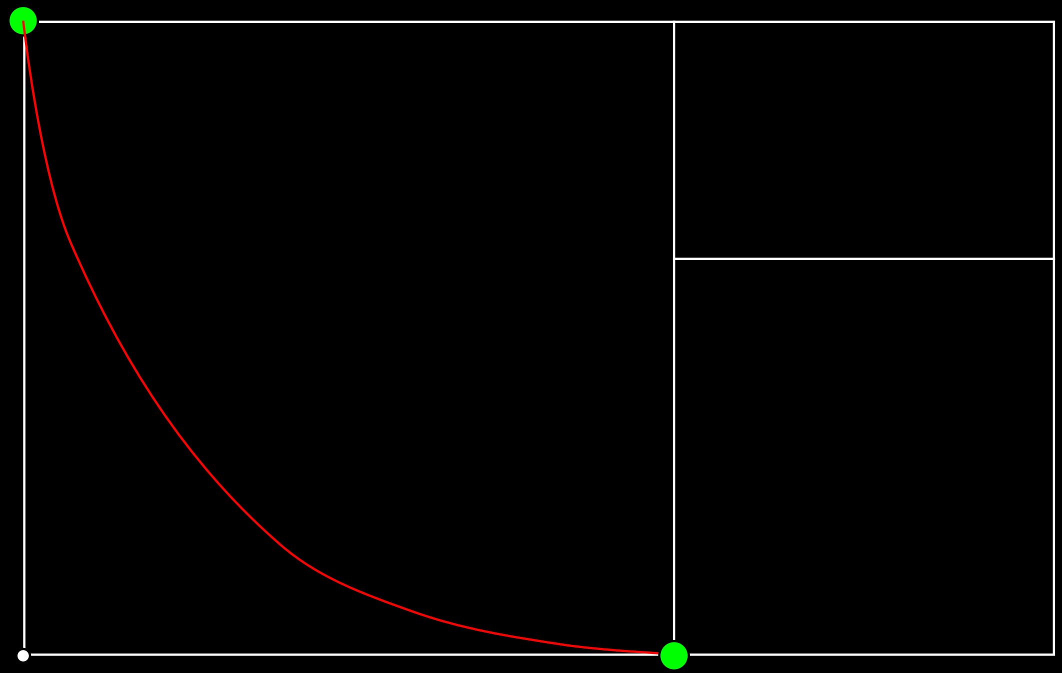
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



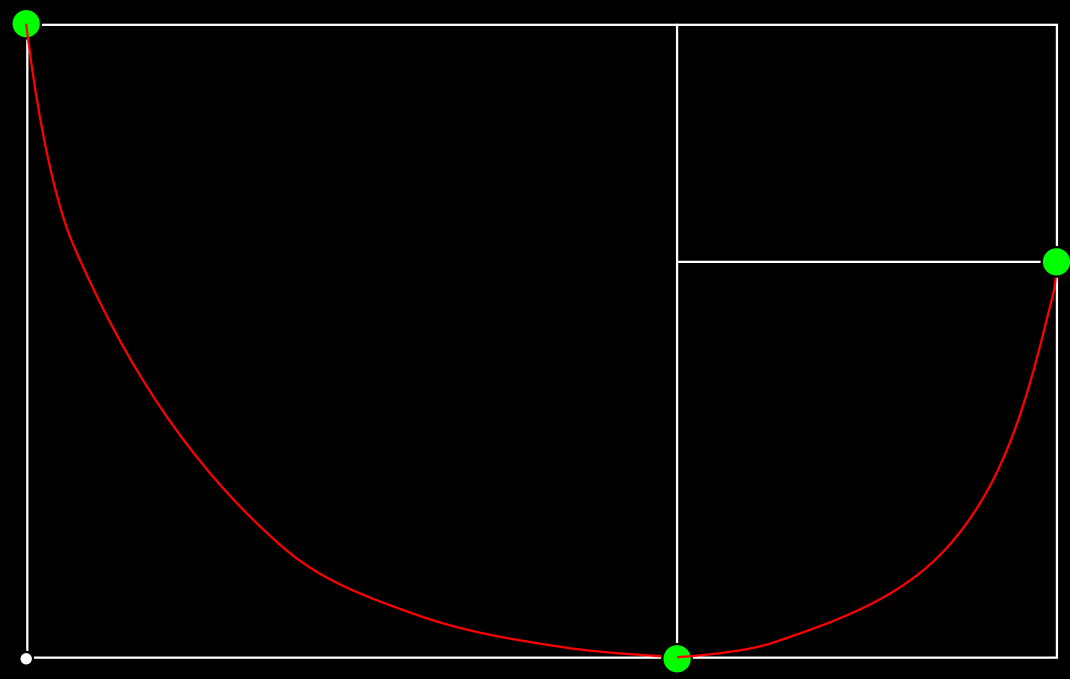
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



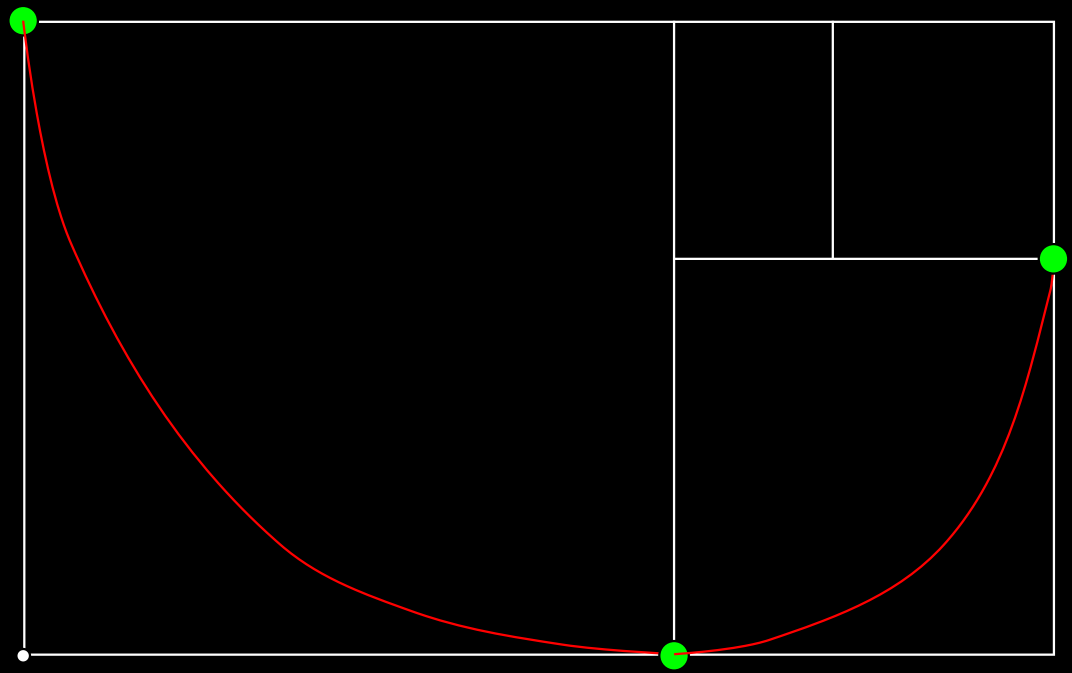
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



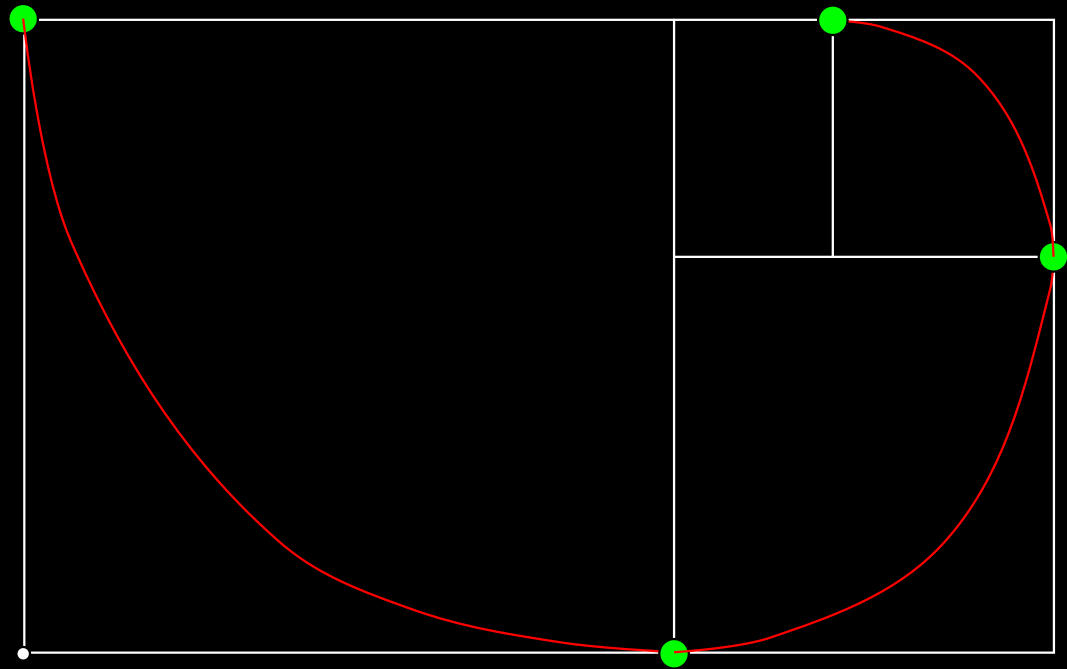
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



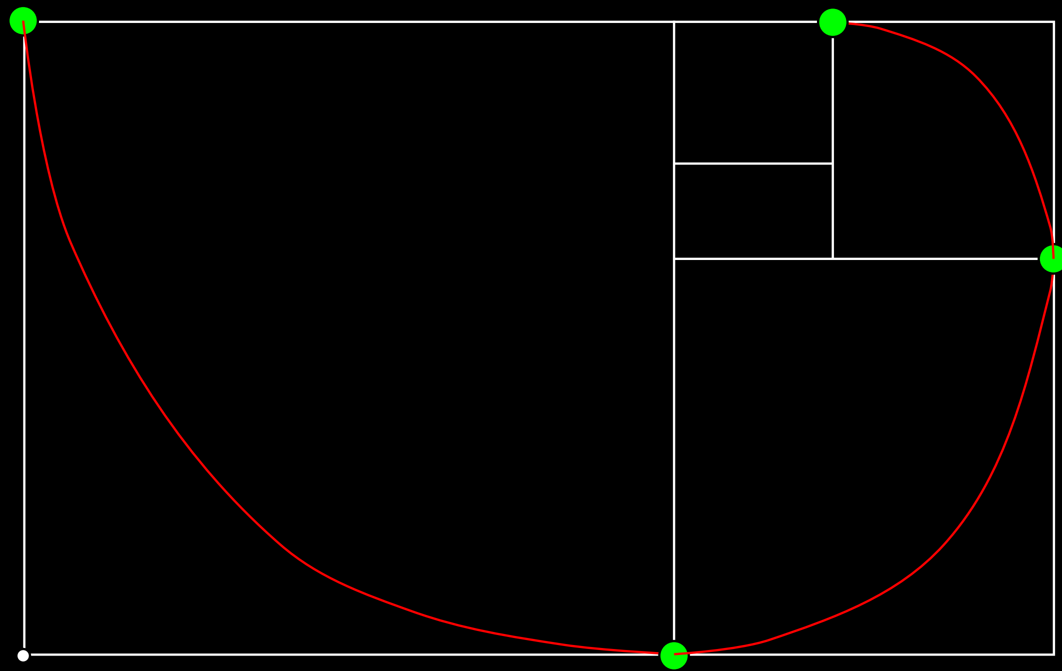
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



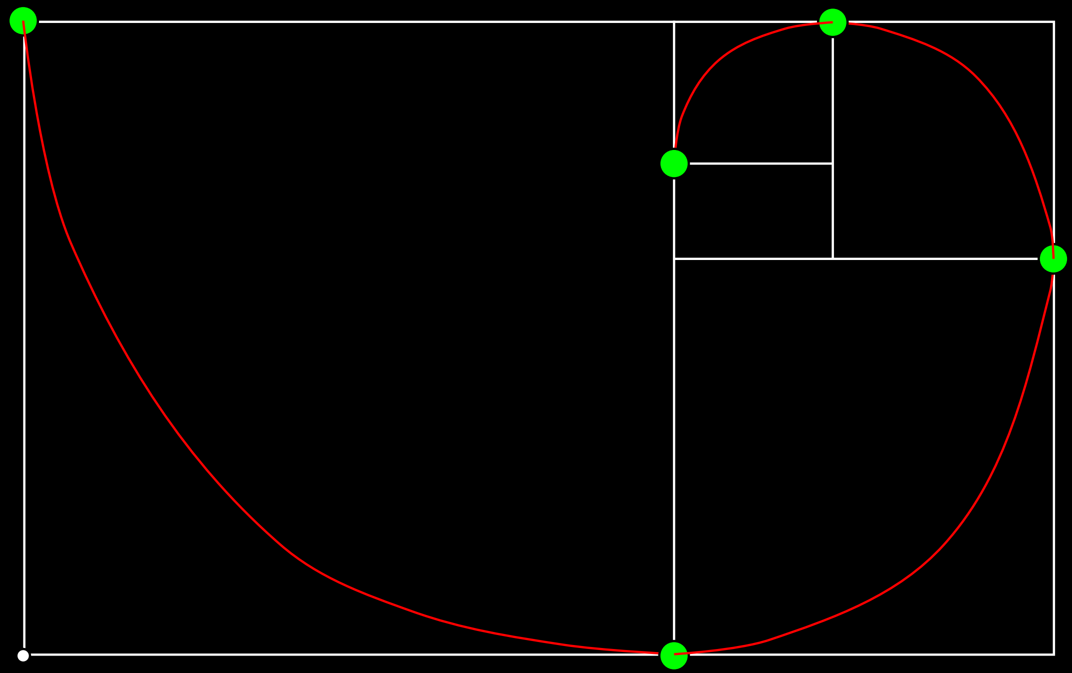
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



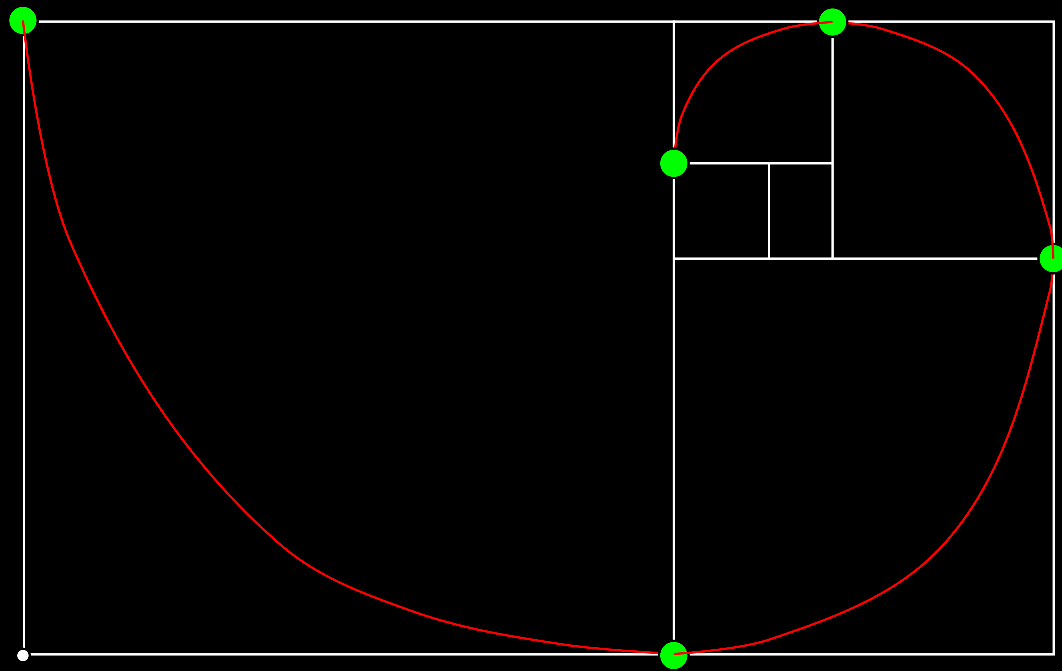
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



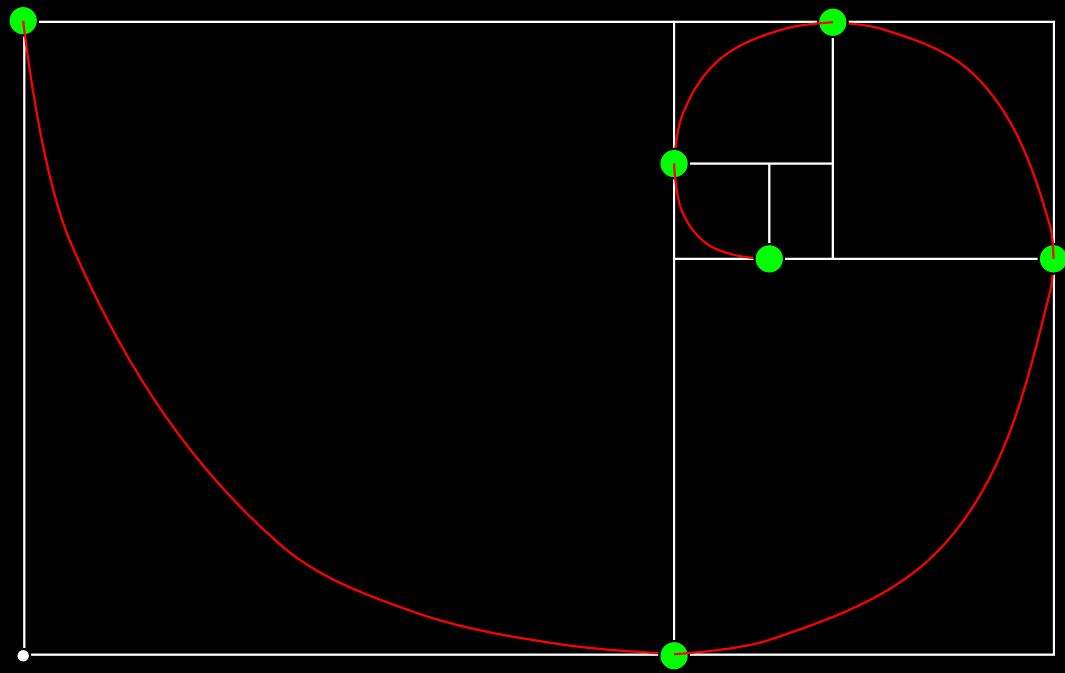
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



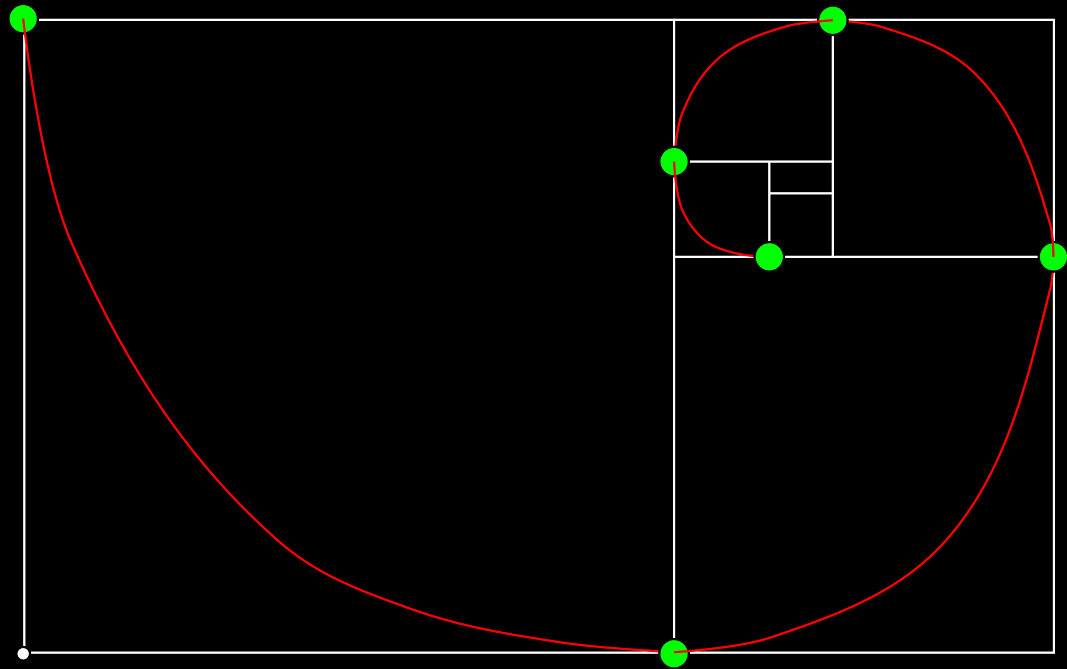
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



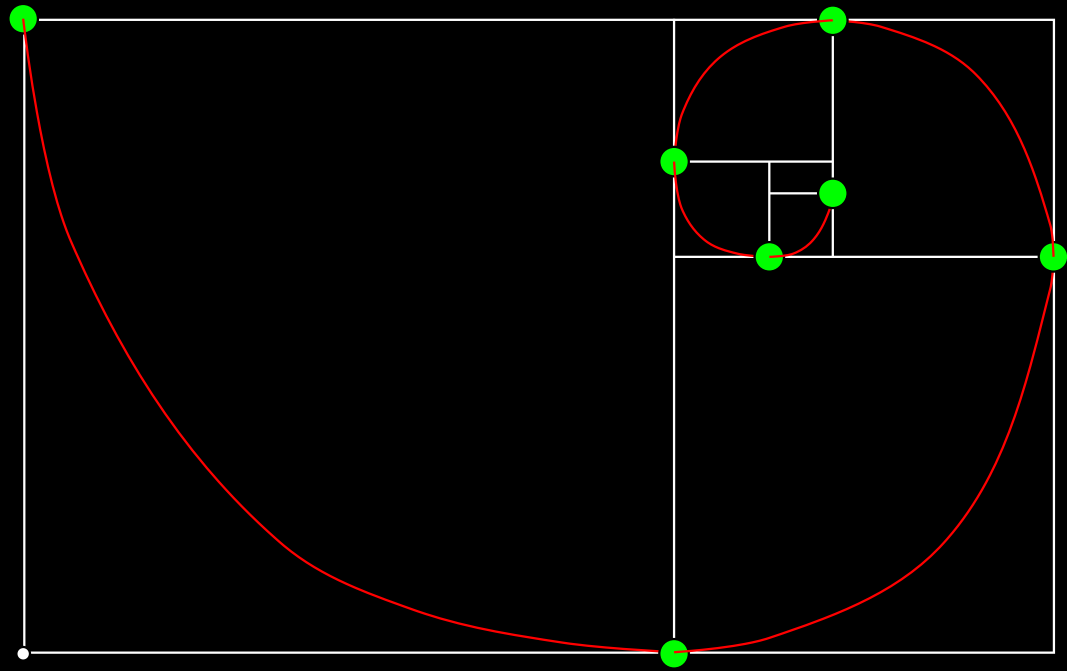
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



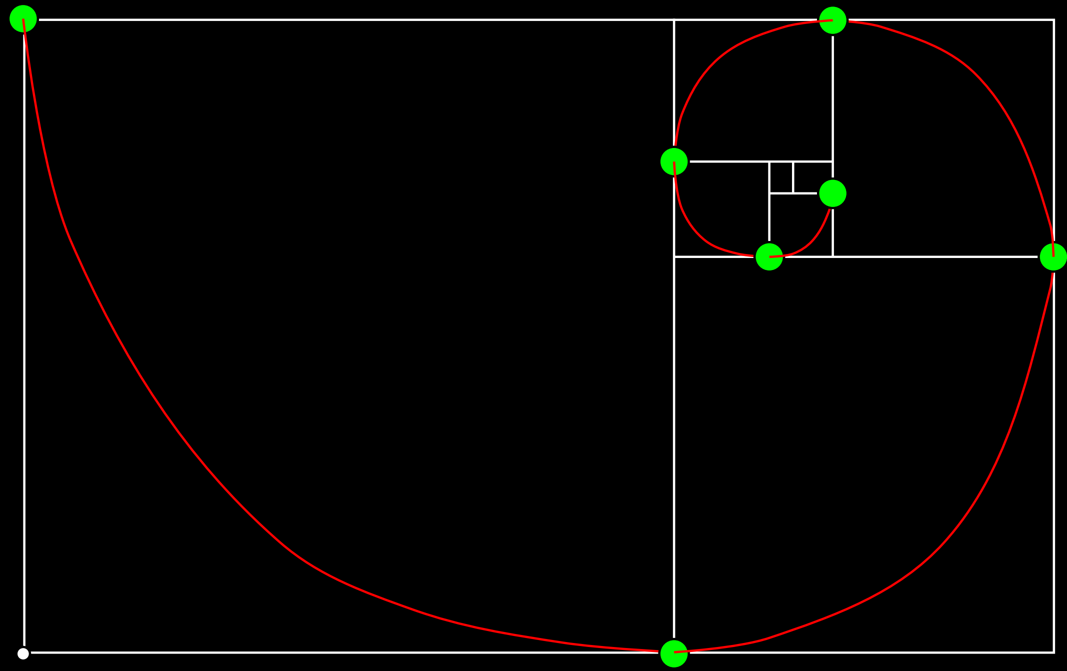
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



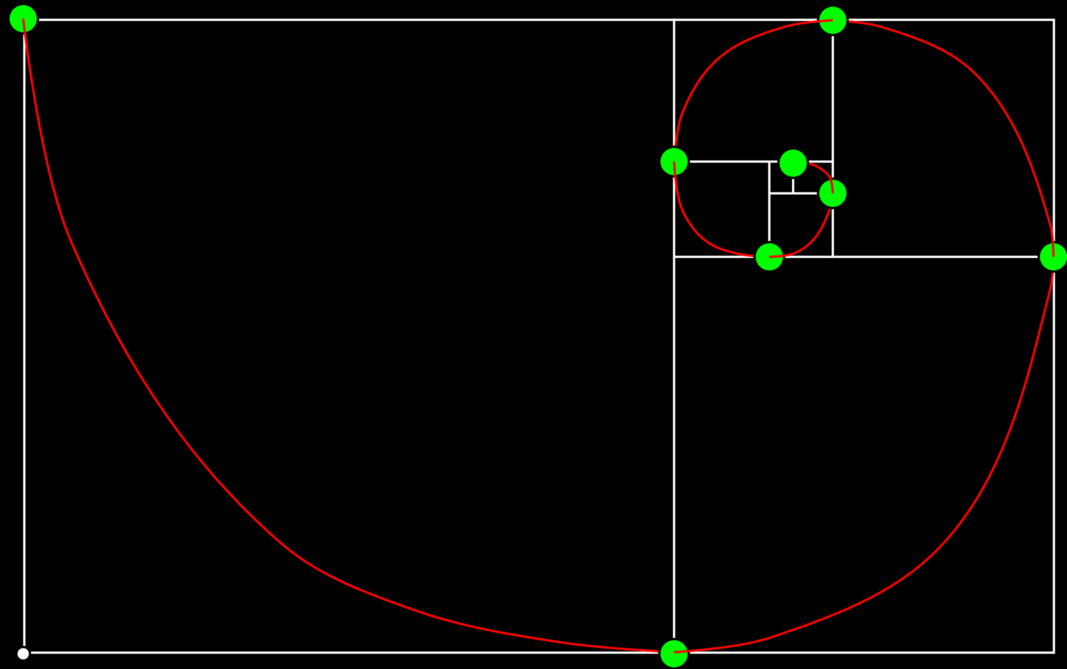
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.

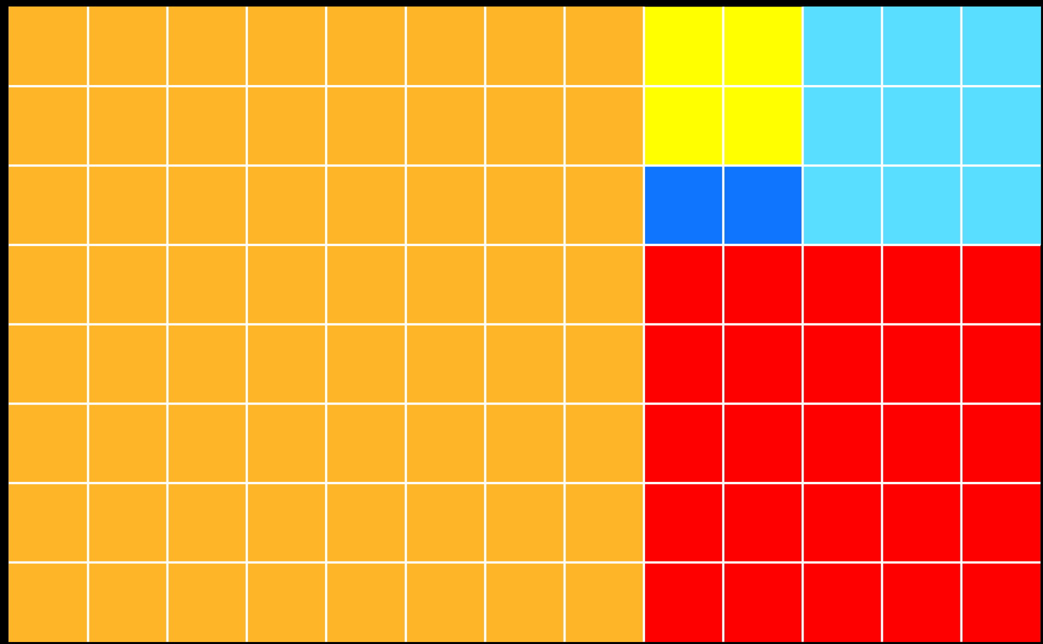


Bilder zum Goldenen Rechteck

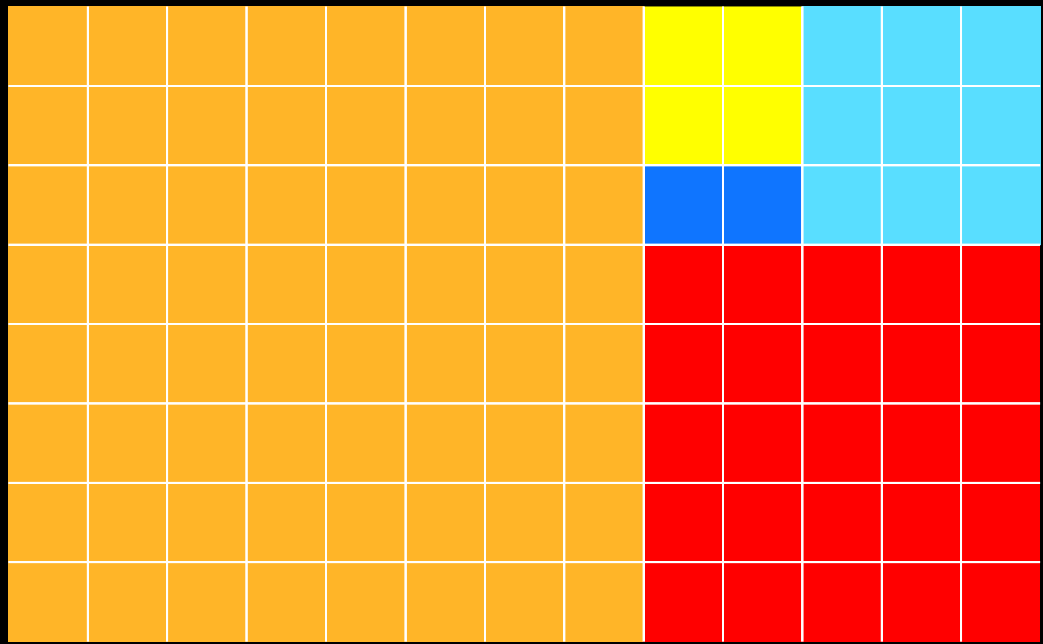
Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



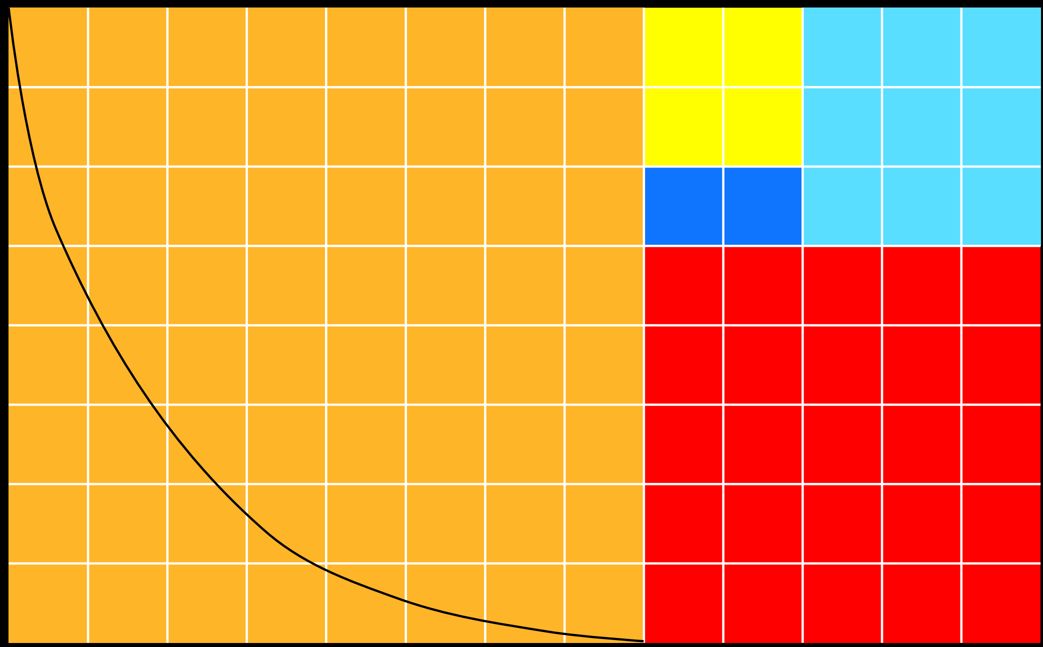
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



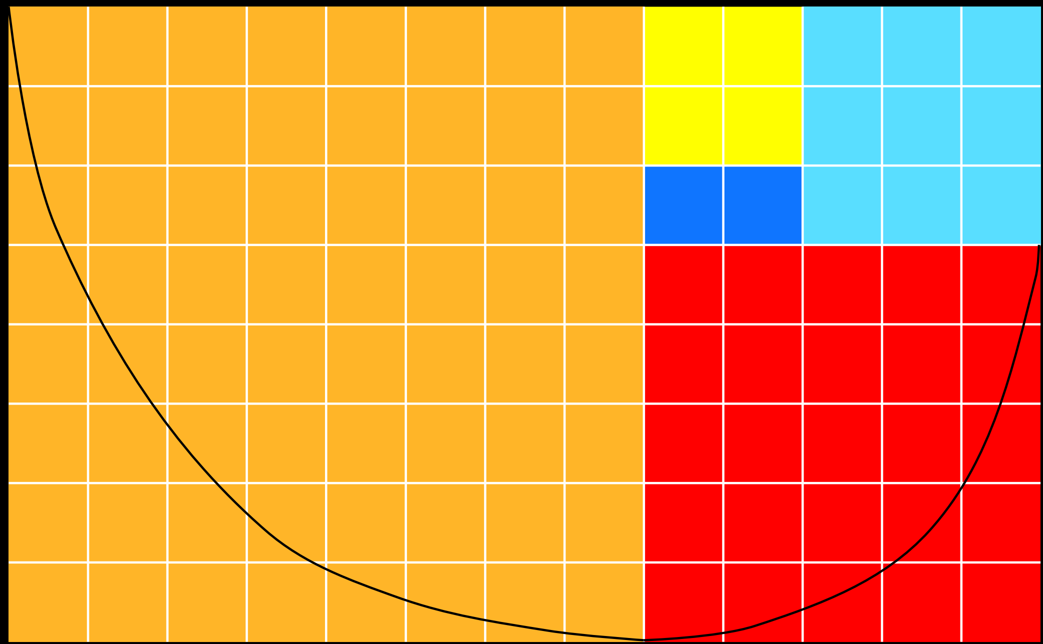
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



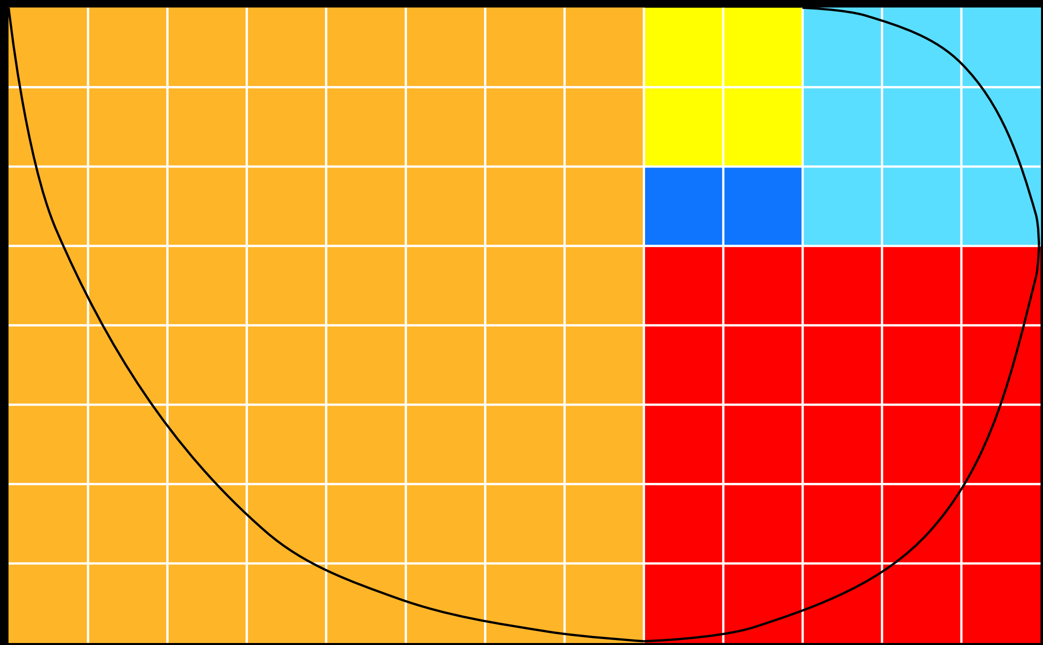
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



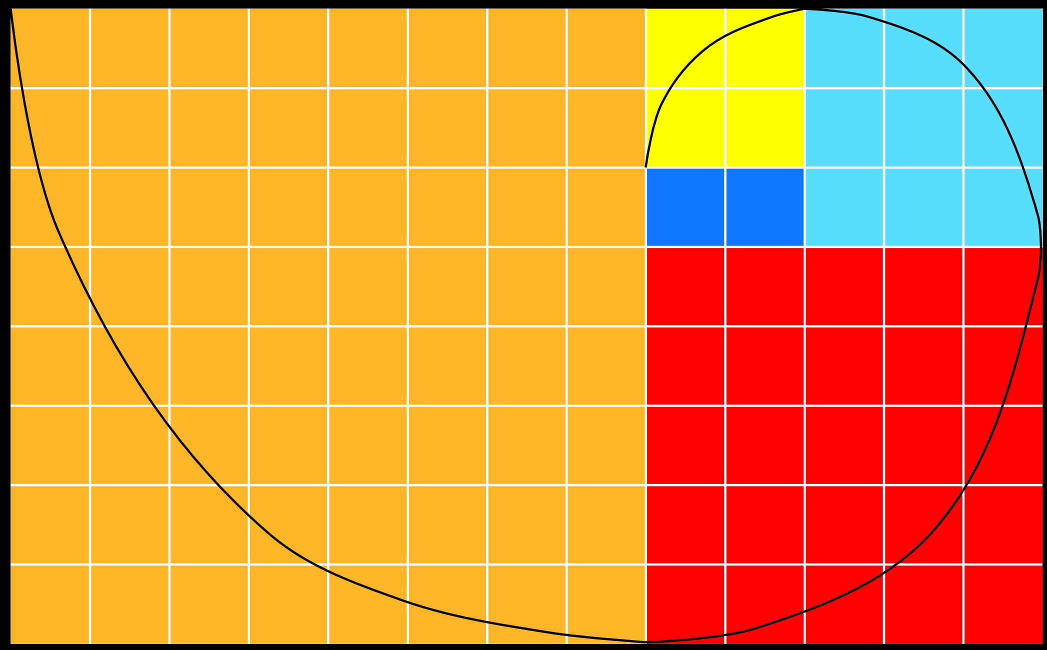
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



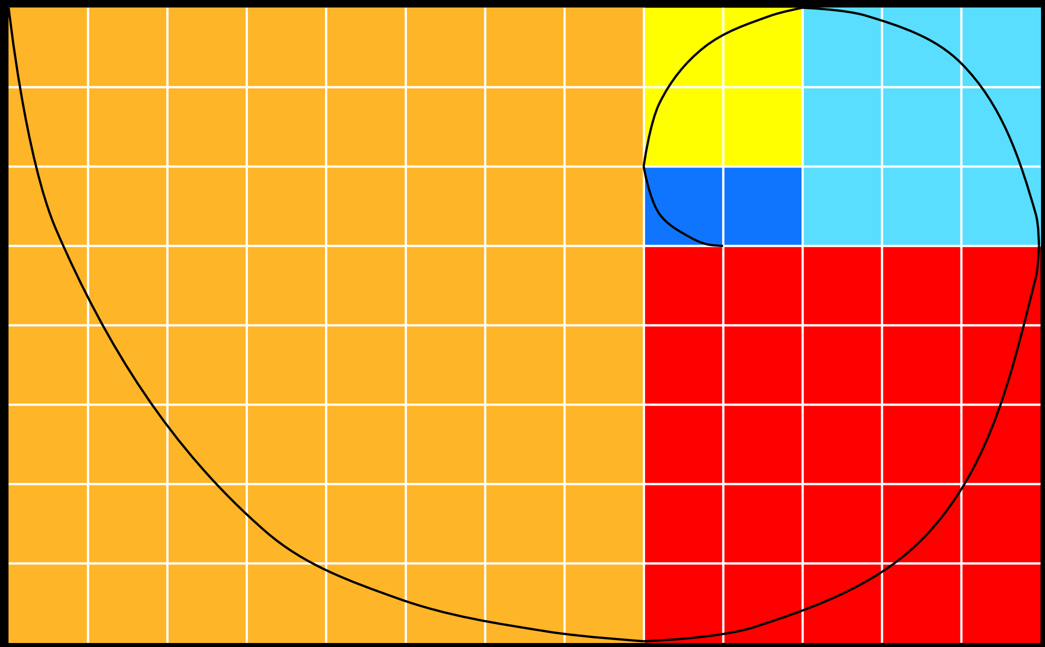
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



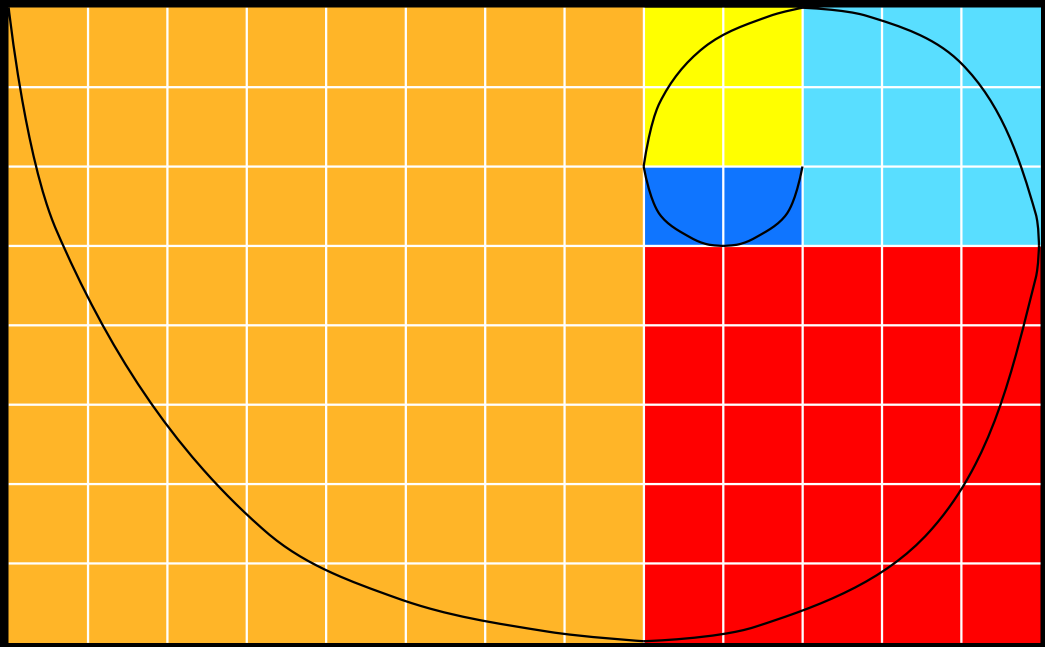
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



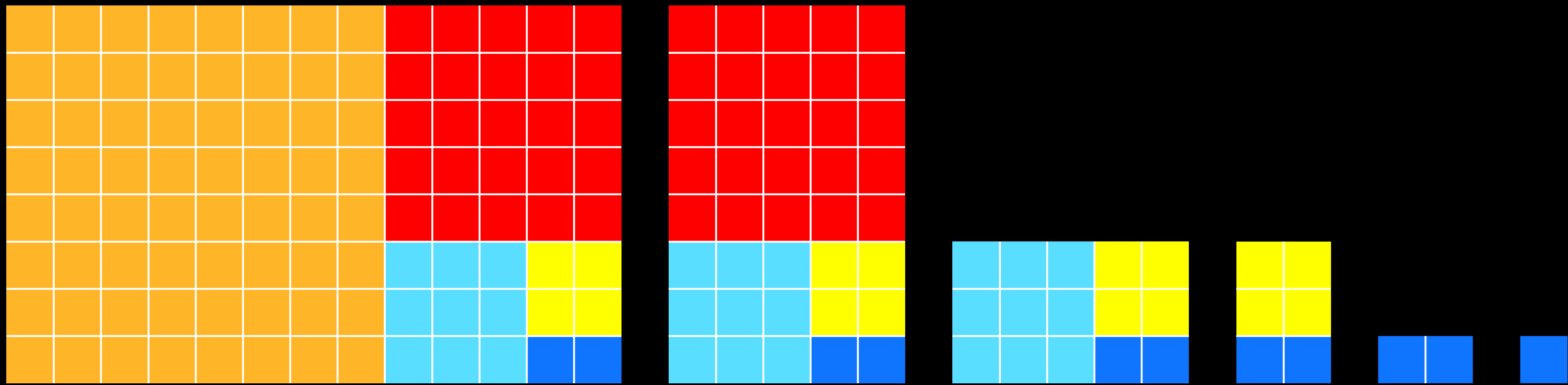
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



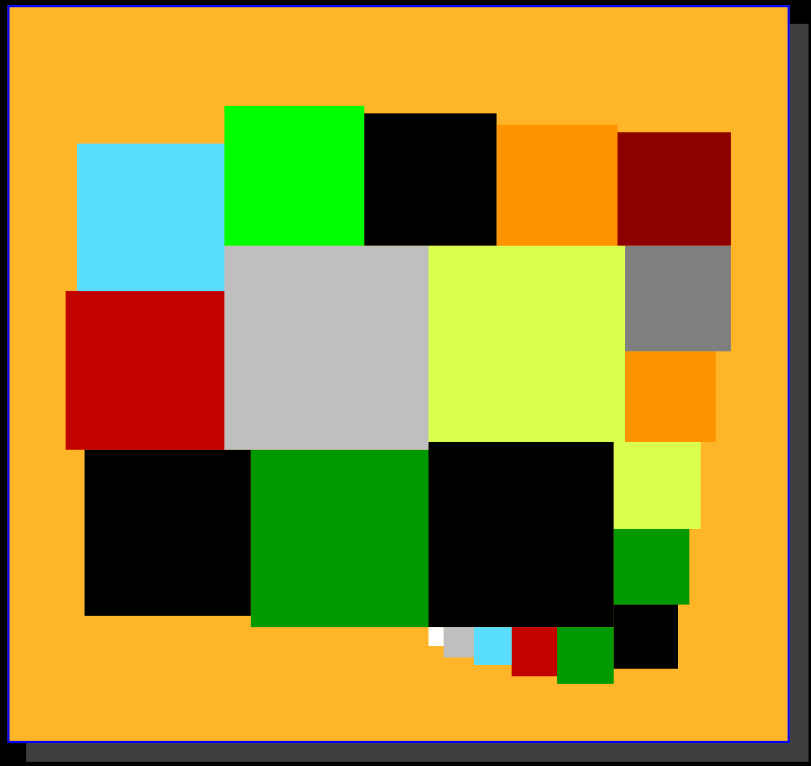
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



Wie eine logarithmische Spirale entsteht?

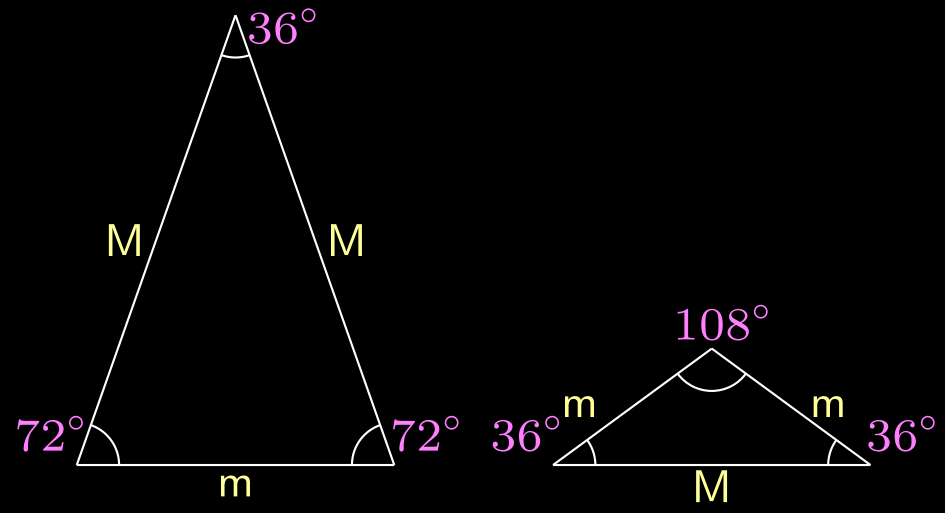


Anton Stankovski: „Quadratspirale“, (1959)

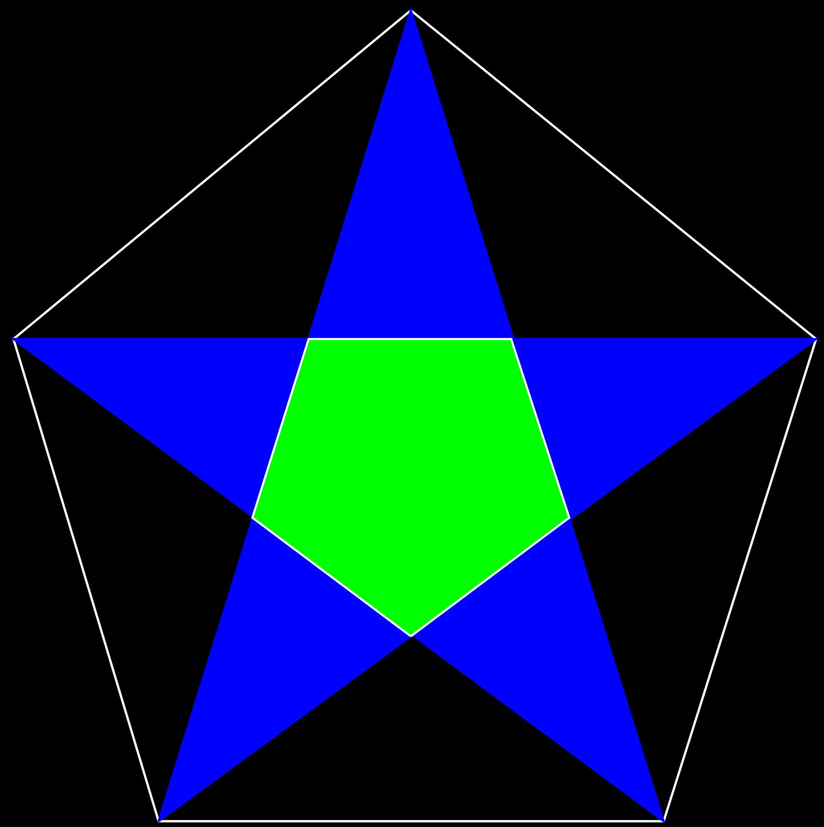


Goldenes Dreieck

Als Goldenes Dreieck bezeichnet man jedes gleichschenklige Dreieck mit goldenem Seitenverhältnis. Dazu existieren zwei Möglichkeiten: Ist m die Basis, so erhält man ein spitzes Goldenes Dreieck mit dem Basiswinkel $72°$; ist M die Basis, so erhält man ein stumpfes Goldenes Dreieck mit dem Basiswinkel $36°$.

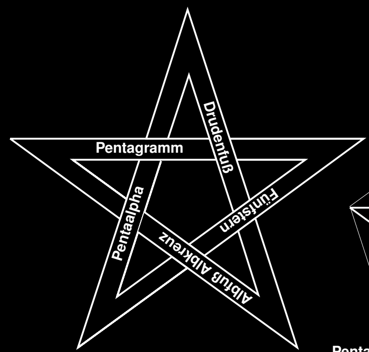


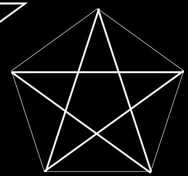
Das Pentagramm



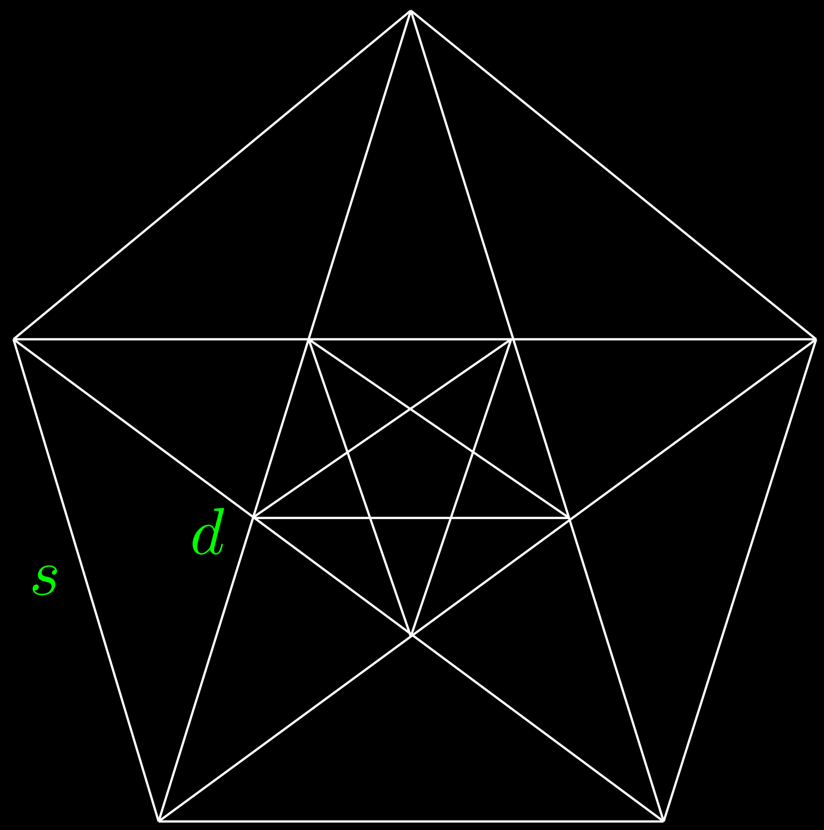
Das Pentagramm

Zeichnet man in ein regelmäßiges Fünfeck die Diagonalen ein oder verlängert man die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks, so entsteht ein fünfzackiger Stern, welchen man auch Fünfstern nennt. Andere Bezeichnungen für den Fünfstern sind Pentagramm, Drudenfuß, Albfuß bzw. Albkreuz.




Pentagramm im Pentagon

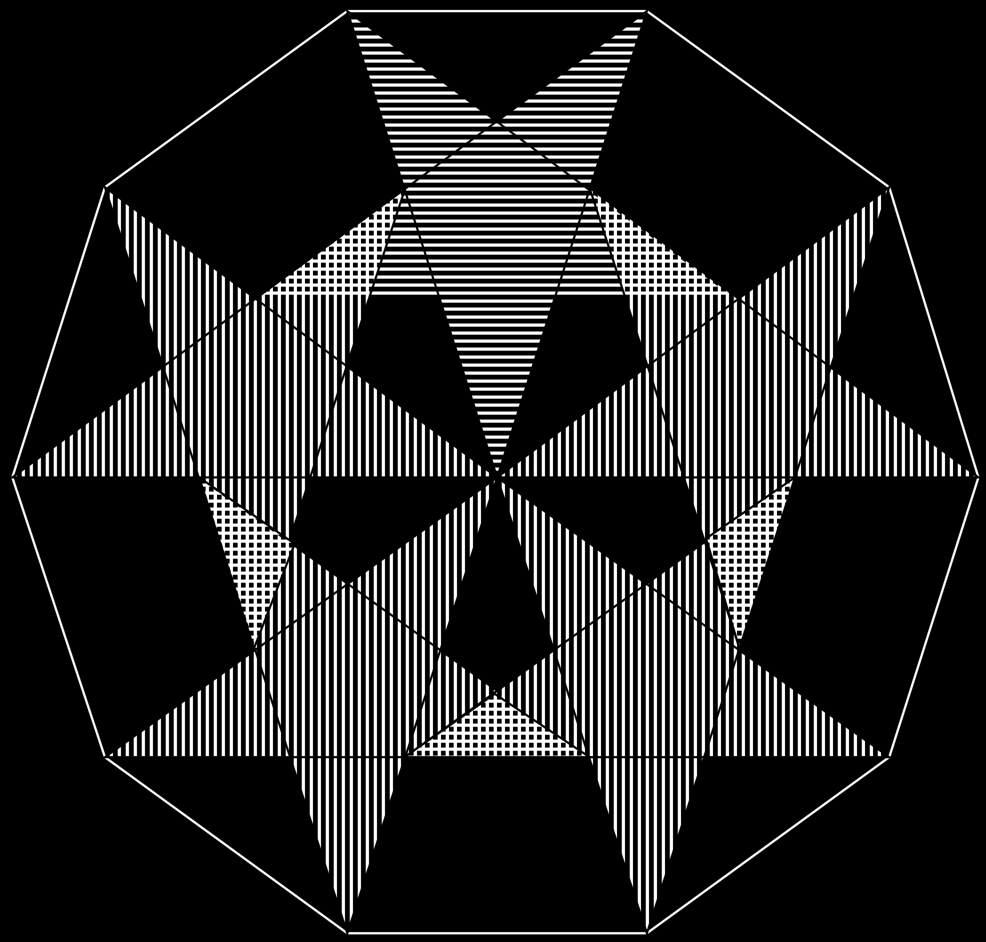
Das regelmäßige Fünfeck



Das regelmäßige Fünfeck hat u. a. folgende Eigenschaften:

- Zwei sich schneidene Diagonalen teilen sich im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Die äußeren Zacken des Pentagramms (Fünfsterns) sind (spitze) Goldene Dreiecke.
- Das sich zwischen den Diagonalen bildende kleine Fünfeck ist ebenfalls regelmäßig. Sein Flächeninhalt verhält sich dem der Ausgangsfigur wie $1 : \mu^2$.
- Einer der fünf Platonischen Körper, der Dodekaeder, besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken.

Das regelmäßige Zehneck



Der Goldene Schnitt und die „Fibonacci-Zahlen“

- „Fibonacci“ ist eine Verkürzung von „Filius Bonacci“ und heißt „Sohn des Bonacci“

Der Goldene Schnitt und die „Fibonacci-Zahlen“

- „Fibonacci“ ist eine Verkürzung von „Filius Bonacci“ und heißt „Sohn des Bonacci“
- hieß Leonardo von Pisa, geboren um 1170 in Pisa, gestorben nach 1240 in Pisa

Der Goldene Schnitt und die „Fibonacci-Zahlen“

- „Fibonacci“ ist eine Verkürzung von „Filius Bonacci“ und heißt „Sohn des Bonacci“
- hieß Leonardo von Pisa, geboren um 1170 in Pisa, gestorben nach 1240 in Pisa
- gilt als der erste bedeutende Mathematiker in Europa

- Die arabische Mathematik, die er auf Reisen nach Afrika, Byzanz und Syrien kennengelernt hatte, vermittelte Fibonacci in seinem Rechenbuch „Liber Abaci“ (1202, 459 Seiten dick, überarbeitet 1228), in dem u. a. die Fibonacci-Folge erwähnt wird. Ferner machte er mit der indischen Rechenkunst bekannt und führte die heute übliche arabische Schreibweise der Zahlen ein und beschäftigte sich auch mit der näherungsweisen Lösung von Gleichungen dritten Grades (kubische Gleichungen), also

$$x^3 + ax^2 + bx^1 + cx + d = f. \tag{2}$$

- Die arabische Mathematik, die er auf Reisen nach Afrika, Byzanz und Syrien kennengelernt hatte, vermittelte Fibonacci in seinem Rechenbuch „Liber Abaci“ (1202, 459 Seiten dick, überarbeitet 1228), in dem u. a. die Fibonacci-Folge erwähnt wird. Ferner machte er mit der indischen Rechenkunst bekannt und führte die heute übliche arabische Schreibweise der Zahlen ein und beschäftigte sich auch mit der näherungsweisen Lösung von Gleichungen dritten Grades (kubische Gleichungen), also

$$x^3 + ax^2 + bx^1 + cx + d = f. \tag{2}$$

Für solche Gleichungen (2) gibt es eine Lösungsformel, die Cardanische Lösungsformel (G. Cardano 1501-1576).

Betrachtet man die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit komplexen Koeffizienten a, b, c so erhält man mit der Substitution $y = x + \frac{a}{3}$ die Normalform

$$\boxed{y^3 + 3py + 2q = 0} \tag{3}$$

mit

$$2q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c, \quad 3p = b - \frac{a^2}{3}.$$

Betrachtet man die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mit komplexen Koeffizienten a, b, c so erhält man mit der Substitution $y = x + \frac{a}{3}$ die Normalform

$$\boxed{y^3 + 3py + 2q = 0} \tag{3}$$

mit

$$2q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c, \quad 3p = b - \frac{a^2}{3}.$$

Die Größe $D := p^3 + q^2$ heißt Diskriminante von (3).

Damit ergeben sich die Lösungen

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= u_+ + u_-, \\[2em] y_2 &= \varrho_+ u_+ + \varrho_- u_-, \\[2em] y_3 &= \varrho_- + u_+ + \varrho_+ u_-. \end{aligned}} \tag{4}$$

(Cardanische Lösungsformel)

Damit ergeben sich die Lösungen

$$\boxed{\begin{gathered} y_1 = u_+ + u_-, \\[2em] y_2 = \varrho_+ u_+ + \varrho_- u_-, \\[2em] y_3 = \varrho_- + u_+ + \varrho_+ u_-. \end{gathered}} \tag{4}$$

(Cardanische Lösungsformel)

Dabei gilt

$$u_\pm = \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{D}}, \quad \varrho_\pm := \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).$$

- Das Todesjahr von Fibonacci ist nicht bekannt. Die letzte Nachricht über ihn ist ein Dektret aus dem Jahre 1240, in welchem die ihm die Republik ein jährliches Gehalt aussetzte.

Die Fibonacci-Zahlen

Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

heißt Fibonaccifolge, benannt nach FIBONACCI (1170-1240, Pisa), die a_n bezeichnen wir mit Fibonacci Zahlen. Diese Zahlen sehen so aus:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	$\cdots$

Die Frage, die sich stellt, ist, ob man die a_n direkt berechnen kann. Diese Frage kann mit ja beantwortet werden. Lösung der Rekursionsgleichung:

Setze $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann ist

$$a_{n+2} = q^{n+2} = a_{n+1} + a_n = q^{n+1} + q^n.$$

Durchdividieren dieser Gleichung mit q^n liefert

$$q^2 = q + 1 \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0$$

und somit

$$q_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Damit erhält man

$$s(n) = a_1 q_1^n + a_2 q_2^n = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Setzt man die ersten Werte der Rekursion ein, so erhält man

$$
\begin{aligned}
0 &= s(0) = a_1 + a_2 \\
1 &= s(1) = a_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + a_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und Addition der zweiten Gleichung liefert

$$
\begin{aligned}
1 &= a_2\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= a_2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= -a_2\sqrt{5} \qquad\qquad \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\
&\Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Damit erhält man

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right).$$

Dies ist eine geschlossene Gleichung.

Beispiel 1 *Ausrechnen der zweiten Fibonacci-Zahl, also für* $n = 2$*:*

$$\begin{aligned}
s(2) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}+2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{2}+1+\sqrt{5}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3}{2}+1-\sqrt{5}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt

Der Goldene Schnitt ist das Längenverhältnis zweier Strecken, bei dem sich die größere (Major) zur kleineren (Minor) Strecke verhält, wie die Summe der beiden Strecken zum größeren Teil.

Die Zahlenfolge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ heißt Fibonacci-Folge. Dabei ist jede Zahl größer als 1 die Summe der beiden vorhergehenden.

Aufgabe: *Man bilde den Quotienten aus zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen. Was stellen Sie fest?*

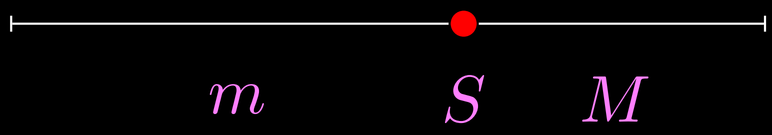
n	F_n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$
0	0	$-$
1	1	$1,0000$
2	1	$2,0000$
3	2	$1,5000$
4	3	$1,6667$
5	5	$1,6000$
6	8	$1,6250$
7	13	$1,6154$
8	21	$1,6190$
9	34	$1,6176$
10	55	$1,6182$
11	89	$1,6180$
12	144	

Feststellung: Die Folge der Quotienten zweier aufeinander folgender Zahlen konvergiert gegen μ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180.$$

Die Zahl μ ist das Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Zur Fibonacci-Zahl wird man wie folgt über die stetige Teilung geführt:



Eine Strecke $\overline{AB}$ durch dem Punkt S heißt stetig geteilt, wenn gilt

$$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m}.$$

Setzt man $\frac{M}{m} =: x$, erhält man die Gleichung

$$1 + \frac{1}{x} = x \Longleftrightarrow x + 1 = x^2 \Longleftrightarrow x^2 - x - 1.$$

Die positive Lösung ist

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =: \mu.$$

Die Lösung $M : m = \mu$ können an vielen Kunstwerken gefunden werden, z. B. am Parthenon in Athen bzw. am Rathaus zu Leipzig.

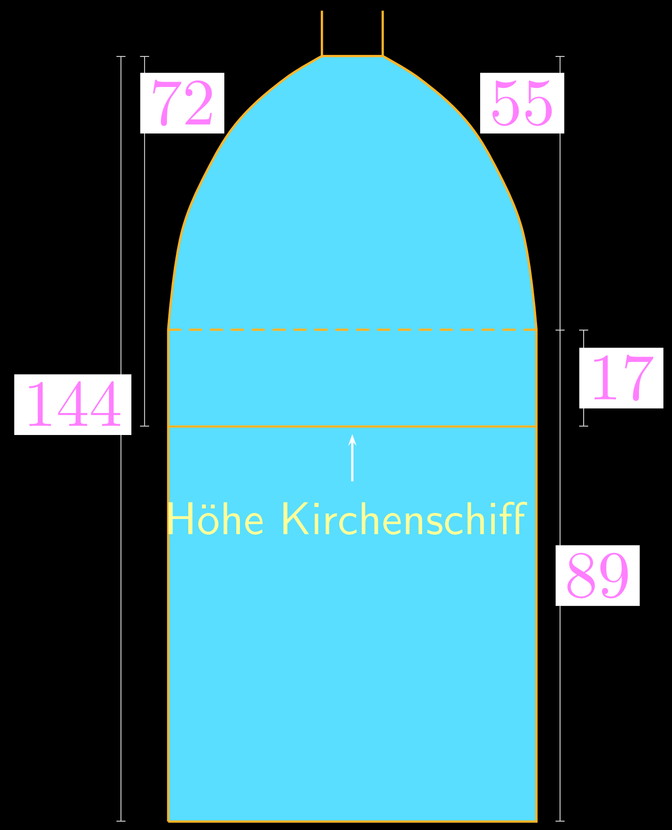
Architektur am Dom von Florenz und Fibonacci-Zahlen

Die Zahlenfolge $1, 2, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$ nennt man Fibonacci-Folge, die Glieder dieser Folge Fibonacci-Zahlen. Jedes Folgenglied – mit Ausnahme der beiden Anfangszahlen – ist die Summe der beiden vorausgehenden Folgenglieder. Jede dritte Fibonacci-Zahl kann man halbieren.

Die Fibonacci-Zahlen waren Grundlage für die Planung wichtiger Proportionen der Kuppel des Domes von Florenz. Im Aufrissplan von Giovanni di Gherardo da Prato von 1426 tauchen als Maße die Fibonacci-Zahlen $55, 89$ und 144 und die 17 bzw. 72 als halbierte Fibonacci-Zahlen 34 bzw. 144 auf (Maßangaben in florentinischen Bracci, 1 florentinischer Bracci entspricht 58.4 cm).

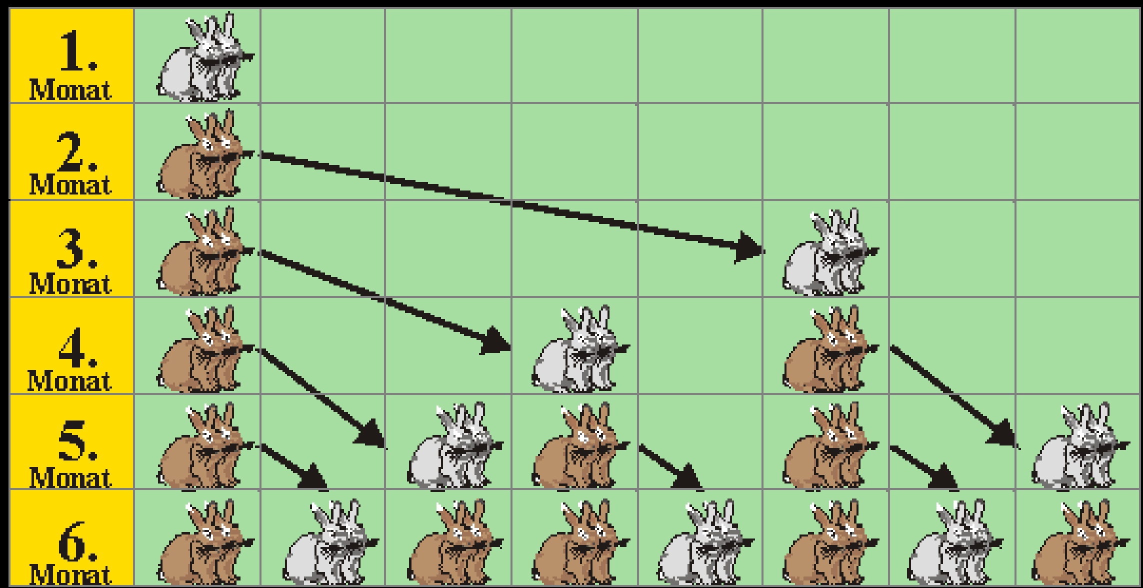
Bei den Quotienten zweier benachbarter, am Bau verwendeter Fibonacci-Zahlen fällt auf, dass sie alle etwa 0.618 ergeben:

$$\begin{array}{rcrcl} 34 & : & 55 & \approx & 0.6182 \\ 55 & : & 89 & \approx & 0.6180 \\ 89 & : & 144 & \approx & 0.6181 \end{array}$$



Kaninchenpopulation – Ein „Fall“ für Fibonacci (1170-1250)

Wie viele Kaninchenpaare gibt es am Ende eines Jahres, wenn im Januar 1 Paar zur Welt kommt und wenn es ab dem Alter von 2 Monaten jedes Paar jeden Monat ein weiteres Paar in die Welt setzt?



Rathaus zu Leipzig

Der Turm teilt die Fassade wie das Verhältnis des „Goldenen Schnittes“.

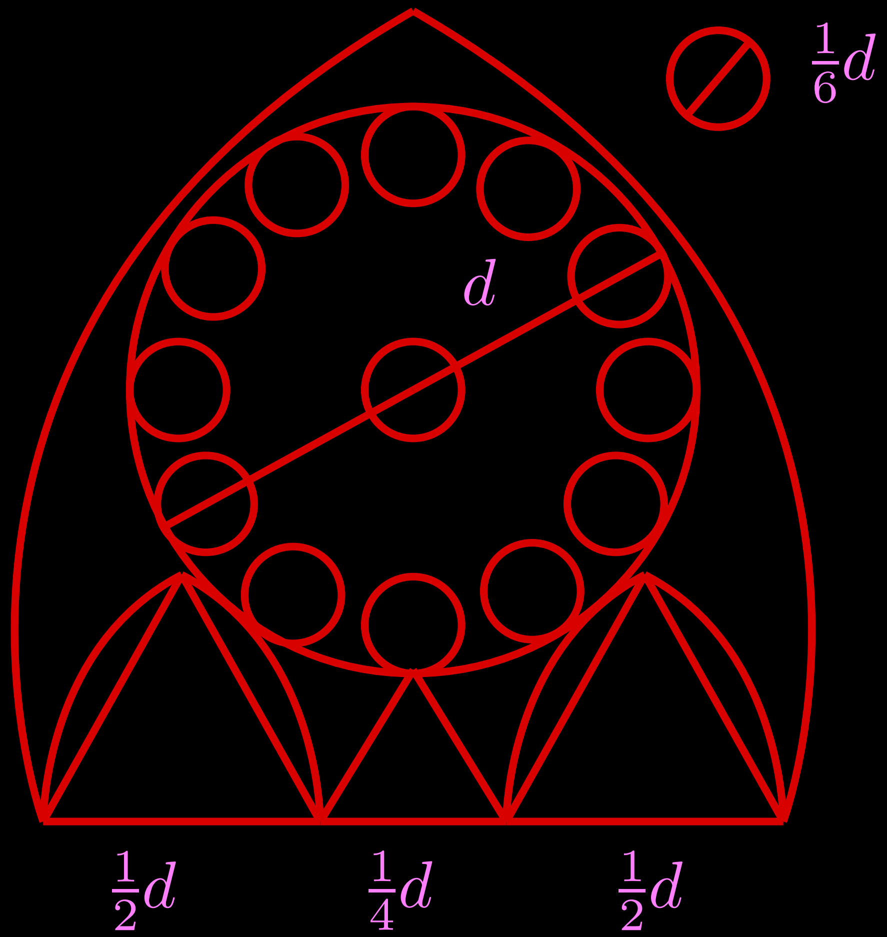
Triumpfbogen des Kaisers Augustus in Rom

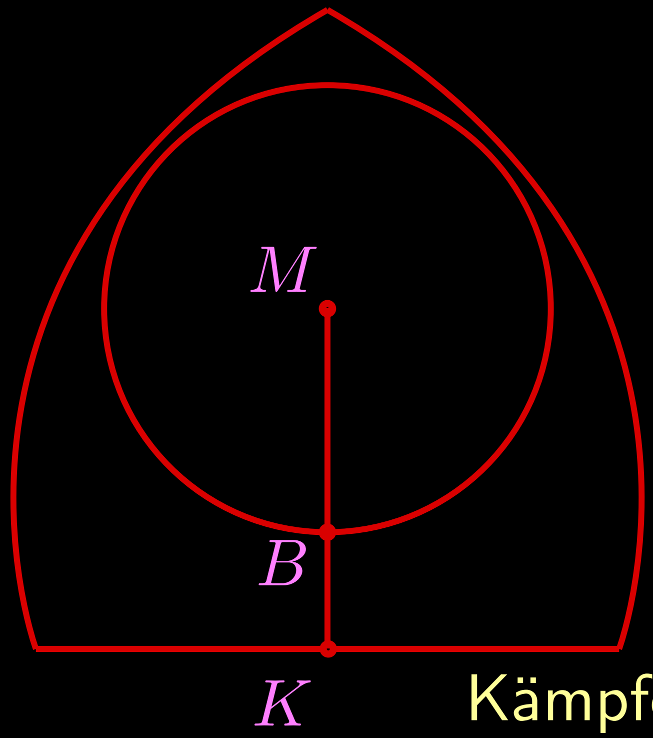
Architektur von de Corbusier
Maße nach den Regeln des „Goldenen Schnittes“

Partheon

Tempel der Athene auf der Akropolis
erbaut 447/38 v. Chr. unter Aufsicht von Phildias (475-430 v. Chr).

Gotische Kirchenfenster und „Goldener Schnitt“

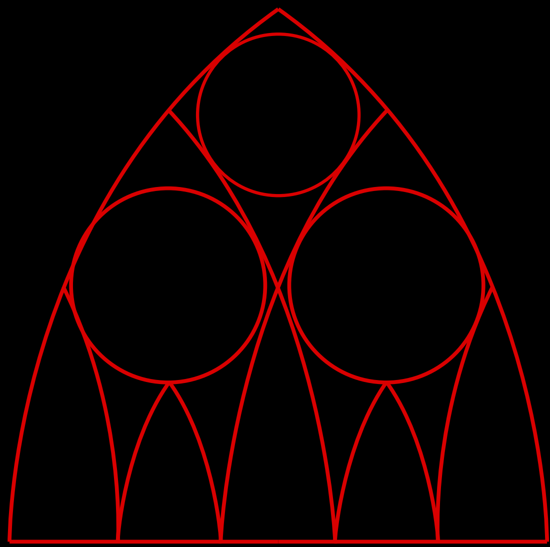

$\frac{1}{6}d$
d
$\frac{1}{2}d$
$\frac{1}{4}d$
$\frac{1}{2}d$



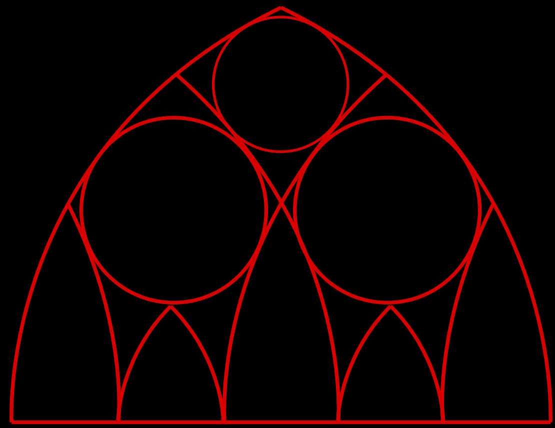
$$\frac{|MB|}{|BK|} = \frac{|BK|}{|MK|}$$

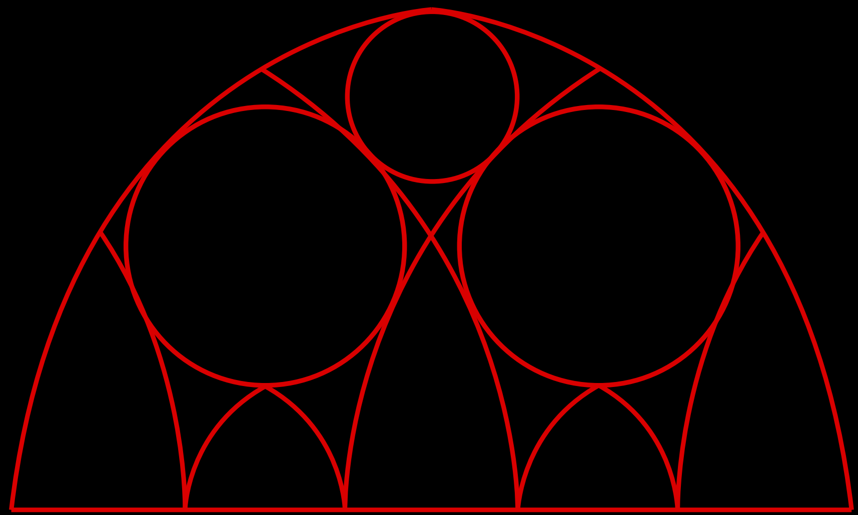
Kämpferlinie

Fensterformen mit guter Gesamtwirkung: $b = h$ (die Höhen der beiden Spitzbögen mit gleicher Basisbreite stehen dann etwa im golden Schnittverhältnis (wenige as $1/4$ Fehlerprozent)).



Fensterformen mit guter Gesamtwirkung: Die Höhe h steht zur Höhe des Spitzbogens, der den größeren Passkreis enthält im goldenen Schnittverhältnis.





Mathematikaufgaben zum Goldenen Schnitt

Aufgabe 1 *a) Konstruiere ein reguläres Fünfeck mit einer Seitenlänge von 5 cm.*

Aufgabe 1 *a) Konstruiere ein reguläres Fünfeck mit einer Seitenlänge von 5 cm.*

<u>Lösung:</u>

Aufgabe 1 *a) Konstruiere ein reguläres Fünfeck mit einer Seitenlänge von 5 cm.*

<u>Lösung:</u>

Hinweis: Die Innenwinkel müssen $108°$ groß sein.

Aufgabe 1 *a) Konstruiere ein reguläres Fünfeck mit einer Seitenlänge von 5 cm.*

<u>Lösung:</u>

Hinweis: Die Innenwinkel müssen $108°$ groß sein.

b) Zeichne in einen Kreis mit dem Radius 5 cm ein reguläres Fünfeck.

Aufgabe 1 *a) Konstruiere ein reguläres Fünfeck mit einer Seitenlänge von 5 cm.*

Lösung:

Hinweis: Die Innenwinkel müssen $108°$ groß sein.

b) Zeichne in einen Kreis mit dem Radius 5 cm ein reguläres Fünfeck.

Lösung:

Aufgabe 1 *a) Konstruiere ein reguläres Fünfeck mit einer Seitenlänge von 5 cm.*

Lösung:

Hinweis: Die Innenwinkel müssen 108° groß sein.

b) Zeichne in einen Kreis mit dem Radius 5 cm ein reguläres Fünfeck.

Lösung:

Hinweis: Zeichne vom Mittelpunkt aus zwei Halbgeraden im Winkel von 72°.

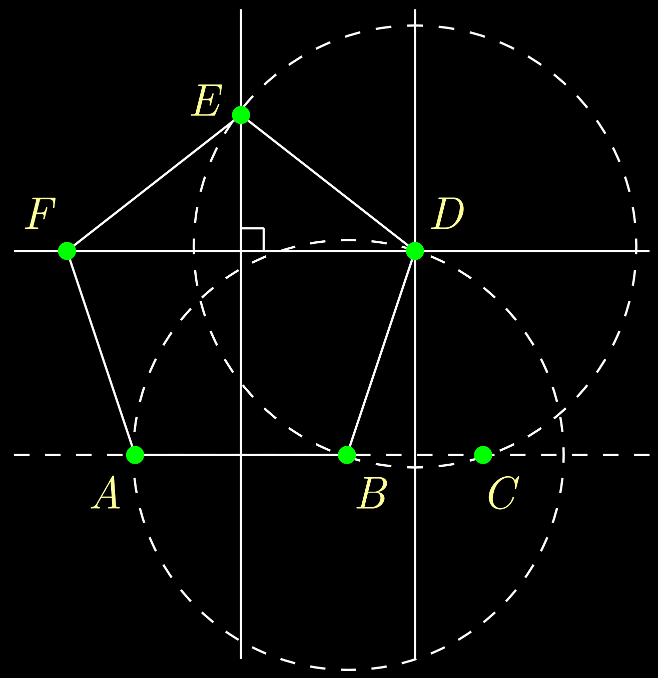
c) *Für die Tüftler: Führe die in (a) und (b) geforderten Konstruktionen ohne die Benutzung eines Winkelmessers durch. Hinweis: Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.*

c) *Für die Tüftler: Führe die in (a) und (b) geforderten Konstruktionen ohne die Benutzung eines Winkelmessers durch. Hinweis: Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.*

<u>Lösung:</u>

c) *Für die Tüftler: Führe die in (a) und (b) geforderten Konstruktionen ohne die Benutzung eines Winkelmessers durch. Hinweis: Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.*

Lösung:



1. AB, $\overline{AB} = s$

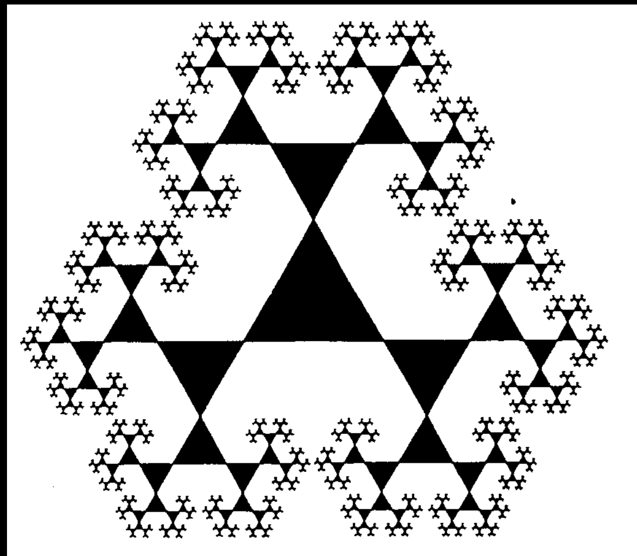
1. AB, $\overline{AB} = s$
2. C liegt auf der Geraden durch A und B. B teilt AC stetig.

1. AB, $\overline{AB} = s$
2. C liegt auf der Geraden durch A und B. B teilt AC stetig.
3. Mittelsenkrechte von BC und Kreisbogen um B mit $r = \overline{BA}$ schneiden sich in D.

1. AB, $\overline{AB} = s$
2. C liegt auf der Geraden durch A und B. B teilt AC stetig.
3. Mittelsenkrechte von BC und Kreisbogen um B mit $r = \overline{BA}$ schneiden sich in D.
4. Mittelsenkrechte von AB und Kreisbogen um D mit $r = \overline{DB}$ schneiden sich in E.

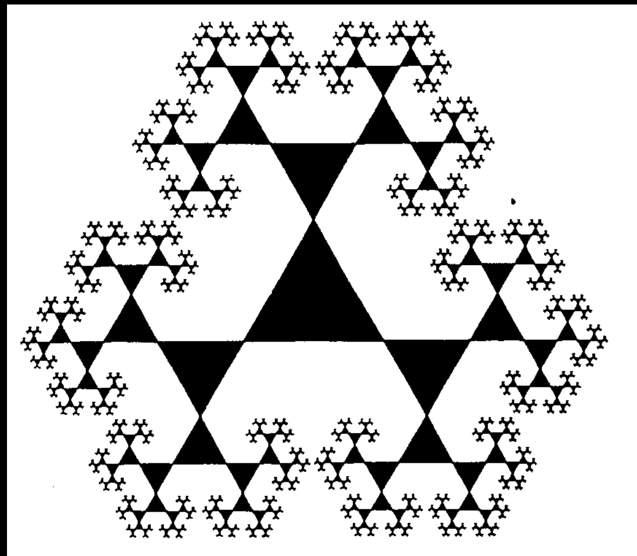
1. AB, $\overline{AB} = s$
2. C liegt auf der Geraden durch A und B. B teilt AC stetig.
3. Mittelsenkrechte von BC und Kreisbogen um B mit $r = \overline{BA}$ schneiden sich in D.
4. Mittelsenkrechte von AB und Kreisbogen um D mit $r = \overline{DB}$ schneiden sich in E.
5. Durch Spiegelung von D an der Mittelsenkrechten von AB erhalten wir F.

Aufgabe 2 *Die Abbildung zeigt ein einfaches geometrisches Beispiel, ein Dreiecksfraktal.*



a) Wie groß ist dabei der Verkleinerungsfaktor f, *d. h. das Verhältnis zweier aufeinander folgender Seitenlängen?*

Aufgabe 2 *Die Abbildung zeigt ein einfaches geometrisches Beispiel, ein Dreiecksfraktal.*



a) *Wie groß ist dabei der Verkleinerungsfaktor f, d. h. das Verhältnis zweier aufeinander folgender Seitenlängen?*

<u>Lösung:</u> Etwa 0.6 (genau: bzw. $\frac{1}{\mu} - 1$).

b) Zeichne ein Dreiecksfraktal mit einem anderen Faktor $0 < f < 1$.

b) Zeichne ein Dreiecksfraktal mit einem anderen Faktor $0 < f < 1$.

Lösung:

b) Zeichne ein Dreiecksfraktal mit einem anderen Faktor $0 < f < 1$.

Lösung:

Wähle 0.3 (ergibt weite Zwischenräume) oder 0.8 (Äste überlappen sich).

b) Zeichne ein Dreiecksfraktal mit einem anderen Faktor $0 < f < 1$.

Lösung:

Wähle 0.3 (ergibt weite Zwischenräume) oder 0.8 (Äste überlappen sich).

c) Vergleiche deine Zeichnung mit denen deiner Mitschülerinnen und Mitschüler: Gibt es eine, bei der sich die „Zweige" berühren? Welcher Verkleinerungsfaktor liegt hier vor? Versuche, diesen Grenzfall zu berechnen.

b) *Zeichne ein Dreiecksfraktal mit einem anderen Faktor* $0 < f < 1$.

Lösung:

Wähle 0.3 (ergibt weite Zwischenräume) oder 0.8 (Äste überlappen sich).

c) *Vergleiche deine Zeichnung mit denen deiner Mitschülerinnen und Mitschüler: Gibt es eine, bei der sich die „Zweige“ berühren? Welcher Verkleinerungsfaktor liegt hier vor? Versuche, diesen Grenzfall zu berechnen.*

Lösung:

b) *Zeichne ein Dreiecksfraktal mit einem anderen Faktor* $0 < f < 1$.

Lösung:

Wähle 0.3 (ergibt weite Zwischenräume) oder 0.8 (Äste überlappen sich).

c) *Vergleiche deine Zeichnung mit denen deiner Mitschülerinnen und Mitschüler: Gibt es eine, bei der sich die „Zweige“ berühren? Welcher Verkleinerungsfaktor liegt hier vor? Versuche, diesen Grenzfall zu berechnen.*

Lösung:

Eine sinnvolle Vermutung für diesen Grenzfaktor wäre μ.

d) *Zeichne jetzt ein Fraktal aus Quadraten oder aus regelmäßigen Fünfecken und führe die gleiche Untersuchung durch.*

d) *Zeichne jetzt ein Fraktal aus Quadraten oder aus regelmäßigen Fünfecken und führe die gleiche Untersuchung durch.*

Lösung:

d) *Zeichne jetzt ein Fraktal aus Quadraten oder aus regelmäßigen Fünfecken und führe die gleiche Untersuchung durch.*

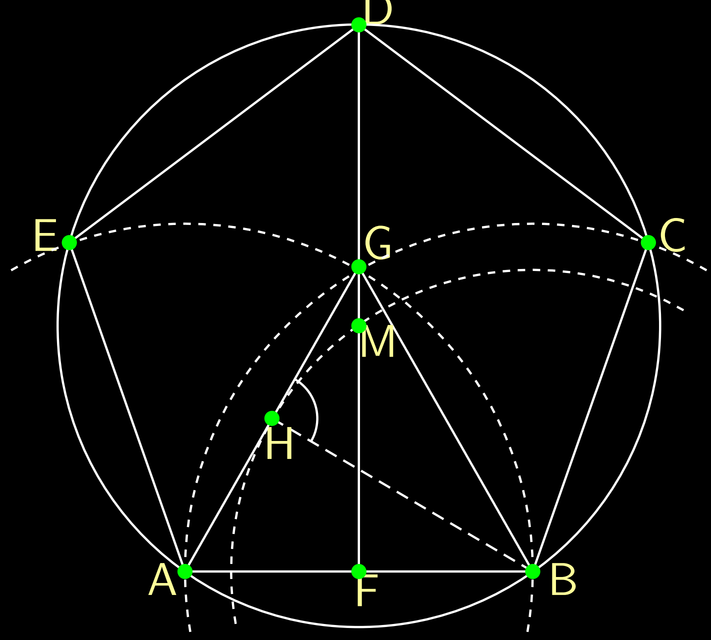
Lösung:

Bei einem Fraktal aus Quadraten ist dieser Grenzfaktor 0.5 und bei einem aus regelmäßigen Fünfecken $\frac{1}{\mu^2}$.

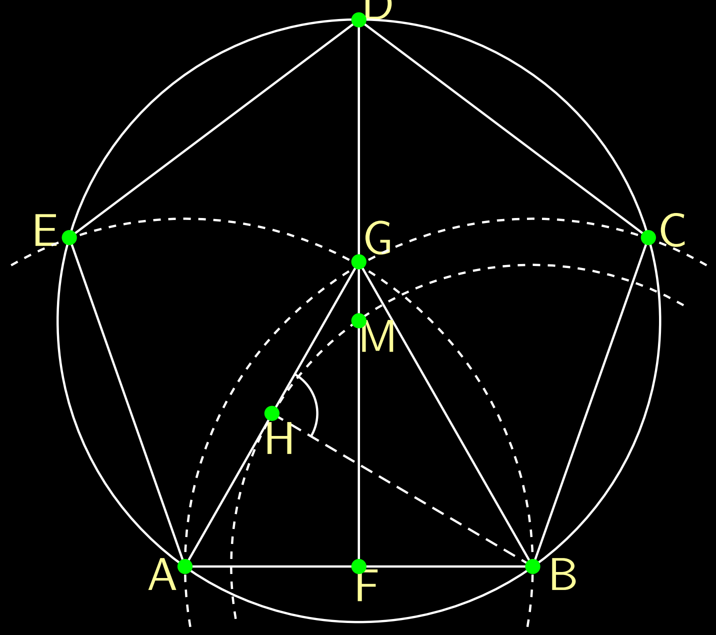
Historische Konstruktionen

Aufgabe 3 *Die exakte Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks ist nicht so einfach. Immer wieder in der Geschichte haben sich Künstler und Mathematiker herausgefordert gefühlt, dieses Verfahren zu vereinfachen. Versuche, zwei dieser Ansätze nachzuvollziehen.*

Konstruktion 1: Nach Leonardo da Vinci (1452-1519)

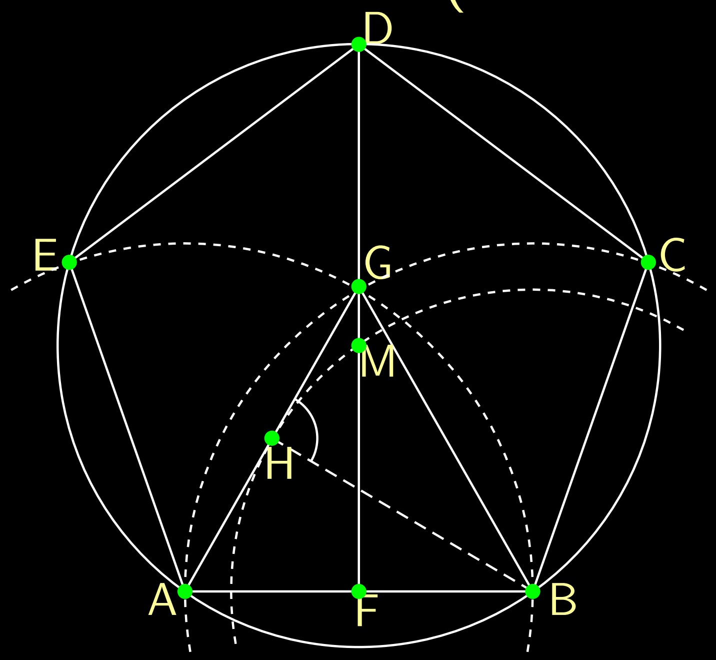


Konstruktion 1: Nach Leonardo da Vinci (1452-1519)



Lösung:

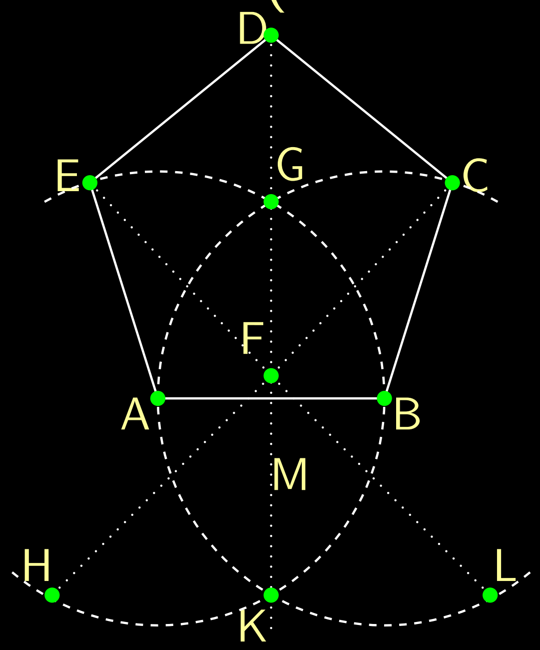
Konstruktion 1: Nach Leonardo da Vinci (1452-1519)



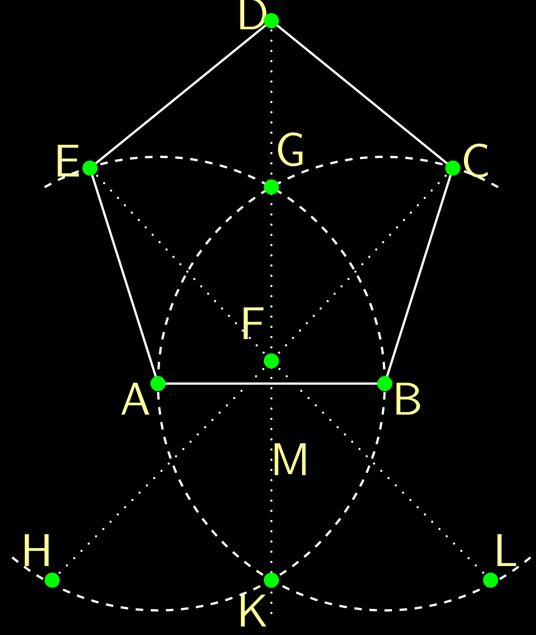
Lösung:

Zeichne über einer Fünfeckseite AB ein gleichseitiges Dreieck. Der unbekannte Umkreismittelpunkt muss auf der Mittelsenkrechten von AB liegen. Der Fußpunkt des Lotes von B auf AG sei H. Der Kreis um B mit $r = \overline{BH}$ schneidet die Mittelsenkrechte von AB im Umkreispunkt M. Mit Hilfe des Umkreises um M mit $r = \overline{MA}$ lässt sich das Fünfeck leicht vervollständigen.

Konstruktion 2: Nach Albrecht Dürer (1471-1528)

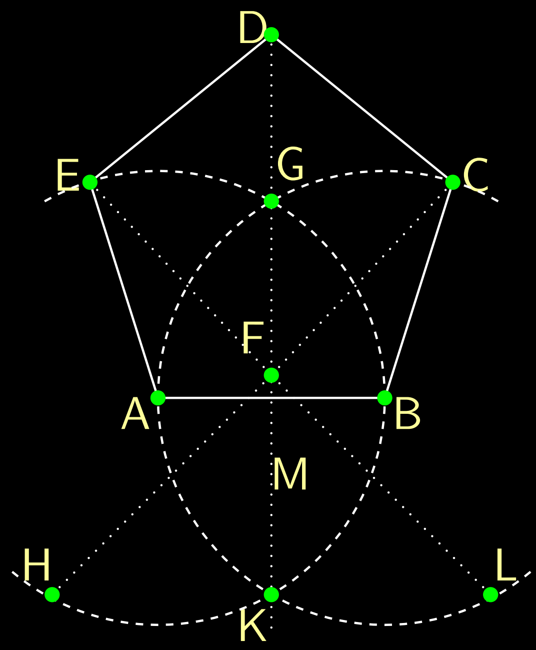


Konstruktion 2: Nach Albrecht Dürer (1471-1528)



Lösung:

Konstruktion 2: Nach Albrecht Dürer (1471-1528)

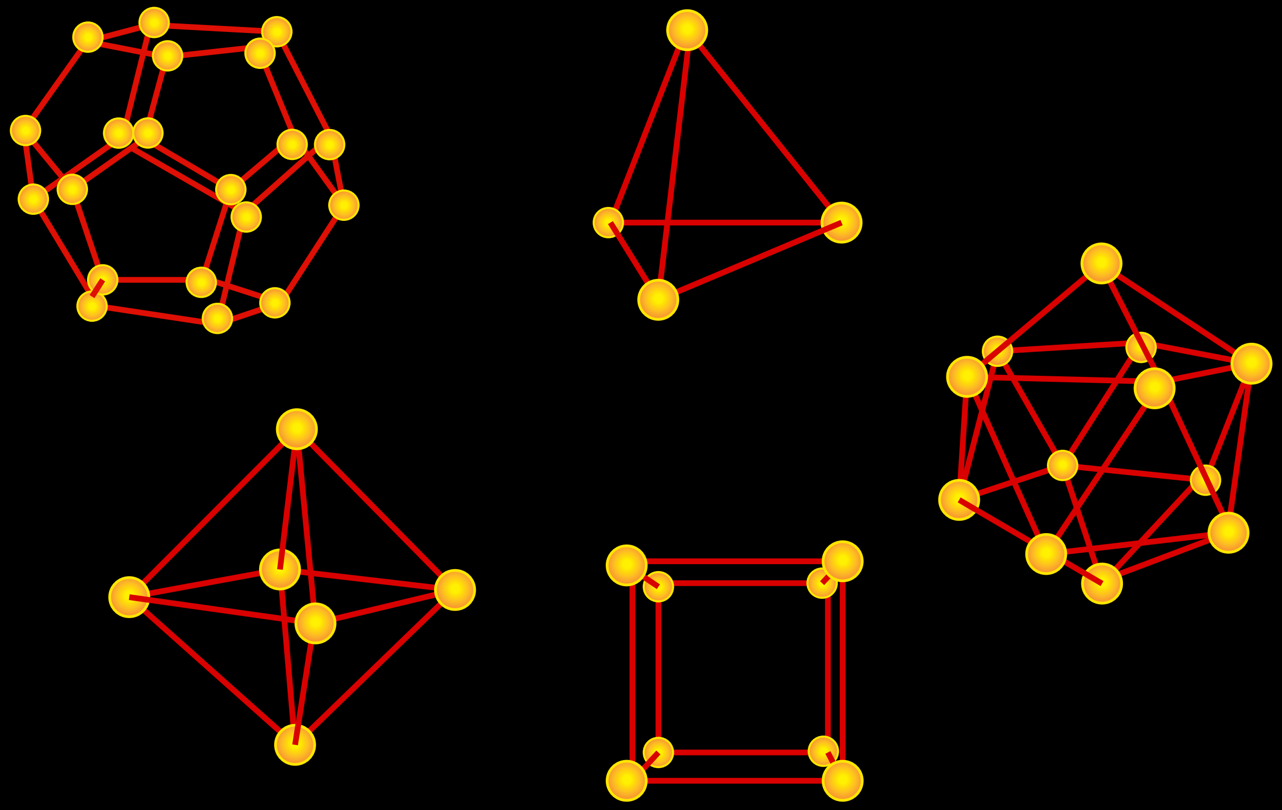


Lösung:

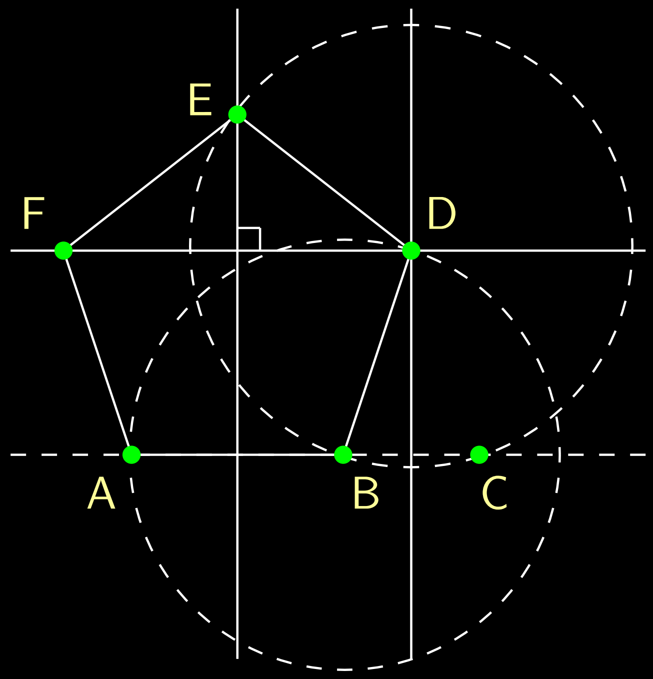
Zeichne eine Fünfeckseite AB. Konstruiere um A und B zwei Kreise mit $r = \overline{AB}$ sowie einen weiteren gleich großen um deren unteren Schnittpunkt K. Ein Kreisbogen um K mit $r = \overline{AB}$ schneidet die Mittelsenkrechte von AB in F und die Kreise A und B in H und L. Der Fünfeckpunkt E ist der

Schnittpunkt des Kreises um A mit der Geraden durch L und F. Entsprechend erhält man C als Schnittpunkt der Geraden durch H und F mit dem Kreis um B. Die fünfte Ecke D ist dann Schnittpunkt der Geraden durch F und G mit dem Kreisbogen um C mit $r = \overline{CB}$.

Die Platonischen Körper Dodekaeder, Ikosaeder und „Der Goldene Schnitt“



Auf eine besondere Weise ist der Goldene Schnitt auch mit der Konstruktion des Fünfecks verbunden. Die exakte Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks hat in der Geschichte immer wieder Mathematiker und Künstler herausgefordert. Die Grundlagen der verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten gehen aber alle auf die Griechen Euklid, Ptolemaios und Heron zurück und sind somit seit mehr als 2000 Jahre bekannt.

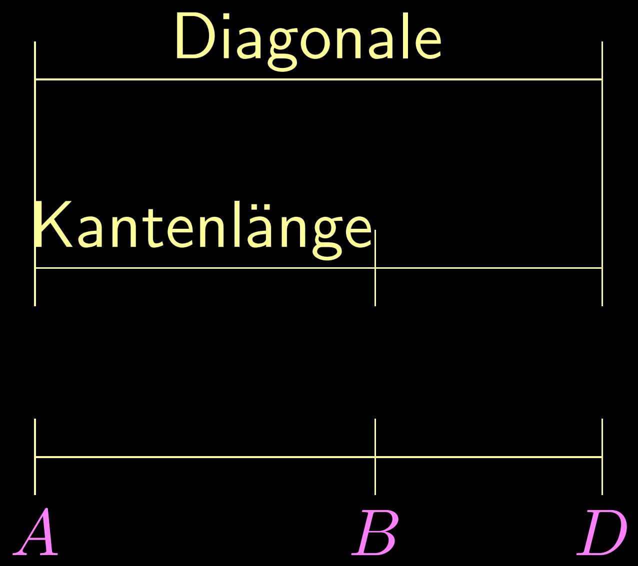


- AB, $\overline{AB} = s$
- C liegt auf der Geraden durch A und B
- B teilt AC stetig (vgl. Konstruktion des Goldenen Schnittes)
- Mittelsenkrechte von BC und Kreisbogen um B mit $r = \overline{BA}$ schneiden sich in D
- Mittelsenkrechte von AB und Kreisbogen um D mit $r = \overline{DB}$ schneiden sich in E
- Durch Spiegelung von D an der Mittelsenkrechten von AB erhalten wir F

Wie wir aus dem Konstruktionsverfahren entnehmen können, stehen die Seitenlängen des Fünfecks mit ihren Diagonalen im Verhältnis des Goldenen

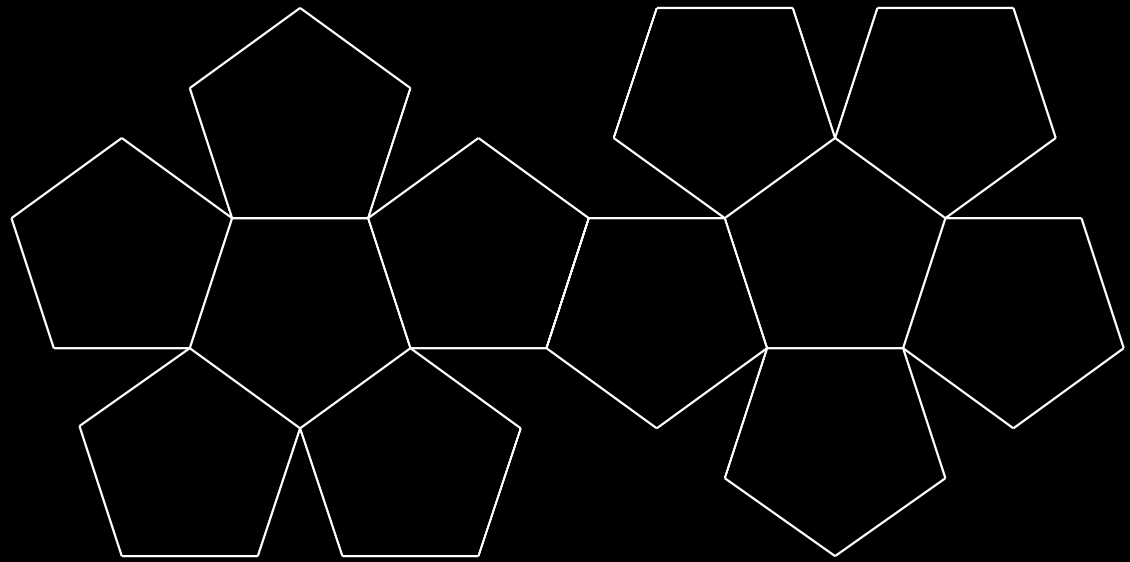
Schnittes. Es gilt die folgende Gleichung

$$\frac{\text{Kantenlänge}}{\text{Diagonale} - \text{Kantenlänge}} = \frac{\text{Diagonale}}{\text{Kantenlänge}}.$$



Es beschränken sich aber die Beziehungen zum Goldenen Schnitt keineswegs nur auf die Streckenverhältnisse. Auch in den Winkelbeziehungen des Fünfecks kann er nachgewiesen werden.

Der Dodekaeder und das Ikosaeder sind reguläre Körper, die Fünfecke enthalten.

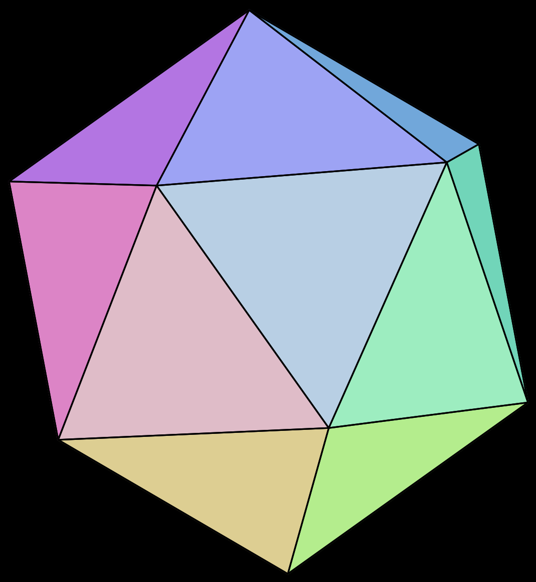


Beim Dodekaeder sind es 12 Seitenflächen. Beim Isokaeder kommen an einer Ecke fünf Dreiecke zusammen. Diejenigen Seiten dieser Dreiecke, die nicht in diese Ecke einlaufen bilden ein regelmäßiges Fünfeck.

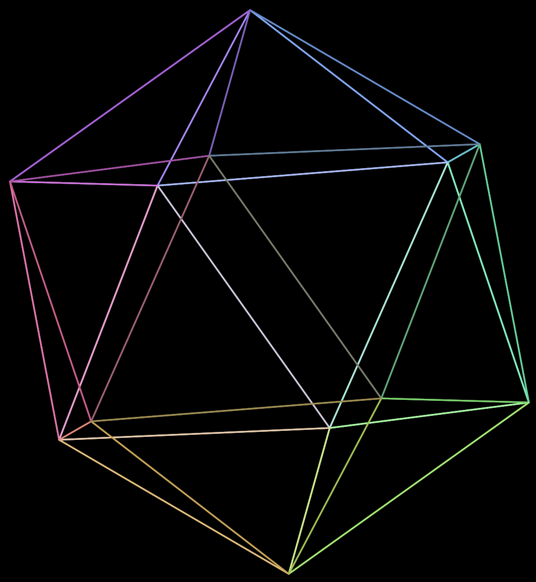
In einer Ecke des Dodekaeders treffen hingegen drei Fünfecke zusammen.

Das Zahlenverhältnis $3:5$ der Fibonacci-Reihe, welche den Grenzwert $\mu =$ Goldener Schnitt besitzt, spielt bei diesen Körpern eine große Rolle.

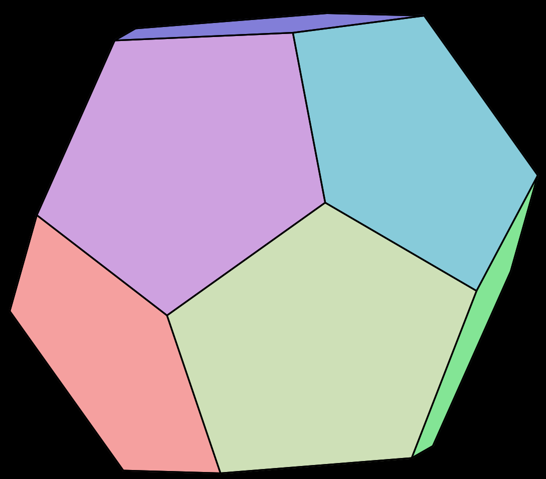
Isokaeder



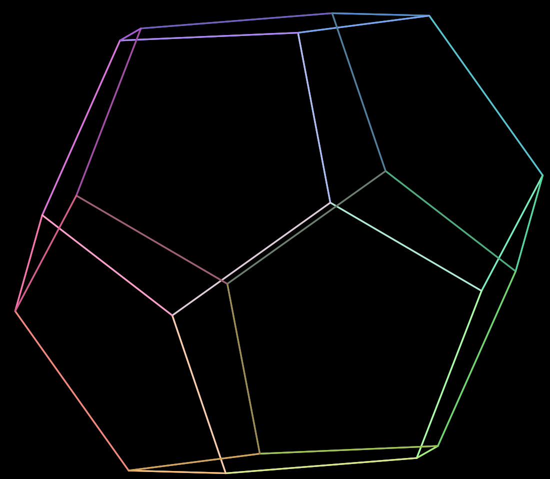
Isokaeder



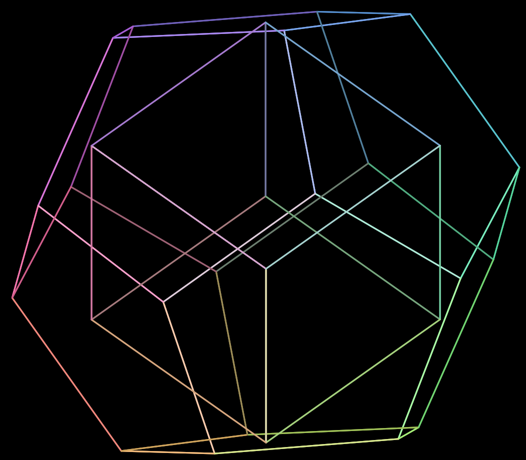
Dodekaeder



Dodekaeder



Beim Dode- und Isokaeder kann in geeigneter Weise ein Würfel ein- oder umbeschrieben werden. Dabei entstehen weitere Verhältnisse, die auf den Goldenen Schnitt hinweisen.
Ein Würfel ist von sechs kongruenten Quadraten begrenzt. An jeder Würfelecke kommen drei dieser Seitenquadrate zusammen. Der Würfel zeigt in diesen Beziehungen keinerlei Verwandtschaft zum Goldenen Schnitt. Beim Würfel kann aber ein Dodekaeder so umbeschrieben werden, dass alle seine acht Ecken gleichzeitig auch Ecken des Dodekaeders sind



Die Kantenlängen des Würfels entsprechen dann genau den Diagonalen der Fünfecke des Dodekaeders. Da die Diagonalen mit den Kanten des Fünfecks dem Verhältnis des Goldenen Schnitt's entsprechen, stehen die Kanten des Würfels mit den Kanten des Dodekaeders ebenfalls in diesem Verhältnis.

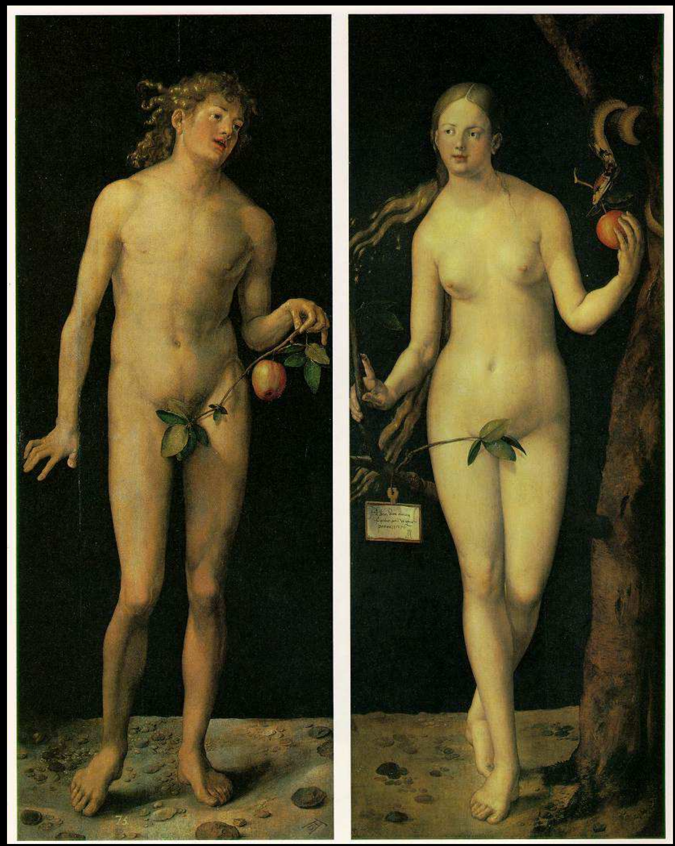
Des Weiteren teilt eine Würfelkante ein Fünfeck in ein Dreieck und ein Trapez auf. Die Hypotenuse dieses Dreiecks steht zu ihren beiden Katheten mit der gleichen Begründung im Goldenen Schnitt. Es lassen sich so noch viele Beziehungen herstellen. Hinsichtlich der Untersuchung der beiden ausgewählten Musikstücke auf den Goldenen Schnitt in Zusammenhang mit Fünfecken sollen diese Erläuterungen jedoch genügen.

Raffael Santi (1483-1520). Die sixtinische Madonna – Bildkomposition nach dem „Goldenen Schnitt“

obere Linie: ca. 0.64 der Gesamthöhe
untere Linie: 0.619 von oberer Linie

Albrecht Dürer (1471-1528). Adam und Eva

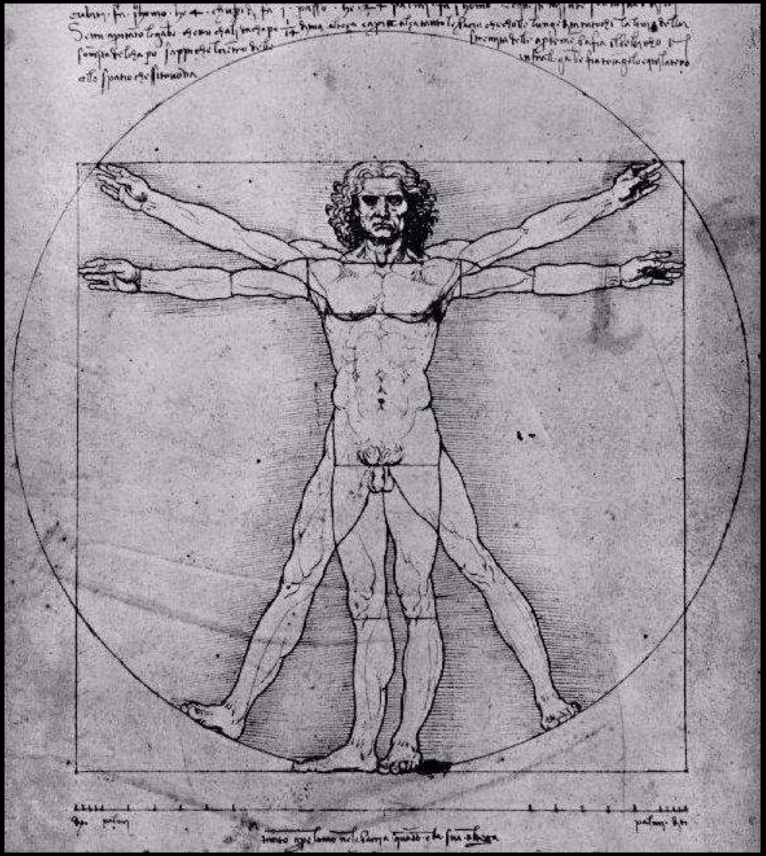
Kopf der Schlange teilt die Bildhöhe im Verhältnis des Goldenen Schnittes.



Proportionsstudie nach Vitruv – Die „idealen“ menschlicher Proportionen

Proportionsstudie nach Vitruv – Die „idealen“ menschlicher Proportionen

- Leonardo da Vinci (1452-1519), Luca Pacioli (1445-1514)
- Römischer Architekt Marcus Vitruvius Pollio (geb. 84. v. Chr.)
- der ideale Mensch passt genau in Kreis und Quadrat
- Markstein der Kunstgeschichte
- Symbol für die italienische Renaissance und damit für das Streben nach Harmonie zwischen Mensch und Universum



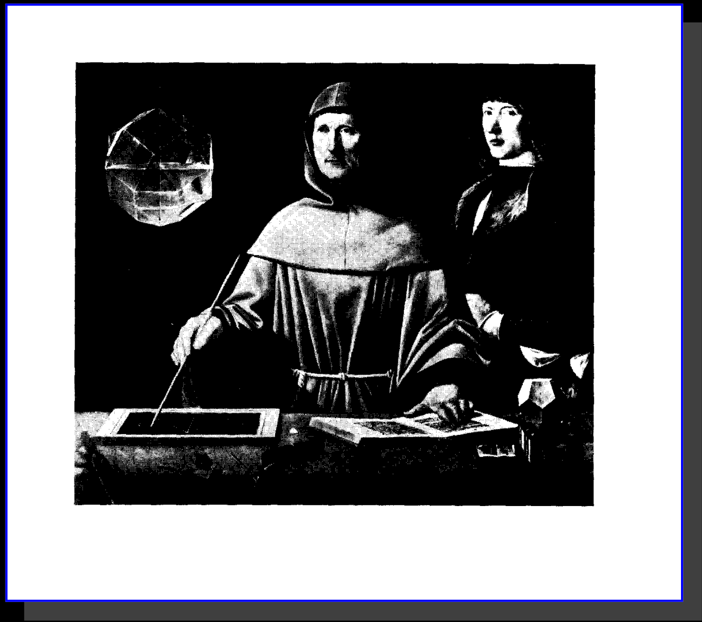
Der Goldene Schnitt in der Natur

Der Goldene Schnitt in der Natur

Zum Abschluss

„*Daß zwei Dinge sich auf eine schöne Art vereinigen ohne ein drittes, ist unmöglich. Denn es muss ein Band zwischen ihnen entstehen, das sie vereinigt. Das kann die Proportion am besten vollbringen. Denn wenn von irgend drei Zahlen die mittlere sich zu der kleinsten verhält, wie die größte zu der mittleren selbst und umgekehrt, die kleinste zu der mittleren wie die mittlere zur größten, dann wird das Letzte und das Erste das Mittlere und das Mittlere Erstes und Letztes, alles wird also mit Notwendigkeit dasselbe, und da es dasselbe wird, bildet es ein Einziges.*“

Platon: Timaios



Luca Pacioli