Mathematik in der Welt der Töne

Christian Hartfeldt, Dr. Wolfram Eid und Prof. Dr. Herbert Henning

Magdeburg, den 10. Oktober 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik und Musik – Ein Thema mit vielen Facetten

Schon bei einfachen Liedern oder Musikstücken fordert, Takt und Rhythmus einzuhalten, nur allzu oft regelrechtes Mitzählen, unsere Noten- und Pausenzeichen stehen für bestimmte Teile einer jeweils festzulegenden „ganzen Note“ und Punktierungen strapazieren gelegentlich beträchtlich unsere arithmetischen Fertigkeiten.

Die Musik hat einen ihrer Ursprünge in der pythagoräischen Mathematik und Geometrie. Für die Pythagonäer war die irdische Musik eine Nachbildung der „himmlischen“ Musik, deren Harmonie auf Zahlen beruhte. Aristoteles nannte die Musik die „Wissenschaft des Hörbaren“. In der griechischen Musik wurden durch die Teilung bestimmter Intervalle 3 Tongeschlechter entwickelt, das diatonische, das chromatische und das enharmonische.

Im 4. Jh. v. Chr. schrieb Aurelius Augustinus: „Die Erkenntnis der Musik erschließt sich nur der Vernunft.“ Er schätzte sowohl das Verstandesmäßige als auch das Gefühlsmäßige. In seinen Büchern „De musica“ betrachtet er die Zahlengesetzlichkeit in der Musik, insbesondere in deren rhythmischem und melodischem Ablauf, der als eine durch Zahlen geordnete Bewegung bezeichnet wird.

Im Mittelalter zählte die Musik ebenso wie die Arithmetik und die Geometrie zu den Artes liberales, den Sieben Freien Künsten. Hier erfolgte eine mathematische Fundierung der Tonsysteme als Gefüge von Tonbeziehungen, die nach der Konsonanz bewertet wurden. Johannes Kepler begründete die harmonischen Proportionen konsonanter Intervalle aus der Konstruierbarkeit regelmäßiger Vielecke und erkannte dann diese Proportionen in den Planetenbahnen wieder. So entstand eine mathematisch-kosmische Begründung der Musiktheorie. Rene Descartes stellte Betrachtungen über die ästhetischen Wirkungen von Musik an und auch Leonhard Euler versuchte, ästhetische Phänomene der Musik mathematisch zu fassen, z. B. Intervalle, Akkorde, Rhythmen und Formproportionen.

Im 19. Jh. kam man zu der Erkenntnis, daß Musik mit Zahlen beschrieben, aber nicht erklärt werden kann. Die Musiktheoretiker versuchten nun, geordnete Strukturen nachzuweisen.

Mit der Entwicklung der Neuen Musik Anfang des 20. Jh. gewann die Mathematik wieder an Bedeutung. Wolfgang Graeser versuchte, eine mathematische Musiktheorie zu entwerfen, und Iannis Xenakis, solche mathematischen Theorien für die Komposition nutzbar zu machen. Ästhetische Intentionen wurden mit der Verwendung von Zahlen verbunden. Der Charakter der Zahlen wurde als vollkommen abstrakt und neutral gegenüber den Gegenständen bewertet, und so benutzte man sie, um Transformationen zu erzielen, z.B. übersetzte Gerhard Rühm 1983 die Biographie Frederic Chopins in ein Klavierstück. Emmet Williams erstellte Kompositionen mit geometrischen Progressionen und mathematischen Permutationen von Buchstaben, Silben, Sätzen und Zeichen. Es entstand die serielle Musik. Anton von Webern arbeitete mit symmetrischen Reihen, Iannis Xenakis entwickelte konstruktivistische Pläne und Olivier Messiaen konstruierte spiegelbildliche Rhythmen und symmetrische Skalen.

2 Mathematische Strukturen in der Musik

Die *Tetraktys*[1], die den griechischen Tonsystemen zugrundeliegt und die als *Quelle und Wurzeln ewiger Natur* angesehen wird, ist durch die Zahlen 6, 8, 9 und 12 wiedergegeben. Am Monochord, einem Instrument mit einer Saite, wurden diese Zahlen zum Erklingen gebracht, indem die Saite in zwölf gleichlange Abschnitte eingeteilt und Saitenlängen jeweils bestehend aus 6, 8, 9 und 12 dieser Abschnitte abgegriffen wurden. Ist die Saite auf E gestimmt, so ergeben sich dabei die Töne e, H, A und E. Den Intervallen Oktave, Quinte und Quarte wurden deshalb die Zahlenverhältnisse $2:1$, $3:2$ und $4:3$ zugeordnet. Die Oktavaufteilung der Tetraktys war Ausdruck der Lehre vom arithmetischen und harmonischen Mittel: *Die Zahl 9 ist das „arithmetische Mittel“ zwischen 12 und 6, d. h. die Differenzen* $12-9$ *und* $9-6$ *sind gleich. Die Zahl 8 ist das „harmonische Mittel“ zwischen 12 und 6, d. h. die Differenzen* $12-8$ *und* $8-6$ *verhalten sich wie 12 zu 6.* Alle vier Zahlen bilden die Proportion $12:9=8:6$, die in ihrer Verbindung von arithmetischem und harmonischem Mittel die „*vollkommenste Proportion*“ genannt wurde.

Die Pythagoräer experimentierten mit dem Monochord und variierten die Länge der unter konstanter Spannung stehenden Saite durch Einschieben eines Steges. Beim Halbieren ergab sich ein zum Grundton harmonischer Oberton. Diesem harmonischen Zusammenklang zweier Töne entsprach das Zahlenverhältnis $1:2$, und in der Musiktheorie bezeichnet man dieses Intervall als Oktave. Entsprechend ihrer philosophischen Grundhaltung, auf die später noch eingegangen wird, lag es nahe, den schwingenden Anteil auf zwei Drittel der ursprünglichen Länge zu verkürzen. Der so erzeugte Ton ergab mit dem Ausgangston einen angenehmen Zusammenklang, der in der Musiktheorie als Quinte bezeichnet wird. Schließlich gaben sie bei ihren Experimenten drei Viertel der ursprünglichen Länge zur Schwingung frei. Der so entstandene Zweiklang hörte sich ebenfalls erträglich an; in der Musiktheorie wird dieses Intervall als Quarte bezeichnet.

Ganz allgemein entspricht dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte das Multiplizieren der entsprechenden Verhältniszahlen. Zur Illustration diene

[1] Vgl. hierzu [12].

das folgende Beispiel:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Quinte} & + & \text{Quarte} & = & \text{Oktave} \\[1ex] \dfrac{3}{2} & \cdot & \dfrac{4}{3} & = & \dfrac{2}{1}\,. \end{array}$$

Die Tastenreihe des Klavieres läßt sich in gewissem Sinne mit dem Prinzip eines Rechenstabes vergleichen. Fügt man dort mittels der verschiebbaren Zunge zwei Strecken mit den Skalenwerten a und b aneinander, so entspricht auf der Stabskala der Skalenwert $c = a \cdot b$ der Streckensumme.

Hingegen ergibt sich zur Charakterisierung des Tonintervalles zwischen Quarte und Quinte bezüglich des gemeinsamen Grundtones der Quotient der Längenverhältnisse, also:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Quinte} & - & \text{Quarte} & = & \text{ganzer Ton} \\[1ex] \dfrac{3}{2} & : & \dfrac{4}{3} & = & \frac{9}{8}\,. \end{array}$$

Das Zusammenwirken von Musik und Mathematik, wie es für die Tetraktys aufgezeigt wurde, bestimmte weitgehend die platonisch- pythagoräische Tonordnung. So gründet sich das bis heute gültige Muster der siebenstufigen Tonleiter auf eine weitere Aufteilung der Tetraktysintervalle. Das Antik-Dorische erhielt man, indem man von den beiden Quarten jeweils von oben her zweimal die große Sekunde 9 : 8 abgriff, was in den uns geläufigen Tonnamen durch folgende Leiter wiedergegeben werden kann:

$$\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{4}{c}{4:3} & \multicolumn{1}{c}{9:8} & \multicolumn{3}{c}{4:3} \\[1ex] \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} & \mathrm{A} & \mathrm{H} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \\[1ex] \multicolumn{1}{c}{256:243} & 9:8 & 9:8 & & 256:243 & 9:8 & 9:8 & \end{array}$$

Neben der Quartenteilung $(9 : 8) \cdot (9 : 8) \cdot (256 : 243) = 4 : 3$, die dem Pythagoras selbst zugeschrieben wird, berichtet Ptolemaios in seiner zusammenfassenden „Harmonielehre“ von einer großen Anzahl von Quartenteilungen, die bei den Griechen mehr oder weniger in Gebrauch waren. Besonders hebt er die Quartenteilungen hervor, die Archytas von Tarent für die drei Tongeschlechter der griechischen Musik vorgeschlagen hat:

$$\begin{aligned} \text{Diatonisch:} \quad & (9:8)\cdot(8:7)\cdot(28:27) &=& \; 4:3 \\ \text{Chromatisch:} \quad & (32:27)\cdot(243:224)\cdot(28:27) &=& \; 4:3 \\ \text{Enharmonisch:} \quad & (5:4)\cdot(36:35)\cdot(28:27) &=& \; 4:3 \end{aligned}$$

Daß dem Zusammensetzen musikalischer Intervalle das Multiplizieren arithmetischer Brüche entspricht, diese Entdeckung war eine große Leistung früher exakter Wissenschaft. Sie hat die Wechselwirkung zwischen Musiktheorie und Mathematik entscheidend bestimmt.

Unter dem Einfluß der aristotelischen Philosophie lockerte sich die Bindung von Musik und Mathematik. Musiktheorie wurde mehr als Einsicht in das Wesen musikalischer Phänomene verstanden, denn als metaphysische Spekulation. Kennzeichnend für diesen Auffassungswandel ist die Darstellung der drei Tongeschlechter durch Aristoxenos, einem Schüler des Aristoteles; er beschreibt die Quartenteilungen in dem phänomenologisch-psychischen Maßsystem von Ganz-, Halb- und Vierteltonstufen:

$$\begin{aligned} \text{Diatonisch:} \quad & 1+1+\frac{1}{2} &=& \; 2\frac{1}{2} \\ \text{Chromatisch:} \quad & 1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} &=& \; 2\frac{1}{2} \\ \text{Enharmonisch:} \quad & 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} &=& \; 2\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Bei Vogelstimmen und anderen Tierlauten beschränken sich die verwendeten Tonintervalle keineswegs auf Oktave, Quinte und Quarte. Sicher gab es schon zur Zeit des Pythagoras einfache Melodien von Volksliedern und Instrumente (z. B. Hirtenflöten) mit einem größeren Tonumfang. Auf die Pythagoräer geht aber der Aufbau einer Tonleiter zurück, bei der die reinen Zusammenklänge von Quinte und Quarte systematisch verarbeitet werden. Für die folgenden Untersuchungen sollen die Intervalle zweier Töne nicht durch das Längenverhältnis der schwingenden Saiten, sondern durch ihre Kehrwerte, also das Verhältnis der Schwingungszahlen, erfaßt werden. Ist ℓ die Länge der schwingenden Saite und f deren Frequenz, so gilt $\ell = \frac{k}{f}$ mit geeignet gewähltem Proportionalitätsfaktor k.

Am Monochord ist die Länge des schwingenden Saitenabschnittes bei konstanter Saitenspannung umgekehrt proportional zur Frequenz. Auf Grund dieser physikalischen Sachverhalte kann damit festgehalten werden: Zwei Tonintervalle sind genau dann gleich, wenn ihre Frequenzen im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Ohne uns bereits jetzt auf absolute Frequenzen festzulegen, können wir für die zunächst nur wichtigen Verhältniszahlen die Bezeichnungen der uns geläufigen C-Dur-Tonleiter übernehmen, also $c - d - e - f - g - a - h - c'$. Bisher haben wir am Monochord über folgende Verhältniszahlen bezüglich des Grundtones c verfügt:

c	f	g	c'	Tonbezeichnung
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	Verhältniszahl
Prime	Quarte	Quinte	Oktave	Intervall.

Es sind also noch vier Leerstellen auszufüllen. Die pythagoräische Tonleiter setzt sich aus fünf großen und zwei kleinen Tonschritten zusammen. Der große Tonschritt wird aus Quarte und Quinte wie folgt erklärt: Setzt man $q_1 = \frac{3}{2}$ und $q_2 = \frac{4}{3}$, so gilt für den großen Tonschritt $q = \frac{q_1}{q_2} = \frac{9}{8}$. Die diesem Verhältnis entsprechende Schrittweite liegt bereits von f nach g vor, ferner wird sie beim Fortschreiten von c nach d, von d nach e sowie von g nach a und von a nach h übernommen. Nun stehen noch die Quotienten offen, welche die Schritte von e nach f und von h nach c' beschreiben. Für beide Intervalle ergibt sich zwangsläufig aus den bisherigen Festlegungen das Zahlenverhältnis $\frac{256}{243}$. Dieser Bruch kann nicht gekürzt werden; wegen der Dreistelligkeit von Zähler und Nenner fällt er etwas aus dem Rahmen. Aber auch in akustischer Hinsicht liefern die Töne keinen guten Zusammenklang. Durch eine Zusammenstellung der Zahlenverhältnisse bezogen auf den Grundton und den nächsttieferen Nachbarton wollen wir uns eine Übersicht zum pythagoräischen Tonsystem zusammenstellen:

Tonbezeichnung:	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c:	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
bezogen auf tieferen Nachbarton:		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

In einer ganzzahligen fortlaufenden Proportion stellt sich dieses Stimmungsprinzip wie folgt dar:

$$384 : 432 : 486 : 512 : 576 : 648 : 729 : 768.$$

Auf kleinere Verhältniszahlen läßt sich diese Tonleiter nicht reduzieren.

Die gleiche Tonleiter kann man sich auch über den sogenannten „Quintenzirkel“ herleiten. Dazu zeichnen wir einen Kreis und teilen diesen in sieben gleiche Teile. Im Uhrzeigersinn werden die Tonbezeichnungen eingetragen, wobei wir mit c vom obersten Teilungspunkt ausgehen wollen. Da sich dieser mit c decken soll, werden wir ihn besonders stark markieren. Nun vollführen wir, von c ausgehend, im Uhrzeigersinn Quintensprünge. Durch Überspringen von je drei Teilungspunkten des Kreises gelangen wir der Reihe nach zu g, d, a, e und h. Bei jedem Sprung multiplizieren wir die zuletzt erreichte Zahl mit $\frac{3}{2}$; wird jedoch bei einem Quintensprung die zu c gehörige Markierung überquert, so lautet der Faktor $\frac{3}{4}$ statt $\frac{3}{2}$. Man sieht, daß auf diese Weise gleichfalls die Verhältniszahlen der pythagoräischen Tonleiter erzeugbar sind. Die noch fehlende Verhältniszahl für f ergibt sich durch eine Quintendrehung entgegen dem Uhrzeigersinn. Wir müssen deshalb die zu c gehörige Verhältniszahl mit dem Kehrwert von $\frac{3}{2}$ multiplizieren und – da dieser Sprung als Überschreitung der Markierung zu werten ist – noch mit dem Faktor zwei versehen. Ferner ist zu bemerken, daß sich der Quintenzirkel nicht exakt schließt. Nach dem beschriebenen Verfahren lassen sich zwar die zu sieben Tönen der Tonleiter gehörigen relativen Schwingungszahlen exakt auffinden, jedoch kann die zu c' gehörige Zahl 2 nach dem hier beschriebenen Verfahren nicht konstruiert werden.

Teilt man nun die fünf großen Intervalle der pythagoräischen Tonleiter in je zwei Teilintervalle, so sind beim Durchlaufen der Oktave von c nach c' insgesamt

12 Tonschritte auszuführen. Bei Tasteninstrumenten erkennt man bereits an der Klaviatur die Einschaltung der fünf Zwischentöne. Führen wir nun entsprechend der hier vorgelegten Tonleiter mit unserem Zirkel zwölf Quintendrehungen im Uhrzeigersinn durch und beachten, daß beim Überqueren der c-Marke der Faktor $\frac{3}{4}$ und sonst $\frac{3}{2}$ zu setzen ist, so ergibt sich als Endwert

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{531441}{524288} = 1.0136.$$

Hätte sich der Quintenzirkel nach 12 Sprüngen, d.h. 7 Umläufen, exakt geschlossen, wären wir auf die Zahl Eins gekommen. Das diese Abweichung charakterisierende Zahlenverhältnis (531441 : 524288) nennt man in der Musiktheorie das „pythagoreische Komma“. Durch diesen Quotienten wird also das Intervall zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave bezüglich eines gemeinsamen Grundtones zahlenmäßig erfaßt. Das hier erläuterte Stimmungsprinzip, nach welchem alle Töne aus einer Quintenreihe abgeleitet werden, heißt pythagoreisches Stimmungsprinzip.

Das alles ist aber keineswegs nur von theoretischer oder musik- geschichtlicher Bedeutung. Vor allem bei solistischen Darbietungen an Streichinstrumenten neigen die Künstler zur Verwendung dieser pythagoreischen Tonstufen. Sie heben den melodiösen Klang der Musik. Auch der Klavierstimmer arbeitet, von c ausgehend, mit Quintensprüngen und Oktaven, wobei allerdings gewisse Feinkorrekturen in Anpassung an die noch zu besprechende temperierte Stimmung vorzunehmen sind. Über alle Tonlagen hinweg hat das geschulte Ohr ein sicheres Empfinden für die Oktave und die Quinte. Diese numerischen Betrachtungen können uns einen Einblick in die Probleme vermitteln, die beim Instrumentenbau hinsichtlich des harmonischen Zusammenklanges vieler Instrumente in einem großen Klangkörper zu bewältigen sind.

3 Johannes Keplers „Planetenmusik“

Nach den Vorstellungen der Pythagoräer[2] regulieren Zahlenverhältnisse die Töne, genauer gesagt die Tonhöhen. Die Musik ist ein Teil der Welt, die ihrerseits durch Zahlenbeziehungen beschreibbar wird – und nicht zuletzt durch die Zahlenverhältnisse auf die Proportionen der Musik wirkt. Zahlenverhältnisse treten bei allen Teilen der Welt auf, auch im astronomischen Bereich. Deren Verbindung zur Musik und deren Zahlenproportionen interessierte Johannes Kepler. Kepler, der zu Recht als der Begründer der modernen Astronomie genannt wird, verbindet auf eine eigenartige Weise empirisches Wissenschaftsdenken und pythagoräische Zahlenspekulation. Auch er sucht nach Proportionen, mit deren Hilfe man die Planeten zueinander in Beziehung setzen könnte – und fragt nach der Musik, die die Planeten erzeugen.

In seiner berühmten „Weltharmonik“ errechnet Kepler aus den bekannten Umlaufzeiten der Planeten und den vorliegenden Geschwindigkeiten die relativen Abstände und ordnet jedem Planeten eine relative Umlaufgeschwindigkeit zu – und darüber die zugehörigen Töne.

Außerdem erhält jeder Planet einen eigenen Ton. Da sich die Planeten auf Ellipsenbahnen bewegen und damit sich einmal im Perihel (P), ein andermal im Aphel (A) bewegen, berechnet Kepler aus der maximalen und der minimalen Geschwindigkeit das jedem Planeten eigene Intevall.

Erde	Mars	Saturn	Jupiter	Venus	Merkus
$\frac{27}{28}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{80}{81}$	$\frac{3}{4}$
$<$ Diesis	Mollterz	kl. Ganzton	kl. Ganzton	synt. Komma	Quarte

Und die Intevalle zwischen den Planeten entsprechen den Intevall:

[2] Vgl. hierzu [1].

Saturn (A)	–	Jupiter (P)	1 : 3	Okatve plus Quinte
Saturn (P)	–	Jupiter (A)	1 : 2	Okatve
Jupiter (A)	–	Mars (P)	1 : 8	drei Okatven
Jupiter (A)	–	Mars (A)	5 : 24	Zwei Okatven plus kleine Terz
Mars (A)	–	Erde (P)	5 : 12	Okatve plus kleine Terz
Mars (P)	–	Erde (A)	2 : 3	Quinte
Erde (A)	–	Venus (P)	3 : 5	große Sexte
Erde (P)	–	Venus (A)	5 : 8	kleine Sexte
Venus (A)	–	Merkur (P)	1 : 4	zwei Okatven
Venus (P)	–	Merkur (A)	3 : 5	große Sexte

4 Mathematik und Orgelspiel

Bei einer Orgel werden Pfeifen gleicher Klangfarbe zu Registern zusammengefasst. Jedes Register umfasst in der Regel 56 Pfeifen unterschiedlicher Tonhöhe. Bei gleicher Bauart der Pfeifen (offen, geschlossen) hängt die Höhe des erzeugten Tones von ihrer Länge ab: je länger die Pfeife, desto tiefer der Ton. In einem Orgelregister ist die auf den Ton c gestimmte Pfeife etwa 130 cm lang. Der um eine Oktave höhere Ton c' wird von einer halb so langen Pfeife erzeugt. Die Pfeifen für die elf dazwischenliegenden Töne sind so bemessen, dass benachbarte Pfeifen jeweils dasselbe Längenverhältnis haben. Wie lang sind die einzelnen Pfeifen, und wie geht es weiter?

Die Längenmaßzahlen gehören zu einer geometrischen Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ mit $a_1 = 130$ cm. Die 13. Pfeife ist halb so lang wie die erste. Deshalb lässt sich q aus der Gleichung $a_1 \cdot q^{12} = 0.5 \cdot a_1$ bestimmen. Es ist $q = \sqrt[12]{0.5} \approx 0.9439$.

Wie es weitergeht ist anschaulich klar: Die 26. Pfeife ist wieder halb so lang wie die 13. Pfeife, hat also 25 % der Länge der ersten Pfeife. Die Pfeifen werden also mit zunehmender Tonhöhe immer kürzer. Schließlich werden (theoretisch) Töne im Ultraschallbereich erzeugt, die Pfeifenlänge sinkt unter jede vorgegebene positive Zahl und schrumpft bei beliebig hohen Tönen auf Null zusammen. Negative Werte dagegen sind unmöglich. Die Länge Null gilt daher als **Grenzwert** der Pfeifenlängen.

Die Folge a_n (wobei $n \in \mathbb{N}$) heißt **Nullfolge**, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Nummer n_0 gibt, sodass für alle Folgenglieder mit höherer Nummer, also $n > n_0$, gilt $|a_n| < \varepsilon$. Man schreibt auch:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

und sagt, die Folge a_n **konvergiert** gegen Null.

5 Töne und Tonleiter

Bestimmte Tonintervalle[3] – z. B. Quinte und Oktave – werden vom menschlichen Gehör als besonders harmonisch empfunden. Die zugehörigen Tonfrequenzen stehen in festen ganzzahligen Verhältnissen zueinander. Bei der Festlegung der Tonleiter strebte man an, zu jedem Ton auch die Quinte in ihr zu haben. Die Näherungslösung für das mathematische Problem wird durch Anwendung von Logarithmen, Kettenbruchentwicklung und Expoentialfunktion gewonnen.

Im Gegensatz zur Musik zahlreicher außereuropäischer Völker spielt in der europäischen Tradition die mehrstimmige Musik eine wichtige Rolle. Der Zusammenklang mehrerer Töne wird vom menschlichen Gehör als angenehm empfunden, wenn ihre Frequenzen in ganzzahligem Verhältnis zueinander stehen. Bei der Oktave zum Beispiel beträgt das Frequenzverhältnis $2:1$, bei der Quinte $3:2$, bei der Quarte $4:3$. In der bei uns gebräuchlichen temperierten Tonleiter ist zu jedem Ton auch die Quarte, die Quinte und die Oktave enthalten. Die mathematische Analyse zeigt, daß bei der Entwicklung dieser Tonleiter durch musikalische Intuition ein mathematisches Optimierungsproblem gelöst wurde.

Um zu einem Grundton die Quinte zu erhalten, muß man seine Frequenz mit $\frac{3}{2}$ multiplizieren, Multiplikation mit $\frac{4}{3}$ liefert die Quarte. Die Multiplikation eines Tones mit $\frac{1}{2}$ bedeutet einen Sprung um eine Oktave nach unten.

Springt man vom Grundton aus um zwei Quinten aufwärts, formal $1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$ so wird die Oktave überschritten. Um ins ursprüngliche Intervall zurückzugelangen, springt man deshalb eine Oktave zurück, multipliziert also mit $\frac{1}{2}$: $1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(1 \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}$.

Ziel ist es, nach m Quintensprüngen aufwärts und n Oktavsprüngen abwärts wieder zur Grundfrequenz zu gelangen. Gesucht ist also ein gemeinsames Maß von Quinten- und Oktavsprüngen.

Mathematisch formuliert: Gesucht sind m und n, so daß:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3^m \cdot 1^n}{2^m \cdot 2^n} = \frac{3^m}{2^{m+n}} = 1.$$

[3] Vgl. hierzu [4].

Exakt kann die Bedingung nicht erfüllt werden, weil eine 3er-Potenz niemals gerade ist. Gesucht ist also eine möglichst gute Näherung.

Aus $3^m = 2^{m+n}$ folgt

$$m \cdot \log 3 = (m+n) \cdot \log 2,$$

oder

$$\frac{m+n}{m} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0.4771}{0.3010} = \frac{4771}{3010}.$$

Um eine gute Näherung für den Bruch mit ganzen Zahlen zu finden, wird er als Kettenbruch entwickelt:

$$\frac{4771}{3010} = 1 + \frac{1761}{3010} = 1 + \frac{1}{\frac{3010}{1761}},$$

$$1 + \frac{1}{\frac{3010}{1761}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1249}{1761}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}}.$$

Die verschiedenen Stufen der Kettenbruchentwicklung liefern folgende Näherungswerte:

① $$1 = 1$$

② $$1 + \frac{1}{1} = 1$$

③ $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

④ $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{8}{5}$$

⑤ $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{12}$$

⑥ $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}} = \frac{65}{41}$$

Die fünfte Näherungsstufe liefert

$$\frac{m+n}{m} \approx \frac{19}{12}, \text{ also } m = 12.$$

Teilt man die Oktave in 12 (musikalisch: Halbton-) Intervalle, so ist die obengenannte Bedingung näherungsweise erfüllt. 12 Oktavsprünge entsprechen 19 Quintensprünge. Man sieht, daß dies unabhängig von der Wahl des Grundtones ist.

Die vierte Näherungsstufe würde mit nur fünf Tönen in der Oktave zu wenig Auswahl bieten. Mit 41 Tönen hätte die sechste Näherungsstufe unhandlich viele Zwischenstufen. Deshalb hat man bei uns die Teilung der Oktaven in 12 Intervalle gewählt.

Frequenz und Wellenbeziehungen in der Tonleiter

In der Tonleiter soll das Verhältnis zweier aufeinander folgender Frequenzen (Halbtöne) gleich sein. Es soll also, numeriert man die Töne $T_1, T_2, \ldots, T_{12}$ durch, gelten:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_3}{T_4} = \ldots = \frac{T_{12}}{2T} = k.$$

Für die Konstante k ergibt sich daraus der Wert $k = 2^{1/12}$.

Jetzt kann man die Frequenzbeziehungen berechnen, entweder bezogen auf den Grundton mit der Frequenz 1 oder auf den Kammerton A mit der Frequenz

440 Hertz. Ebenso kann man die Beziehungen zwischen den Saitenlängen bei einem entsprechenden Musikinstrument ausrechnen. Dies alles ist in der Tabelle dargestellt.

	Frequenzen		Wellenlängen
	$\gamma(T) = 1\ \mathrm{s}^{-1}$	$\gamma(A) = 435\ \mathrm{s}^{-1}$	$\lambda(T) = 1$
T_1	1	440	1
T_2	1.0595	466	0.944
T_3	1.1222	494	0.891
T_4	1.189	523	0.841
T_5	1.260	554	0.794
T_6	1.335	587	0.749
T_7	1.414	622	0.707
T_8	1.498	659	0.667
T_9	1.587	698	0.630
T_{10}	1.682	740	0.595
T_{11}	1.782	784	0.561
T_{12}	1.888	831	0.530
T_{13}	2.000	880	0.500

Beim Aufstellen der Tabelle im Unterricht leistet natürlich der Taschenrechner wertvolle Hilfe. Anschließend kann man sich auch noch vergewissern, daß zu jedem Ton auch die Quinte und die Quarte in der Tonleiter enthalten sind. Da die Konstruktion ja von einer Näherung ausging, werden sich im mathematischen Sinne keine „genauen" Beziehungen ergeben. Die Grenze einer sinnvollen Genauigkeit liegt bei der Fähigkeit des menschlichen Gehörs, Töne nahe beieinanderliegender Frequenz als verschieden zu empfinden. Die Empfindlichkeitsgrenze liegt, abhängig von der Frequenz, von Alter und Übung des Hörenden bei 0.3 % im Bereich von 1000 Hertz.

Die Ausführungen zur Konstruktion der Tonleiter lassen sich zu Anfang des 11. Schuljahres vielseitig nutzen. Neben einem Rückgriff auf Logarithmus und Exponentialfunktion bieten sie einen ersten Aspekt der Approximation und damit einen anschaulichen Einstieg in Probleme der Analysis. Praktisch bedeutsam ist die Kettenbruchentwicklung auch heute noch bei der Dimensionierung z. B. von

Zahnradgetrieben, bei der oft Näherungen mit möglichst kleinen Zahlen gefordert sind.

Ausgangspunkt für den Unterricht kann etwa die Untersuchung einer Gitarre darstellen. Warum sind die Bundstege so und nicht anders angeordnet? Die multiplikative Teilung des Intervalls läßt sich direkt messend nachvollziehen. Vielleicht besteht bei den Schülern auch Interesse, ein Saiteninstrument selbst zu bauen.

Auch zur Dimensionierung der Bauteile eines elektronischen Klangerzeugers sind die mathematischen Überlegungen hilfreich. Man kann auch – etwas aufwendiger – vielleicht in Zusammenarbeit mit dem Physikunterricht mit dem Oszilloskop Frequenzverhältnisse bestimmen.

Vielleicht bietet es sich auch an, einfach fragmentarisches Vorwissen aus dem Musik- und Physikunterricht aufzugreifen und zu systematisieren. Das Thema läßt sich natürlich beliebig ausweiten, aber dazu sei auf die Literatur verwiesen.

6 Musikalische Stimmungen – Arnold Schönbergs „Harmonielehre“ mathematisch betrachtet

Physikalisch[4] läßt sich ein Ton neben der Lautstärke (die hier nicht diskutiert werden soll) durch seine Höhe beschreiben, und ein Klang (Akkord) durch die Höhen der dabei zusammenklingenden Töne. Die Tonhöhe hängt mit der Frequenz der zugehörigen Schallwelle wie folgt zusammen: Je höher der Ton. desto höher die Frequenz. Und ein harmonisch klingender Akkord stellt eine Resonanz der darin klingenden Töne dar. Diese Resonanz, ist besonders dann ausgeprägt, wenn die Verhältnisse der Frequenzen der Töne zueinander kleine natürliche Zahlen oder zumindest rationale Zahlen mit kleinem natürlichen Zähler und Nenner sind. Je näher die Frequenzverhältnisse an diesen Resonanzverhältnissen liegen, desto harmonischer klingt der Akkord.

Wir stellen uns ein Tasteninstrument vor, und jeder Taste soll ein bestimmter Ton einer bestimmten Frequenz zugeordnet werden. Wenn alle Frequenzen mit einer bestimmten festen Zahl multipliziert werden, ändert sich an den harmonischen Verhältnissen überhaupt nichts; deshalb werden wir keine absoluten Frequenzen, sondern nur Frequenzverhältnisse zu betrachten haben. Genauer: Wir bezeichnen eine beliebige Taste als Grundton, und jeder Taste ordnen wir dann die Zahl F zu, die das Frequenzverhältnis zwischen dieser Taste und dem Grundton ist.

Der Grundton soll hier stets der tiefste Ton eines Akkords sein, so daß stets ≥ 1 gilt. Das menschliche Ohr ist für Frequenzen von 16 Hz bis 32000 Hz empfindlich, also ist es sinnvoll sich gleich auf den Bereich $F \geq 2000$ zu beschränken.

Die natürliche Stimmung

Für die natürliche Stimmung werden die natürlichen Zahlen $F \geq 1$ verwendet. $F = 1$ ist definitionsgemäß der Grundton, für $F > 1$ ist F der $(F-1)$-te Oberton, Speziell liegt der 1. Oberton genau eine Oktave über dem Grundton, hat also doppelte Frequenz: der 2. Oberton liegt eine Duodezime über dem Grundton, also

[4] Vgl. hierzu [11].

ein Quinte über dem 1. Oherton und hat die dreifache Frequenz. Mit f bezeichnen wir das Frequenzverhältnis zweier Töne, es stimmt mit dem Verhältnis der zugehörigen F-Werte überein. Durch Vergleich des ersten und zweiten Obertons erkennt man, daß die Quinte dem Wert $f = \frac{3}{2}$ zugeordnet ist.

Die wohltemperierte Stimmung

Für die wohltemperierte Stimmung (also sauberes Spiel in allen Tonarten möglich), müssen die Abstände aufeinanderfolgender Töne, d. h. deren Frequenzverhältnisse, einander gleich sein: Die den einzelnen Tasten zugehörigen Zahlen F sind also alles Glieder einer geometrischen Folge. Aus der Forderung, daß die Oktave rein sein soll, folgt, daß die Zahl 2 in dieser geometrischen Folge vorkommen muß. Es besteht jetzt nur noch die Freiheit in der Wahl der charakteristischen Zahl n, die angibt, in wieviele Teile die Oktave zerteilt wird: beim Klavier ist $n = 12$, das ist die klassische 12-Ton-Musik. Wir wollen jetzt der Bemerkung Schönbergs nachgehen, daß die 53-Ton-Musik eine wesentlich reinere Quinte hat als das wohltemperierte Klavier.

Quinte

Da die Oktave definitionsgemäß rein ist, ist die Quinte als Intervall vom ersten zum zweiten Oberton der erste Fall, bei dem die natürliche Stimmung von der wohltemperierten Tastaturstimmung abweicht. Es ist deshalb eine sinnvolle Forderung an ein zu entwickelndes System von Stimmungen, daß die Quinte möglichst rein sein soll. Und genau nach diesem Kriterium teill Arnold Schönherg die Stimmungen ein.

Die n-Ton-Musik

Bei der n-Ton-Musik entspricht ein Tonschritt einem Frequenzverhältnis von $f = \sqrt[n]{2}$, da n Tonschritte dann gerade die geforderte Frequenzverdoppelung ergeben. m Tonschritte in der n-Ton-Musik entsprechen dann einem Wert

$$f = 2^{\frac{m}{n}}. \tag{6.1}$$

Bei welchen Werten m und n ist nun eine gute Quinte erreicht? Wir schreiben dazu die Quinte als

$$\frac{3}{2} = 2^x \tag{6.2}$$

daraus ergibt sich nach Logarithmieren und einfachen Umformungen[5]:

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1 = 0.5849625\ldots$$

Nun ist x keine rationale Zahl[6], also gibt es, wie ein Vergleich von Formel (6.1) und (6.2) zeigt, überhaupt keine ganz reine Quinte. Es kommt nun darauf an, solche Werte m und n zu finden, dass $\frac{m}{n}$ eine gute Näherung für x darstellt. Man könnte natürlich n sehr groß wählen und dann m passend dazu, daß es recht genau wird. Es soll aber ein nicht allzu unübersichtliches Tastenfeld geben; speziell sollten also diejenigen mäglichst kleinen Werte n gefunden werden, für die ein m existiert, so daß $\frac{m}{n} = x$ recht genau gilt.

Die Kettenbruchentwicklung

Das hier vorliegende Problem, nämlich zu einer irrationalen Zahl Näherungsbrüche zu finden, bei denen der Nenner nicht allzu groß wird, wird durch die Kettenbruchentwicklung der Zahl x gelöst. Sie lautet

$$x = [1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, \ldots]. \tag{6.3}$$

---

[5]Die Gleichheit der Werte x in Formel (6.2) beweisen wir wie folgt: Wir wenden ln auf beide Seiten der ersten Formel für x an, erhalten also $\ln(\frac{3}{2}) = \ln(2^x)$; nach den Logarithmengesetzen ist das $\ln 3 - \ln 2 = x \ln 2$, und nach Division durch $\ln 2$ entsteht die angegebene zweite Formel.

[6]Daß x nicht rational sein kann, bweisen wir indirekt: Angenommen, $x = \frac{p}{q}, p, q$ natürlich, $q \geq 1$. Dann ist Formel (6.2) als $\frac{3}{2} = 2^{p/q}$ schreibbar. Wir multiplizieren mit 2 und heben in die q-te Potenz; es entsteht $3^q = 2^{p+q}$. Links steht eine ungerade, rechts eine gerade natürliche Zahl. Widerspruch.

Das entspricht den einzelnen Teilbrüchen

$$\begin{aligned}
x(1) & & = & \quad 1 \\
x(2) = & \quad \frac{1}{1+1} & = & \quad \frac{1}{2} \\
x(3) = & \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2}} & = & \quad \frac{3}{5} \\
x(4) = & \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} & = & \quad \frac{7}{12} \\
x(5) & & = & \quad \frac{24}{41} \\
x(6) & & = & \quad \frac{31}{53} \\
x(7) & & = & \quad \frac{179}{306} \\
& & \vdots &
\end{aligned}$$

Zur Bewertung der jeweiligen Genauigkeit seien die Fehler der Quinte angegeben (siehe Tabelle).

i	1	2	3	4	5	6	7
$x(i) - x$	0.41	−0.085	0.015	−0.0016	0.0004	−0.00006	0.000005

$x(1)$ und $x(2)$ kann man noch nicht als Näherung ansehen: Oktave bzw. Tritonus[7] haben nichts mit einer Quinte zu tun. Mit $x(3)$ ist die Quinte als 3-Ton-Abstand einer 5-Ton-Musik nur 2.6 % verkehrt $\left(\frac{x(3)-x}{x}\right)$, und mit $x(4)$ ist die Quinte als 7 Tonschritte der klassischen 12-Ton-Musik nur 0.27 % verkehrt. $x(5)$ wird sicher keine Rolle spielen, da der nur unwesentlich kompliziertere Bruch $x(6)$ eine erheblich genauere Quinte aufweist. $x(7)$ und weiter erfordern eine Einteilung der Oktave in mehr als 300 Teiltöne, was praktisch kaum Bedeutung haben wird. Damit bleibt $x(6) = \frac{31}{53}$ die einzig akzeptable Alternative zur 12-Ton-Musik: 31

[7] Es ist $2^{x(2)} = \sqrt{2}$, und dies Frequenzverhältnis entspricht drei Ganztonschritten, z. B. von C bis Fis, daher die Bezeichnung Tritonus.

Tonschritte in der 53-Ton-Musik sind also genau die von Schönberg angegebene sehr genaue Quinte.

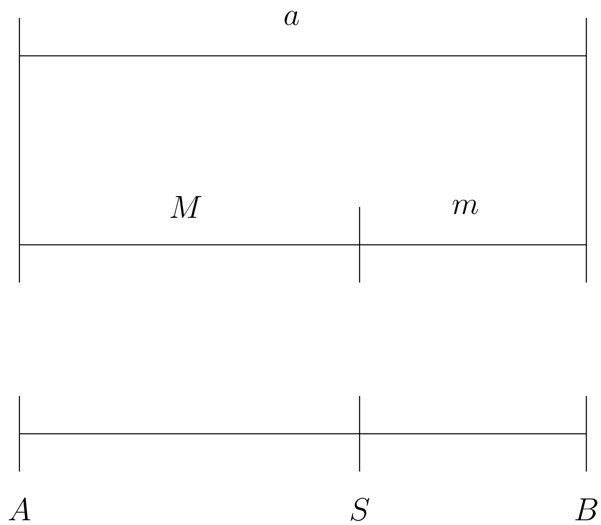
Aus der Theorie der Kettenbrüche folgt, daß eine Erhöhung der Tonzahl n nur dann eine Verbesserung in der Quinte bringt, wenn man mindestens bis zum nächsten Kettenbruchnenner erhöht, speziell folgt also: Unter allen Stimmungen, bei denen die Oktave in höchstens 300 gleiche Teile zerlegt wird, ist die 53-Ton-Musik diejenige mit der genauesten Quinte. Unter allen Stimmungen, bei denen die Oktave in höchstens 40 gleiche Teile zerlegt wird, ist die 12-Ton-Musik diejenige mit der genauesten Quinte; „genaueste“ heißt „es gibt keine genauere“, natürlich hat die 36-Ton-Musik, wo in der 12-Ton-Musik jedes Intervall noch einmal dreigeteilt wird, eine ebenso gute Quinte. Der Fehler der Quinte in der 12-Ton-Musik ist etwa 30 mal so groß wie der Fehler in der 53-Ton-Musik.

7 Der „Goldene Schnitt“ in der Musik

7.1 Mathematische Grundlagen zum Goldenen Schnitt

Definition (Goldener Schnitt)[8]. *Sei a die Länge der Strecke $\overline{AB}$. Ein Punkt S teilt diese im Goldenen Schnitt, falls sich die größere Teilstrecke (Major M) zur kleineren (Minor m) verhält wie die Gesamtstrecke zum größeren Teil:*

$$M : m = a : M.$$



Der Begriff „Goldener Schnitt“ wird hier einmal für den Vorgang der Teilung (die Konstruktion) und auf der anderen Seite für sein Ergebnis (den Teilungspunkt S) benutzt. Ferner bezeichnet $\mu = \frac{M}{m}$ das Verhältnis des Goldenen Schnittes, das die betreffende Längenverhältnis angibt. Man erhält

$$x = (M + m) : M. \tag{7.1}$$

Betrachten wir (7.1). Man erhält

$$x = \frac{M + m}{M} \Leftrightarrow x = \frac{M}{M} + \frac{m}{M} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{m}{M}$$

also

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

[8] Vgl. hierzu [15].

was

$$0 = x^2 - x - 1 \tag{7.2}$$

liefert. Lösung von (7.2) ist

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

wobei $x_2 < 0$ entfällt. Damit erhält man das charakteristische Verhältnis des Goldenen Schnittes zu

$$\mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339.$$

Mit diesem Wert läßt sich nun die Proportion gegebener Streckenpaare prüfen oder die Lage von Teilungspunkten berechnen.

7.2 Fibonacci-Reihen

Im mathematisch dunklen Mittelalter lebte der bedeutendste Mathematiker Leonardo von Pisa (1170-1240) oder „Fibonacci“ genannt. Fibonacci bedeutet zu deutsch Sohn des Gutmütigen und er verwendete den Übernamen ’bonaccio’ seines Vaters. Leonardo von Pisa hat u. a. wesentlichen Anteil an der Durchsetzung des Dezimalsystems, welches er auf seinen weiten Reisen als Kaufmann kennenlernte. Kaiser Friedrich II. schenkte, aufgrund seiner Werke ihm Aufmerksamkeit, sodass er wiederholt am kaiserlichen Hof weilte. Im Jahre 1202 veröffentlichte er sein 459 Seiten starkes *Liber Abaci*, ein einzigartiges Sammelwerk der Rechenkunst. Dieses Buch enthält eine Fülle von Aufgaben über Folgen, Reihen, quadratische Gleichungen, Kubikwurzeln usw. und bildete Jahrhunderte lang ein Standardwerk unter den Mathematiklehrbüchern. In diesem Werk behandelte Fibonacci die „Kaninchenaufgabe“, wie viele Kaninchenpaare im Laufe eines Jahres aus einem Paar entstehen. Annahme war, dass jedes Paar allmonatlich ein neues Paar zeugt, welches selbst vom 2. Monat an zeugungsfähig wird, während Todesfälle nicht auftreten sollten. Hat man im 1. Monat ein neugeborenes Paar (N), so wird im 2. Monat ein zeugungsfähiges Paar (Z), im 3. Monat sind es 2 Paare (P), nämlich $1N$ und $1Z$, im 4. Monat $3P$, nämlich $1N$ und $2Z$. Bezeichnet man die Zahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat mit F_n, so ist

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ für } n = 1, 2, \dots, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Diese Fibonacci-Zahlen (F_n) sind das älteste bekannte und nichttriviale Beispiel einer induktiv definierten Zahlenfolge. Zahlreiche Anwendungen finden sich in der Mathematik und Naturwissenschaft, u. a. in der Botanik bei der Beschreibung der Schuppenbelegung von Tannenzapfen und Ananasfrüchten und in der mathematischen Theorie zur Vererbung. Soviel zur Motivation des Stoffgebietes.

Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = 1$, $a_1 = 1$ und

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

heißt *Fibonaccifolge*, benannt nach Leonardo Fibonacci (1170-1240, Pisa), die a_n bezeichnen wir mit Fibonacci Zahlen. Diese Zahlen sehen so aus:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Die Frage, die sich stellt, ist, ob man die a_n **direkt**, also in geschlossener Form, berechnen kann. Diese Frage kann mit ja beantwortet werden. Es gib zwei Ansätze:

Ansatz 1: Setze $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann ist

$$a_{n+2} = q^{n+2} = a_{n+1} + a_n = q^{n+1} + q^n.$$

Durchdividieren dieser Gleichung mit q^n liefert

$$q^2 = q + 1 \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0$$

und somit

$$q_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ansatz 2: Hierbei geht man per Linearkombination vor. Es gilt

$$a_n = a_+ q_+^n + a_- q_+^n + a_- q_-^n \text{ wobei } a_+, a_- \in \mathbb{R}.$$

Starte nun mit Rekursion

$$a_0 = a_+ q_+^0 + a_- q_-^0.$$

Dieses ist aber

$$1 = a_+ + a_-.$$

Nun starte man mit a_1 und es ergibt sich

$$a_1 = 1 = a_+ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + a_- \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

und daraus folgt

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

und

$$a_- = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Die Zahl

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bezeichnen wir mit dem *Goldenen Schnitt*.

Der Quotient zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen beschreibt näherungsweise den Wert des Goldenen Schnittes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mu.$$

Man erhält

a_n	$c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$	μ'
1	$\frac{1}{1}$	1
1	$\frac{2}{1}$	2
2	$\frac{3}{2}$	1.5
3	$\frac{5}{3}$	1.666667
5	$\frac{8}{5}$	1.6
8	$\frac{13}{8}$	1.625
13	$\frac{21}{13}$	1.615389
21	$\frac{34}{21}$	1.619048
34	$\frac{55}{34}$	1.617648
55	$\frac{89}{55}$	1.618182
89	$\frac{144}{89}$	1.617978
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Eine gute Näherung erhält man bereits für das Zahlenverhältnis 8 : 5.

7.3 Intervallproportionen und Frequenzverhältnisse

In der Harmonik wird der Goldene Schnitt allgemein wegen seiner Näherungswerte 3 : 5 oder 5 : 8 als ein Sext- oder auch Terz-Sext-Phänomen bezeichnet. Die Zahlenverhältnisse stellen die Fibonacci-Reihe dar. Jetzt stehen diese für ein bestimmtes Intervall – die Sexte.

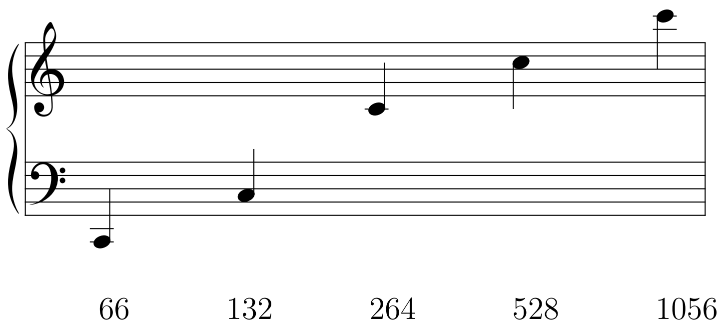
Die Intervalle sind seit der Antike durch einfache rationale Zahlenverhältnisse festgelegt, wobei es einen Zusammenhang zwischen bestimmten Proportionen und Intervallen gibt. Heute gelten folgende Proportionen:

15 : 16	kleine Sekunde
8 : 9	große Sekunde
5 : 6	kleine Terz
4 : 5	große Terz
3 : 4	Quarte
2 : 3	Quinte

32 : 45	Tritonus
5 : 8	kleine Sexte
3 : 5	große Sexte
5 : 9	kleine Septime
8 : 15	große Septime
1 : 2	Oktave

Vergleicht man das menschliche Ohr von Laien mit dem Ohr von Berufsmusikern so kann man feststellen, dass auch das menschliche Ohr von Laien eine Abweichung von einem Viertelton mühelos wahrnehmen kann. Als Beispiel soll die Oktave dienen, indem eine Saite durch einen Steg in der Mitte (1 : 2) geteilt wird. Verschiebt man nun diesen Steg und läßt ihn durch eine Versuchsperson durch aufmerksames Hinhören in seine ursprüngliche Lage zurückdirigieren, so stellt man fest, dass die Fehlerquellen nicht höher als 1 Promille liegen. Auch bei Quinte (2 : 3) und Quarte (3 : 4) läßt sich eine derartige Exaktheit erzielen, jedoch nicht bei den Terzen. Aus diesem Grund werden z. B. alle Streichinstrumente nur in Quinten und Quarten gestimmt.

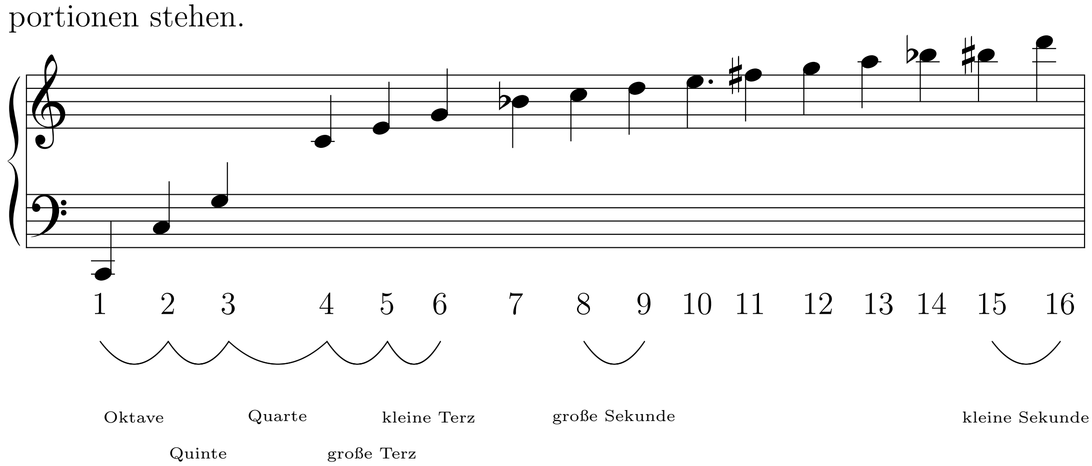
Auch die Proportionen der Intervalle kann man in Frequenzverhältnissen darstellen. Auch hier betrachten wir die Oktave (1 : 2), wobei das große C mit einer Frequenz $\nu = 66$ Hz erklingt. Hingegen erklingt das kleine c mit doppelter Frequenz, also $\nu = 132$ Hz.



Die Zahlen unter den Tönen sind die Frequenzen, welche in Schwingungen pro Sekunde gemessen werden (Hertz)

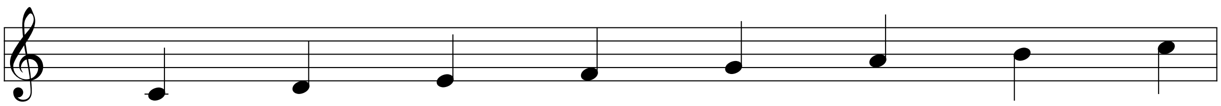
Die Oktave vom kleinen c zum eingestrichenen c verdoppelt die Frequenz wiederum, vom großem C hat sie sich dann bereits vervierfacht. Die Frequenzverhältnisse der anderen Intervalle stimmen ebenfalls mit den entsprechenden Intervallproportionen überein.

Bei der Reihe der Obertöne, welche durch eine schwingende Saite erzeugt werden, ist erkennbar, in welchem Zusammenhang die Intervalle mit ihren Proportionen stehen.



Betrachtet man die Proportionen 3 : 5 : 8 so stellt man fest, dass dieses Zahlengebilde den Tönen g-e-c entspricht, wobei der Zusammenhang zwischen der Harmonik und dem Goldenen Schnitt deutlich wird. Betrachtet man die Tonleiter auf diesen Frequenzverhältnissen, so stellt man folgendes Problem fest

C-Dur Tonleiter:



Frequenz in Hz	264		297		330		352		396		440		495		528
Frequenzverhältnisse		9:8		10:9		16:15		9:8		10:9		9:8		16:15	

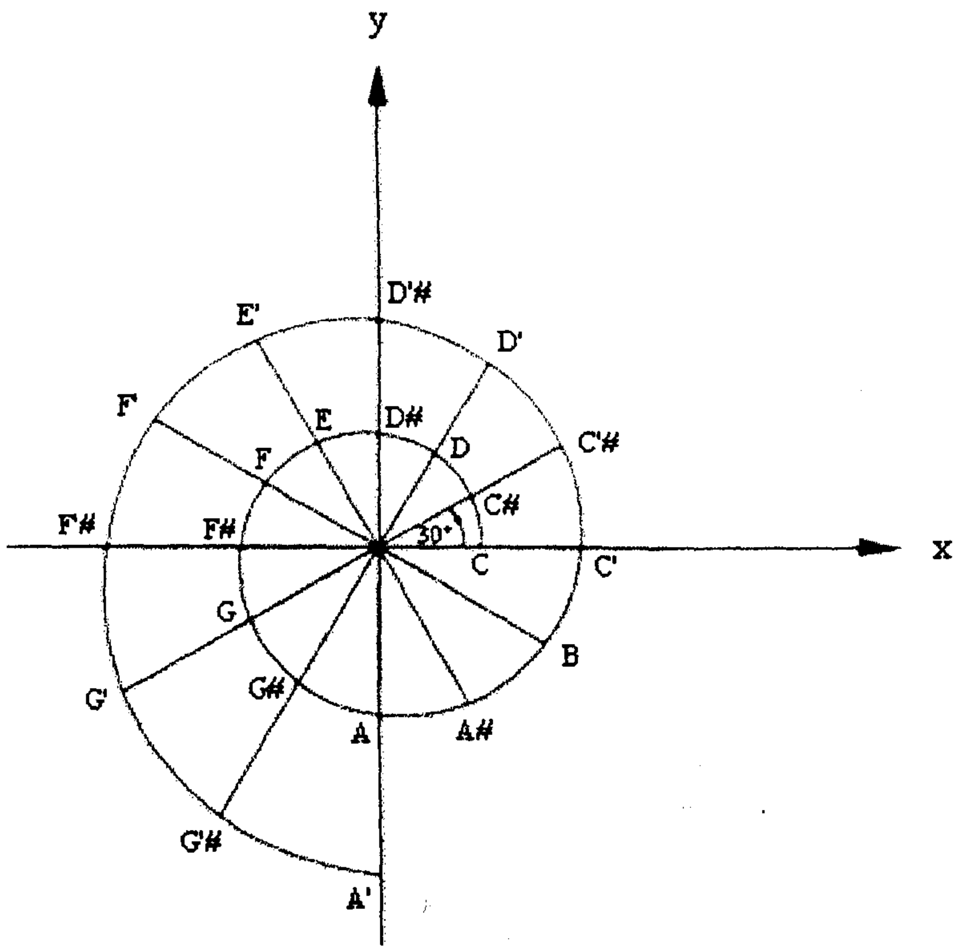
Eine aus diesen Verhältnissen aufgebaute Tonleiter besteht aus den drei Grundintervallen $9 : 8$, $10 : 9$ und $16 : 15$, wobei die beiden ersten Intervalle einem Ganzton bzw. einer großen Sekunde entsprechen. Das dritte Verhältnis wird als Halbton bzw. kleine Sekunde bezeichnet. Geht man die Tonleiter vom Ton C ausgehend aufwärts, so sind die ersten beiden Intervalle jeweils Ganztöne mit unterschiedlichen Frequenzverhältnissen. Der erste Ganzton von C nach D entspricht dem Verhältnis $9 : 8$; der zweite Ganzton von D nach E $10 : 9$. Auch beim oberen Tetrachord der Tonleiter stellt man das gleiche Phänomen fest. Nur die beiden Halbtonschritte (von E nach F und von H nach C) haben die gleichen Frequenzverhältnisse von $16 : 15$. Man sieht, dass für ein und dasselbe Intervall zwei verschiedene Frequenzverhältnisse existieren. Durch die temperierte Stimmung, wie in der Musik durchgeführt, wurde dieses Problem beseitigt. Man teilt die Okatve in zwölf gleiche Abstände, welche den zwölf Halbtonschritten entsprechen. Dabei unterscheidet man zwischen der reinen Stimmung, die den natürlichen Intervallproportionen folgt, und der temperierten Stimmung. Somit ist es bei der reinen Stimmung nicht möglich, von einer Tonleiter zu einer anderen zu transponieren[9]. Die temperierte Tonleiter teilt die Oktave in zwölf gleiche Halbtonschritte, so daß zwei Ganztöne nicht mehr verschiedene Frequenzverhältnisse besitzen können. Damit ergibt sich für einen Halbton das Frequenzverhältnis von $\sqrt[12]{2} : 1$. Aufsummieren dieser zwölf Halbtöne mit $(\sqrt[12]{2})^{12}$ entspricht dann dem

[9]Spielt man auf einer Geige mit kontinuierlichem Tonbereich, so kann man die Tonleiter zu einer anderen transponieren.

Verhältnis einer Oktave von 2 : 1. Man erhält

c_n	$\frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt[12]{2^0}}$
cis_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^1}}$
d_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^2}}$
dis_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^3}}$
e_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^4}}$
f_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^5}}$
fis_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^6}}$
g_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^7}}$
gis_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^8}}$
a_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^9}}$
b_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{10}}}$
h_n	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{11}}}$
c_{n+1}	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{12}}} = \frac{1}{2}$

Stellt man diese Verhältnisse graphisch dar, so erhält man eine archimedische Spirale. Um von einer Tonleiter in eine andere zu transponieren, so muss man die Spirale nur so lange drehen bis der erste Ton der Tonleiter auf die x-Achse fällt. Man erhält



Die zwölf Töne der gleichschwebend temeperierten Tonleiter entlang einer logarithmischen Spirale

1939 wurde auf der 2. Internationalen Stimmungskonferenz in London der Kammerton a_1 auf $\nu = 440$ Hz bei einer Raumtemperatur von $\vartheta = 20°$ C festgelegt. Dieser Ton entspricht auch in der reinen Stimmung dieser Frequenz, wohingegen die anderen Töne aus den vorher beschriebenen Gründen in ihren Frequenzen leicht voneinander abweichen. 1691 schlug der Orgelbauer Andreas Werckmeister eine „wohltemperierte“ Tonleiter vor und teilte diese in oben beschriebener Weise in zwölf gleiche Teile:

Ton	reine Stimmung	temperierte Stimmung	Verhältnis zu c1
c2	528 Hz	523.25 Hz	2:1
h1	495 Hz	493.88 Hz	15:8
b1	475 Hz	466.16 Hz	9:5
a1	440 Hz	440.00 Hz	5:3
as1	422 Hz	415.31 Hz	8:5
g1	396 Hz	392.00 Hz	3:2
fis1	367 Hz	369.99 Hz	25:18
f1	352 Hz	349.23 Hz	4:3
e1	330 Hz	329.63 Hz	5:4
es1	317 Hz	311.13 Hz	6:5
d1	297 Hz	293.67 Hz	9:8
cis1	275 Hz	277.18 Hz	25:24
c1	264 Hz	261.63 Hz	1:1

Vergleicht man die beiden Systeme, so stellt man fest, dass eine kleine Sekunde die Intervallproportion $16 : 15 \approx 1.067$ hat. In der temperierten Stimmung sind die Halbtöne im Verhältnis $\sqrt[12]{2} : 1 \approx 1.059$. Die geringfügige Differenz $\Delta = 8 \cdot 10^{-3}$ innerhalb eines Halbtonschrittes liegt zwar noch in unserem Hörbarkeitsbereich, ist aber so klein, daß sie von den meisten Zuhörern nicht wahrgenommen wird. Bei einem Solo bevorzugen jedoch Sänger und Spieler von Saiteninstrumenten immer noch die reinen Intervalle.

7.4 Geometrische Relationen und musikalische Struktur

Im Gegensatz zur bildenen Kunst läßt sich Musik im Zeitablauf darstellen, wobei der Ablauf eines Musikstückes geometrisch in einer Strecke dargestellt werden kann. Somit kann man auch Teilstrecken vergleichen, wobei zu beachten ist, dass gleiche Strecken unterschiedliche Länge haben können. Wir betrachten die Länge eines Musikstückes und bezeichnen den Ablauf des Musikstückes als „Zeitstrecke“. Man stellt fest, dass die Teilstrecken in einem bestimmten Verhältnis μ' stehen. Ein Musikwerk ist unterteilt in

- Sätze,

- Exposition, Durchführung, Reprise,
- Themengruppen,
- Themen,
- Variationsgruppen,
- Motive etc.

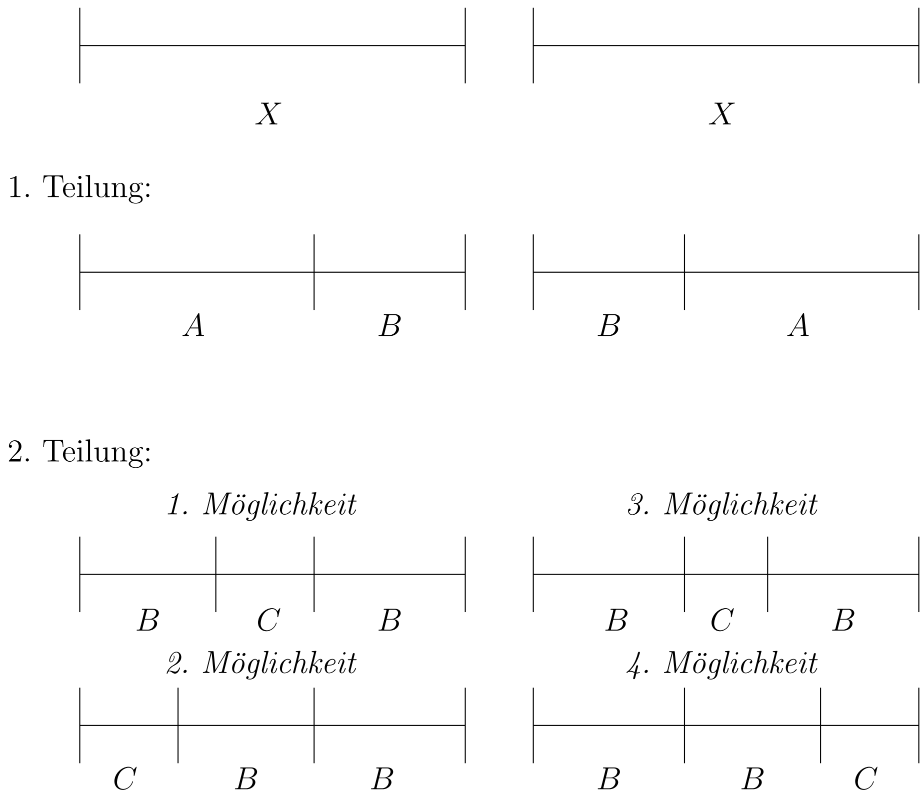
Im Folgenden wird die Zeitdauer z. B. eines Motives hinsichtlich des Goldenen Schnittes untersucht. Dabei kann man die Gesamtstrecke X in einen größeren Teil A und einen kleineren Teil B nach der Proportion des Goldenen Schnittes aufteilen. Der größere Teil A läßt sich im weiteren nach dem Goldenen Schnitt in die Teile B und C zerlegen, wobei B dann der größere und C der kleinere Teilabschnitt bzgl. der Gesamtstrecke A ist. Es gibt 2 verschiedene Möglichkeiten

BCB	CBB	BCB	BBC

Die 1. und 3. Möglichkeit sind nicht gleich, da sich die 1. Möglichkeit auf die Unterteilung der Gesamtstrecke X in die Teilstrecken der Reihenfolge AB, die 3. Möglichkeit auf die Reihenfolge BA bezieht. Man erhält die vier verschiedenen Möglichkeiten in einer Weise, wo sich die 1. und die 3. Möglichkeit sehr wohl unterscheiden.

BC B	CB B	B CB	B BC

Man erhält somit das allgemeine Teilungsprinzip



Man kann zeigen, dass die Verhältnisse bestimmter Zeitstücke in einem Musikwerk der Fibonacci-Reihe folgt und somit den Goldenen Schnitt als Grenzwert besitzen.

Die Strecke X als Gesamtstrecke wird nach dem Goldenen Schnitt in A und B geteilt. A und B sind austauschbar. Die größere Strecke A wird anschließend in B und C aufgeteilt, wobei B aus der ersten Teilung konstant bleibt. Nun wird die Strecke B als die größere der beiden Teilstrecken B und C in die weiteren Teilstrecken C und D geteilt und die Strecke C aus der vorangegangenen Teilung bleibt konstant. Die Gesamtstrecke X besteht nun nur noch aus Teilstrecken der Länge C und D, wobei C als die größere Teilstrecke in D und E weiter unterteilt werden kann. Diese Art der Teilungen läßt sich unbegrenzt fortführen, was zu immer kleineren Teilstrecken führt, die aber jeweils zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnitt's stehen. Folgende Grafik zeigt die Möglichkeit solcher Teilungen auf:

<table>
<tr><td colspan="13">X</td></tr>
<tr><td colspan="8">A</td><td colspan="5">B</td></tr>
<tr><td colspan="5">B</td><td colspan="3">C</td><td colspan="5">B</td></tr>
<tr><td colspan="3">C</td><td colspan="2">D</td><td colspan="3">C</td><td colspan="3">C</td><td colspan="2">D</td></tr>
<tr><td colspan="2">D</td><td>E</td><td colspan="2">D</td><td colspan="2">D</td><td>E</td><td colspan="2">D</td><td>E</td><td colspan="2">D</td></tr>
<tr><td>E</td><td>F</td><td>E</td><td>E</td><td>F</td><td>E</td><td>F</td><td>E</td><td>E</td><td>F</td><td>E</td><td>E</td><td>F</td></tr>
</table>

Es lassen sich aber noch weitere interessante Feststellungen hinsichtlich der Teilung im Goldenen Schnitt treffen. In der folgenden Tabelle sind die Anzahl der Teilstrecken, die Anzahl der neu entstandenen noch austauschbaren Paare und die Anzahl der konstant gebliebenen Strecken zusammengefaßt. Es entstehen mathematische Reihen, die ihre Zahlen bei weiteren Teilungen nach Fibonacci fortsetzen.

Anzahl der Teilstrecken $= a$	Anzahl der neu entstandenen noch austauschbaren Paare $= b$	Anzahl der Konstanten $= c$
1	0	1
2	1	0
3	1	1
5	2	1
8	3	2
13	5	3
21	8	5
34	13	8
55	21	13
89	34	21
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Auch untereinander sind diese drei Reihen geordnet. Die doppelte Anzahl der neu entstandenen noch austauschbaren Paare von der Anzahl der Teilstrecken substrahiert, ergibt die Anzahl der Konstanten. Diese wiederum stehen mit der

Anzahl der neu entstandenen noch austauschbaren Paare im Verhältnis des Goldenen Schnitts [5].

$$\begin{array}{ccccc} a & - & 2b & = & c \\ b & : & c & = & GS. \end{array}$$

Nach der ersten Teilung der Gesamtstrecke X in die Teilstrecken A und B gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Wie wir bereits wissen, gibt es nach der zweiten Teilung zwei mal zwei, also schon vier verschiedene Möglichkeiten. Die dritte Teilung bietet sechzehn, die vierte Teilung bereits 128 Möglichkeiten. Wie man sieht, bildet die Summe die Reihe b in der Tabelle bei jeder weiteren Teilung die Potenzzahl zu 2.

$$\begin{array}{lllllllllllllllllllllll}
2^1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & = & 2^1 & = & 2 \\
2^1 & \cdot & 2^1 & & & & & & & & & & & & & & & & & = & 2^2 & = & 4 \\
2^1 & \cdot & 2^1 & \cdot & 2^2 & & & & & & & & & & & & & & & = & 2^4 & = & 16 \\
2^1 & \cdot & 2^1 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^3 & & & & & & & & & & & & & = & 2^7 & = & 128 \\
2^1 & \cdot & 2^1 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^3 & \cdot & 2^5 & & & & & & & & & & & = & 2^{12} & = & 4096 \\
2^1 & \cdot & 2^1 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^3 & \cdot & 2^5 & & \cdot 2^8 & & & & & & & & & = & 2^{20} & = & 1048580 \\
2^1 & \cdot & 2^1 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^3 & \cdot & 2^5 & & \cdot 2^8 & \cdot & 2^{13} & & & & & & & = & 2^{33} & = & 859934592 \\
2^1 & \cdot & 2^1 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^3 & \cdot & 2^5 & & \cdot 2^8 & \cdot & 2^{13} & \cdot & 2^{21} & & & & & = & 2^{54} & = & \cdots \\
2^1 & \cdot & 2^1 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^3 & \cdot & 2^5 & & \cdot 2^8 & \cdot & 2^{13} & \cdot & 2^{21} & \cdot & 2^{34} & & & = & 2^{88} & = & \cdots \\
2^1 & \cdot & 2^1 & \cdot & 2^2 & \cdot & 2^3 & \cdot & 2^5 & & \cdot 2^8 & \cdot & 2^{13} & \cdot & 2^{21} & \cdot & 2^{34} & \cdot & 2^{55} & = & 2^{143} & = & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \cdots & & & & & & & & & = & \cdots & = & \cdots
\end{array}$$

Bei einer zehnfachen Teilung gibt es dann 2^{143} verschiedene Möglichkeiten. Betrachten wir nun einmal das Teilungsprinzip an einem Beispiel.

Beispiel. *Ein Werk hat eine Länge von 233 Zähleinheiten. Für die Teilstrecken ergeben sich dann folgende Werte:*

Teilstrecken	*Zähleinheiten*
X	*233*
A	*144*
B	*89*
C	*55*
D	*34*
E	*21*
F	*13*
G	*8*
H	*5*
I	*3*
K	*2*
L	*1*

Die Gliederung des Werkes kann bei der Anwendung des Proportionsprinzips folgendes Aussehen haben:

<table>
<tr><td colspan="13">$X = 233$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$A = 144$</td><td colspan="5">$B = 89$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$B = 89$</td><td colspan="3">$C = 55$</td><td colspan="5">$B = 89$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$C = 55$</td><td colspan="2">$D = 34$</td><td colspan="3">$C = 55$</td><td colspan="2">$D = 34$</td><td colspan="3">$C = 55$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$D = 34$</td><td>$E = 21$</td><td colspan="2">$D = 34$</td><td colspan="2">$D = 34$</td><td>$E = 21$</td><td colspan="2">$D = 34$</td><td colspan="2">$D = 34$</td><td>$E = 21$</td></tr>
<tr><td>$E = 21$</td><td>$F = 13$</td><td>$E = 21$</td><td>$E = 21$</td><td>$F = 13$</td><td>$E = 21$</td><td>$F = 13$</td><td>$E = 21$</td><td>$E = 21$</td><td>$F = 13$</td><td>$E = 21$</td><td>$F = 13$</td><td>$E = 21$</td></tr>
</table>

Allgemein muß man dabei beachten, daß man bei der Auswertung eines Werkes hinsichtlich des Goldenen Schnitts nicht nur den Anfang einer Fibonacci-Reihe betrachtet. Im Beispiel weist also die Proportion $K = 1$ und $L = 2$ noch keineswegs auf den Goldenen Schnitt hin. Erst im Zusammenhang mit den nächst größeren Abschnitten $H = 5$ und $I = 3$ ist ein akzeptabler Näherungswert zum Goldenen Schnitt zu erkennen. In der Praxis reicht in der Regel auch die einfache Fibonacci-Reihe nicht aus. Wie wir wissen, gibt es aber die Möglichkeit, durch verschiedene Startwerte a_1 und a_2 weitere Fibonacci-Reihen zu erhalten. Im Folgenden sind solche Reihen angegeben.

Fibonacci	Fibonacci verdoppelt	Fibonacci verdrei-facht	Von der Zahl 7 entwickelt	Von der Zahl 7 entwickelt verdoppelt	von der Zahl 12 entwickelt
1	2	3	7	14	12
2	4	6	11	22	19
3	6	9	18	36	31
5	10	15	29	58	50
8	16	24	47	94	81
13	26	39	76	152	131
21	42	63	123	246	212
34	68	102	199	398	343
55	110	165	322	644	555
89	178	267	521	1042	898
144	288	432	843	1686	1453
233	466	699	1364	2728	2351
377	754	1131	2207	4414	3804
610	1220	1830	3571	7142	6155
987	1974	2961	5778	11556	9959
1597	3194	4791	9349	18698	16114
2584	5168	7752	15127	30254	26073

Der Grenzwert aller Fibonacci-Reihen entspricht dem Wert des Goldenen Schnitts, ohne ihn jedoch durch die Darstellung zwei Zahlenwerte genau zu erreichen. Deshalb sind alle Proportionen der verschiedenen Reihen, auch die der Grundreihe, nur Annäherungswerte.

Helmut Reis kritisiert in seinem Buch „Der Goldene Schnitt und seine Bedeutung für die Harmonik“ die Vorgehensweise, auch andere Fibonacci-Reihen (außer Grundreihe) für die Interpretation des Goldenen Schnitts zu benutzen [10].

Obwohl es in der Musiktheorie zahlreiche Versuche gegeben hat, die Fibonacci-Zahlen in der musikalischen Komposition umzusetzen, sieht Reis diese Interpretation des Goldenen Schnitts als gescheitert. Er sagt, hier seien offenbar Beziehungen hergestellt worden, die – streng genommen – gar nicht miteinander verbunden werden dürfen, da keine logische Naturgegebenheit vorgegeben ist.

Einen anderen Weg ging Bösenberg [3], der den Goldenen Schnitt als Quint-Phänomen interpretierte. Seinem Näherungswert für den Goldenen Schnitt

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585 \qquad\qquad \text{(statt } 1.618\ldots\text{)}$$

fehlt allerdings von der mathematischen Seite die Anbindung an die Natur. Man kann nicht einfach einen rechnerischen Wert nehmen und diesen in eine übergreifende Beziehung bringen, auch wenn er noch so nahe an den Idealwert herankommt. In der Praxis erweist sich der Wert 1.585 als guter Näherungswert für den Goldenen Schnitt, da seine geringe Abweichung von 0.033 vernachlässigt werden kann.

8 „Musikalische“ Bruchrechnung

8.1 Vorbemerkungen

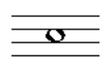
Für die Einführung des Begriffes der gebrochenen Zahl bedarf es beim Schüler eines Verständnisses für das Arbeiten mit Bruchteilen. Aus gutem Grunde werden bei der Hinführung zum Bruchbegriff Beispiele herangezogen, welche für den Schüler leicht erfassbar sind und Bezüge zu seiner Umwelt herstellen. Bekannt und vielfach benutzt ist etwa das Beispiel der Schokoladentafel. Es bietet einerseits Möglichkeiten für die Entwicklung eines Verständnisses für den Bruchbegriff (eine Tafel Schokolade ist auf x Schüler aufzuteilen), andererseits zur Vorbereitung des Kürzens und Erweiterns von Brüchen und kann darüber hinaus den Beginn eines Abstraktionsprozesses darstellen, bei welchem an die Stelle des konkreten Beispiels der Schokoladentafel abstraktere Ganze treten wie etwa Rechtecke oder andere geometrische Figuren bis schließlich übergegangen wird zu einem abstrakten Bruchbegriff. Als praktische Bezüge treten in der Schulbuchliteratur im Ausgangsstadium häufig auch das Kuchen-, Torten- oder Pizzabeispiel auf. In [7] wird auch die Aufteilung von Nationalflaggen aufgegriffen.

Recht selten wird der Bezug zu Vorkenntnissen der Schüler aus ihrem Musikunterricht gesucht, wenngleich doch auch hier für den Schüler erlebbar mit Notenwerten, die Bruchteile darstellen, umgegangen wird. Dies mag einerseits daran liegen, dass die Anzahl „sinnvoller“ Bruchteile in diesem Gebiet sehr eingeschränkt ist. Ferner muss auch dem Problem Rechnung getragen werden, dass hier selbst Bruchteile wieder als Ganze auftreten können (etwa ein 3/4-Takt als Ganzes). Letztlich müssen natürlich auch mathematisches Verständnis und musikalische Begabung in der Person des Unterrichtenden zusammenfallen, andernfalls ein Zugang über Elemente aus der Notenlehre wohl von vornherein häufig unbewusst gar nicht in Erwägung gezogen wird.

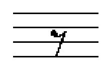
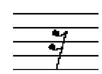
Mit diesem Artikel soll versucht werden, mögliche Unterrichtshalte zu skizzieren, die dem oben genannten Aspekt Rechnung tragen.

8.2 Zur Funktion des Notensystems

Etwa im 14. Jahrhundert bildete sich die uns heute bekannte Notation für Musikstücke heraus. In einem Zeilensystem aus fünf Linien werden Töne entsprechend ihrer Höhe und der Tondauer vermittels Notenzeichen dargestellt. Nebeneinander stehende Töne werden nacheinander gespielt, übereinander stehende gleichzeitig. Die Tondauer orientiert sich am Grundschlag und bildet jeweils Bruchteile desselben (vgl. [14, pp. 32]). Man unterteilt die Noten im Wesentlichen in Ganze, Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel Noten.

Notenwerte	äußere Gestalt
Ganze	
Halbe	
Viertel	
Achtel	
Sechzehntel	

Ähnlich verhält es sich mit der Darstellung von Pausenlängen.

Pausenwerte	Pausensymbole
Ganze Pause	
Halbe Pause	
Viertel Pause	
Achtel Pause	
Sechzehntel Pause	

Um den Rhythmus eines Musikstückes anzugeben, wird der musikalische Ablauf im Notenbild durch Taktstriche gegliedert. Die Taktart wird zumeist am Anfang des Stückes notiert. Wie bei einem gemeinen Bruch besitzen die Zahlen eine Bedeutung. Die untere Zahl gibt die Zählzeit an, d. h. den Notenwert, der den „Pulsschlag“ des Stückes bildet. Die obere Zahl gibt an, wie viele dieser Zählzeiten einen vollen Takt ergeben (vgl. [6, pp. 11]).

8.3 Zu den Vorleistungen des Musikunterrichtes

Kontinuierlich erwerben die Schüler mit Beginn des Schuleintrittes Kenntnisse und Erfahrungen im Umgang mit der Musik. Nach entsprechender abschließender Systematisierung (diese findet etwa in Klassenstufe vier statt) sind die Schüler i. allg. in der Lage, tonalmelodische und rhythmisch-metrische Beziehungen in ihrem musikalischen Zusammenhang zu erfassen. Sie wenden ihr Wissen beim Singen, Tanzen und Musizieren ausgehend vom Notenbild an. Insbesondere können Sie die Taktarten im Notenbild ablesen und gehörmäßig wahrnehmen, erkennen die Tonarten in Dur und Moll im Grundton und den entsprechenden Vorzeichen und können rhythmische Werte erfassen und wiedergeben (vgl. [9, pp. 6]). Dieses Niveau stellt die mögliche Ausgangsbasis für das Arbeiten mit Bruchzahlen im Mathematikunterricht dar.

8.4 Beispiele zum Arbeiten mit Bruchteilen

Wie eingangs angemerkt, kann am Beispiel einer Schokoladentafel der Begriff des Bruchteiles abgeleitet werden. Ausgehend von der Tatsache, dass die Schüler auch in der Musik bereits mit Bruchteilen gearbeitet haben (zumindest geschah dies intuitiv), könnten sich etwa folgende Zugänge des expliziten Herausstellens des Bruchteilbegriffes ergeben:

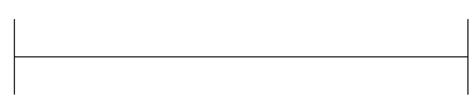
a) Ausgehend vom Gesang eines Liedes wird durch Klatschen der Grundschläge die Taktart herausgefunden. Anschließend wird die Frage aufgeworfen, wie man einen Takt gleichmäßig aufteilen könnte. Es empfiehlt sich, auf ein bekanntes Lied im 4/4-Takt zurückzugreifen, und dem Schüler folgende Aufträge vorzulegen:

   Wir wollen untersuchen, wie man einen 4/4-Takt gleichmäßig aufteilen kann. Ein solcher Takt besteht aus vier Zählzeiten (Schlägen).

   Über die Dauer jeder der Zählzeiten soll je eine Note klingen.

   - *Wieviele Noten füllen den Takt aus?*
   - *In folgender Abbildung steht die dargestellte Strecke für die Dauer des gesamten Taktes.*

$\frac{4}{4}$



- *Wieviel „Platz“ hat jede Note innerhalb des Taktes? Teile den Takt entsprechend durch Teilstriche und trage die Noten mit ihren Notenwerten ein.*

Zeichne dir drei weitere Strecken mit einer Länge von jeweils 4 cm und veranschauliche deine Antworten zu den folgenden Fragen:

- *Es sollen zwei Noten gleichmäßig auf den Takt aufgeteilt werden, so dass eine jede der beiden Noten über zwei Schläge klingt. Wieviel „Platz“ hat jede Note?*
- *Wieviele Noten passen in den Takt, wenn jede von ihnen nur einen halben Schlag klingt? Wieviel „Platz“ hat jede Note?*
- *Eine Note soll über alle vier Schläge klingen. Wieviel „Platz“ hat die Note?*

Erkennst du Beziehungen zwischen den beschriebenen Beispielen? Versuche, diese als Gleichung darzustellen.

b) *Die Schüler kennen den Begriff des Kanons aus der Musik. Anhand eines Beispieles sind Bruchteile zu bestimmen. So könnten sich etwa für einen Kanon über zwölf Takte folgende Fragen ergeben:*

- *Der Kanon hat zwölf Takte und soll vierstimmig gesungen werden. Veranschauliche an einer Strecke von 12 cm Länge (1 cm entspricht also der Zeitdauer für einen Takt) wann die erste, die zweite, die dritte und die vierte Stimme einsetzen. Beschreibe, wie du vorgegangen bist.*
- *Es soll sechsstimmig gesungen werden. Über welchen Bruchteil der zwölf Takte singt die erste Stimme allein? Wieviele Takte sind das.*

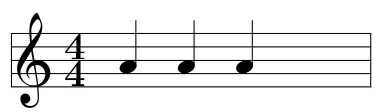
Zeichne und beschreibe wie oben.

Die vorgenannten Aufträge lassen erkennen, dass durch ihre Behandlung zu ersten Betrachtungen übergegangen werden kann, die vom eigentlichen Gegenstand der Musik abheben. So sollte das erste Beispiel zu der Erkenntnis führen, dass die Klangdauer einer Viertelnote durch die zweier Achtelnoten ersetzt werden kann, folglich formal auch $1/4 = 2/8$ gelten muss. Dieses Vorgehen entspricht dem Aufteilen einer Tafel Schokolade unter zwölf, sechs oder zwei Kindern ($1/2 = 3/6 = 6/12$).

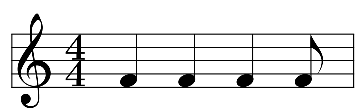
Zur Festigung der Kenntnisse über Bruchteile und das Erweitern und Kürzen gemeiner Brüche bieten sich dann Aufträge wie der folgende an:

Die nachfolgend angegebenen Taktbeispiele sind nicht vollständig. Begründe, warum das so ist. Sie sollen jeweils durch Pausen „aufgefüllt“ werden. Wie lang müssen diese jeweils sein? Überlege und ergänze das Notenbild.

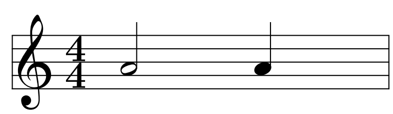
a)



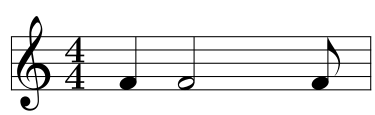
b)



c)



d)



Die bisher aufgegriffenen Musikbeispiele verwenden ausschließlich den 4/4-Takt. Dies liegt darin begründet, dass die Angabe der Taktart in einer Bruchdarstellung einen der Musik eigenen Sinn hat. Wie im ersten Kapitel bereits ausgeführt, bestimmt der Nenner dieses Bruches den „Grundton“ des Musikstückes, der Zähler gibt an, wie viele Noten im „Grundton“ einen vollen Takt darstellen. Leichthin möchte man dazu neigen, aus dem Bild einer Viertelnote zu schließen, dass vier solcher Noten einen ganzen Takt, ein Ganzes ergeben. Doch das stimmt eben nur für den Fall des 4/4-Taktes. In anderen Taktarten wie etwa dem 3/4-Takt füllen drei solcher Noten einen Takt aus, d. h., bei drei Noten im Wert einer Viertelnote entspricht jede dieser Noten genau einem Drittel des Ganzen. Hierin mag auch ein Grund liegen, weshalb Möglichkeiten der Einbeziehung von Vorleistungen aus dem Musikunterricht an dieser Stelle des Mathematikunterrichtes eher selten genutzt werden. Die beschriebenen Probleme bestehen beim 4/4-Takt nicht, weshalb eine Beschränkung auf diese Taktart für den einführenden Unterricht in die Bruchrechnung nahe zu legen ist. Die Problematik für andere Taktarten kann ggf. an späterer Stelle thematisiert werden.

Eine isolierte Behandlung des Bruchrechnens allein auf der Basis der Kenntnisse aus der Musik erwiese sich somit offenbar als unzureichend (und dies sicher aus weiteren, hier noch nicht genannten Gründen). Man könnte eine breitere Sichtweise hinten anstellen. Dies hätte jedoch den erheblichen Mangel, dass die Schüler über lange Zeit mit einer sehr mageren Ausgangsbasis auskommen müssten, die kaum zu einer vertretbaren Verallgemeinerung von Erkanntem berechtigte. Daher sollte besser parallel bei der Erarbeitung der notwendigen Begriffswelt auf Beispiele aus der Musik und anderen Gebieten zurückgegriffen werden. Für den Problemkreis Ganzes – Bruchteil könnten als Ausgangspunkt Überlegungen wie oben dargestellt bei Beschränkung auf 4/4-Takte sein, dem weitere Beispiele sofort an die Seite gestellt werden (Tortenteilung und dergleichen mehr).

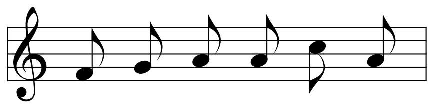
Dennoch sollten andere Taktarten nicht verschwiegen werden, da sie existent und bekannt sind. Ihre Einbeziehung könnte ohne Thematisierung oben genannter Probleme mit der unterrichtlichen Behandlung von Regeln für das Addieren oder Multiplizieren von Brüchen erfolgen.

8.5 Zur Addition und Subtraktion gemeiner Brüche

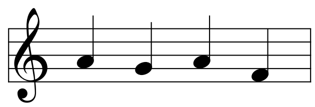
So wären zur Vorbereitung des Addierens gleichnamiger Brüche etwa Aufträge wie der folgende denkbar:

Neben dem 4/4-Takt verwendet man in der Musik u. a. auch den 3/4-Takt oder den 6/8-Takt. Betrachte folgende Notenbilder und ordne jeweils die entsprechende Taktart zu.

a)

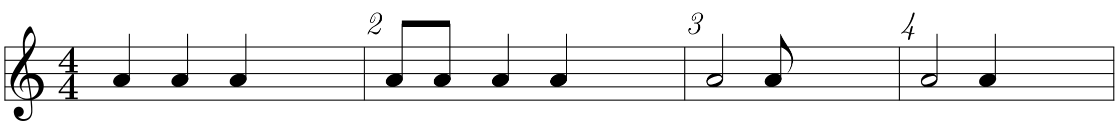


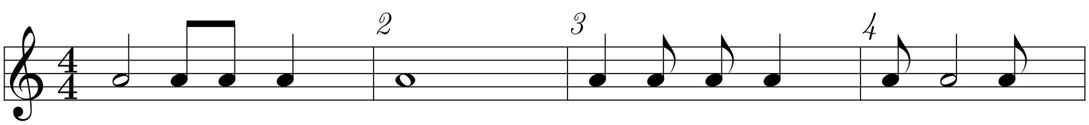
b)



Zur Erarbeitung einer Regel für das Addieren ungleichnamiger Brüche könnten Aufgaben eingesetzt werden, deren Inhalt und Anlage durch folgendes Beispiel illustriert wird.

Hier fehlen Noten. Setze Sie ein!





Sie beziehen die Kenntnisse der Schüler aus der Musik ein. Davon ausgehend könnten die fehlenden Noten durch inhaltliche Überlegungen etwa in folgender Weise ergänzt werden:

Die Taktart ist ein 4/4-Takt. Der Grundton ist die Viertelnote. Vier dieser Viertelnoten ergeben einen ganzen Takt.

Im ersten Fall sind drei 1/4-Noten gegeben. Es fehlt also eine 1/4-Note.

Es ist

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}.$$

Im zweiten Fall sind zwei Achtelnoten und zwei Viertelnoten gegeben. Die Achtelnote klingt im Vierteltakt nur über eine halbe Zählzeit. Zwei Achtelnoten belegen also die gleiche Zählzeit wie eine Viertelnote. Deshalb fehlt hier eine Viertelnote. Es ist

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4},$$

außerdem

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

Im dritten Fall steht eine halbe Note. Sie klingt über zwei Schläge. Also muss gelten

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Außerdem steht noch eine Achtelnote. Ergänzt man diese um eine weitere Achtelnote, so füllen beide zusammen die Zählzeit einer Viertelnote. Damit sind drei Zählzeiten abgedeckt. Fehlt also neben der einen Achtelnote noch eine Viertelnote.

Es gilt:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4},$$

außerdem

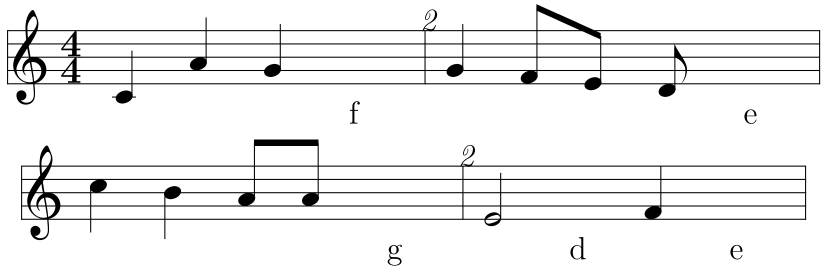
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Die weiteren Beispiele sind in ähnlicher Art zu lösen. Insgesamt zeigen Sie Folgendes:

Die Schüler kommen auf der Basis ihres musikalischen Vorwissens zu Gleichheiten zwischen ungleichnamigen Brüchen. Diese werden aufgegriffen und mathematisch analysiert und führen schließlich zu einer Regel für die Addition ungleichnamiger Brüche (Die Vorgehensweise ähnelt dabei sehr derjenigen in den sonst üblichen Überlegungen und die Vermutungen werden jeweils am Notenbeispiel auf Exaktheit überprüft.). Schließlich werden die vermeintlich allgemein gültig Regeln formal an den Notenbeispielen geprüft, danach auch auf andere, außerhalb der Mathematik angesiedelte Inhalte angewandt.

In abgewandelter Form könnten auch Aufträge wie der folgende gestellt werden:

Schreibe über jeden Notennamen eine Note in die Zeile.

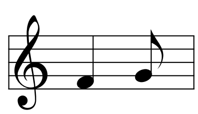


Die zur Verfügung stehenden Notenwerte reichen aus, um eine hinreichende Differenzierung im Schwierigkeitsgrad und damit auch die nötige Vielfalt gewährleisten zu können. Den Aufgaben liegt dabei eigentlich eine Struktur für Übungsaufgaben im Sinne formveränderten Übens zu Grunde. Ähnliche Aufgaben werden daher wohl auch in der Festigungsphase eine Rolle spielen. Daneben wird man natürlich auch auf „typische“ Aufträge zurückgreifen, die auf das direkte Anwenden der Regeln für das Addieren ungleichnamiger Brüche abstellen. Zwei Aufgabenbeispiele seien dafür illustrierend angegeben.

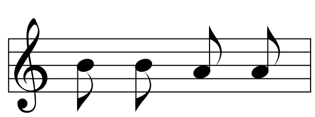
Die folgenden Notenbilder geben jeweils die Noten für einen Takt an. Welchen Wert haben die Takte jeweils?

a)

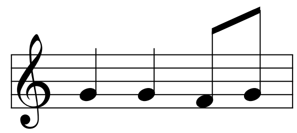
b)



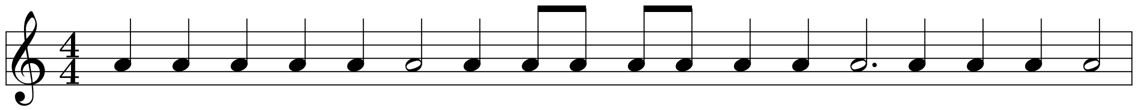
c)

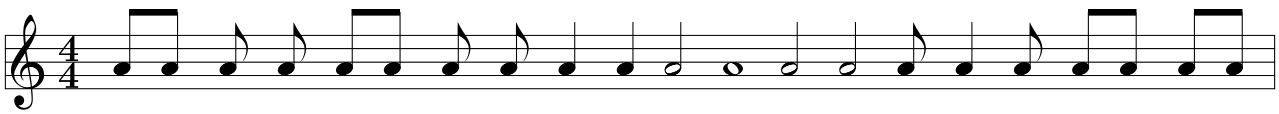


d)



Hier fehlen Taktstriche. Setze sie ein.





Bezüglich der weiteren Grundrechenoperationen ist der Rückgriff auf musikalische Inhalte eher begrenzt möglich. Einige der im Zusammenhang mit der Addition behandelten Aufgaben eignen sich sicherlich auch zur Festigung der Subtraktion, wenngleich diese für Notenwerte nur bedingt Sinn machen wird. Für eine Einführung dieser Rechenoperation ist der Gegenstand dagegen wohl weniger geeignet, da hier i. allg. doch gleich recht viele Operanden auftreten.

8.6 Zur Multiplikation gemeiner Brüche

Hinsichtlich der Multiplikation geht man nicht selten in einem ersten Schritt über das Vervielfachen als abgekürzte Addition. Diesen Gedanken aufgreifend könnte folgendes dargestellte Aufgabenblatt dazu geeignet sein, mit den Schülern zu einer Vorschrift für die Multiplikation gemeiner Brüche vorzudringen.

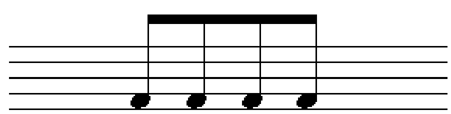
Für die Aufgabe $3+3+3+3$ können wir auch kürzer $4 \cdot 3$ schreiben.
Vervollständige dementsprechend nachfolgende Aufgaben:

$$\begin{aligned} 2+2+2+2 &= 4\cdot &&= 8 \\ 1+1+1+1 &= &&= \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} &= &&= \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} &= &&= \end{aligned}$$

Denke daran, dass gilt: $4 = \frac{4}{1}$.
Schreibe oben stehende Aufgaben so auf, dass beide Faktoren in Bruchschreibweise auftreten. Versuche nun, eine Regel für die Multiplikation zweier gemeiner Brüche aufzuschreiben.
Die Regel lautet: …
Wende die Regel auf folgende Beispiele an und prüfe sie auf Richtigkeit:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \qquad =$$

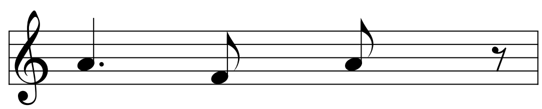
Ein Musikstück ist im 2/2-Takt geschrieben. In einem Takt des Stückes steht für eine Zähleinheit folgendes Notenbild



Interpretiere das Notenbild und prüfe, ob die von dir gefundene Regel stimmen kann.

8.7 Zur Division gemeiner Brüche

Für die Division von gemeinen Brüchen ließe sich letztlich das Verlängern eines Notenwertes durch Punktieren ausnutzen. Eine Vorschrift könnte dabei über den Weg einer konstruktiven Begriffsbildung gewonnen werden. Folgendes Beispiel soll ein mögliches Vorgehen illustrieren.



Ein Musikstück ist im 6/8-Takt geschrieben. Für einen Takt findet man folgendes Notenbild:

Das Punktieren einer Note verlängert ihren Wert um die Hälfte. Welchen Wert nimmt die punktierte Viertelnote im Takt insgesamt an? Schreibe auf, wie du rechnen würdest.

Im Unterrichtsgespräch ließe sich ein Gedankengang entwickeln, der im Folgenden nur in seinen wichtigsten Zügen wiedergegeben wird. Didaktische Vereinfachungen wie Ausweitungen sind in jedem Falle denkbar. Der Wert eines Taktes beträgt 6/8. Das Pausenzeichen hat einen Wert von einem Achtel, die Viertelnote steht für einen Wert von zwei Achteln. Die punktierte Viertelnote muss daher insgesamt für einen Wert von drei Achteln stehen. Punktieren einer Note verlängert ihren Wert um die Hälfte. Das ist hier genau ein Achtel.

Es gilt also

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8} \Longrightarrow \frac{1}{4} : \frac{2}{1} = \frac{1}{8}.$$

Derartige Überlegungen ließen sich an weiteren, ähnlich gelagerten Beispielen fortführen. Im Interesse differenzierten Arbeitens mit den Schülern kann für Interessierte an dieser Stelle natürlich auch nach einer allgemein gültigen Argumentation gesucht werden. Im Sinne beispielgebundenen Begründens wäre folgender Gedankengang möglich:

Um eine allgemeine Vorschrift zu finden, nutzen wir die Tatsache, dass Multiplikation und Division Umkehroperationen sind. Am Ende der nun folgenden Überlegungen steht dann der Versuch, eine allgemein gültige Vorschrift für die Division in der bekannten Weise zu formulieren.

Mithin ist:

$$\frac{1}{4} : \frac{2}{1} \Longleftrightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{8}.$$

Auch hier sind selbstverständlich Nuancierungen hinsichtlich des angestrebten Abstraktionsgrades möglich.

Für die weitere Festigung bieten sich unter Einbeziehung punktierter Noten Aufgaben folgenden Inhaltes an:

– Ermitteln des Wertes einer punktierten Note (halbieren von Notenwerten)

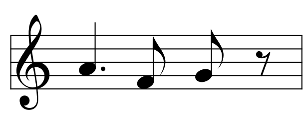
– Ermitteln der Taktarten aus vorgegebenen Taktbildern

– Setzen von Taktstrichen in Notenreihen je nach Vorgabe der Taktart.

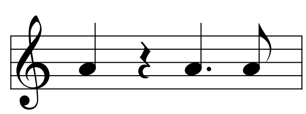
Gerade die letzte Kategorie bietet Möglichkeiten für eine übergreifende Einbeziehung von Addition, Multiplikation (Vielfachbildung gleicher Notenwerte) und Division (punktierte Noten).

Welchen Wert haben folgende Takte?

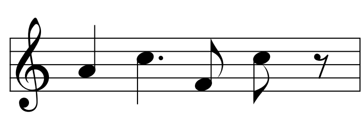
a)



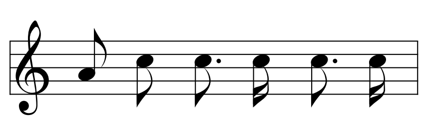
b)



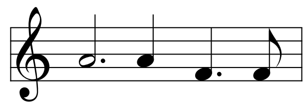
c)



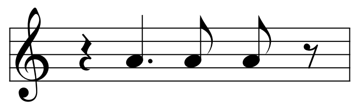
d)

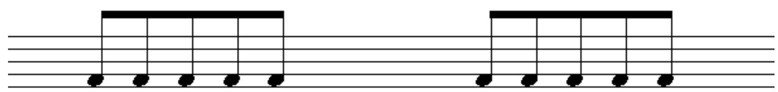


e)



f)





8.8 Ausblick

Vorgenannte Beispiele zeigen recht deutlich Möglichkeiten aber auch Grenzen eines durch Vorleistungen aus dem Musikunterricht getragenen Zuganges zur Bruchrechnung. Gerade die sich aus dem Problemfeld Ganzes – Bruchteil ergebenden Beschränkungen und Erschwernisse können schnell dazu verleiten, einen entsprechend angelegten Unterricht schon im Keim ersticken zu lassen. Wie bereits angedeutet, könnte sich an späterer Stelle des Unterrichtes eine Thematisierung der Problematik in der Notenlehre mit einigen wenigen Schülern anschließen. Der Wert eines die Vorleistungen des Musikunterrichtes aufgreifenden Mathematikunterrichtes liegt aber wohl eher in zwei anderen Aspekten – zum einen der Verbindung mathematisch-abstrakter Überlegungen mit einer musisch-emotionalen Komponente und zum anderen, dass den Schülern das Wesen von Mathematik vor Augen geführt werden kann: In einem eng begrenzten praxisbezogenen Aufgabenfeld (hier der Musik) wird eine geeignete Beschreibung der Zusammenhänge mit mathematischen Mitteln entwickelt (und dabei auch verdeutlicht, dass Notationen stets auch unter dem Aspekt ihres Praxisbezuges hinterfragt werden müssen). Diese Beschreibung regt dazu an, Überlegungen anzustellen, die aus dem eigentlich betrachteten Bereich (Bruchteile von 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32) weit herausführen (Bruchteile von 1/7, ...). Die Universalität der gefunden mathematischen Beschreibungen für die betrachteten Zusammenhänge gestattet das

Rechnen mit beliebigen Bruchteilen und leistet darüber hinaus auch gute Dienste bei der angemessenen Beschreibung neuer Gegebenheiten aus anderen praktischen Anwendungsfeldern und führt dadurch zu einer Erweiterung der mathematischen Theorie. Die ist wohl ein typisches Merkmal der historischen Entwicklung der mathematischen Wissenschaften, welches den Schülern somit auf sehr früher Altersstufe nahe gebracht werden kann. Somit könnte ein wohl überlegtes Einbeziehen von Vorleistungen aus dem Musikunterricht zur Einführung in die Bruchrechnung, wofür Ansätze hier nur skizzenhaft entwickelt werden konnten, auch mit Blick auf die weltanschauliche Bildung und Erziehung unserer Schüler einen Beitrag leisten. Vielleicht vermögen die hier im Artikel entwickelten Gedanken dazu beizutragen.

Literaturverzeichnis

[1] Armbrust, A.: *Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife – Mathematische Aspekte von Tonsystemen.* MNU 52 (1999), Nr. 2, p. 76-82.

[2] Bauer, K.: *Stundenbilder für die Sekundarstufe Musik 5 / 6.* Bd. 1, pb-Verlag, Puchheim, 1996.

[3] Bösenberg, F.: *Harmoniegefühl und Goldener Schnitt – Die Analyse der Klangfarbe.* Leipzig, 1911.

[4] Freudenthal, H.: *Warum hat die Tonleiter zwölf Töne.* mathematik lehren (1983), Nr. 1, p. 48-52.

[5] Hofmann, W.: *Goldener Schnitt und Komposition.* Versuch zur Fixierung eines Ordnungsprinzips, 2. Aufl., Noetzel, Wilhelmshaven, 1986.

[6] Lugert, W. D.: *Musik hören, machen, verstehen.* Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1989.

[7] *Mathematik entdecken – verstehen – anwenden.* Lehrbuch Mathematik Klasse 5, Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1992.

[8] *Mathematik heute.* Lehrbuch Mathematik, differenzierte Ausgabe Klasse 6, Schroedel Schulbuchverlag, Hannover, 1992.

[9] *Rahmenrichtlinien Grundschule Musik.* Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt, Druckerei und Verlag Gebr. Garhoff GmbH, Magdeburg, 1993.

[10] Reis, H.: *Der Goldene Schnitt und seine Bedeutung für die Harmonik.* Verlag für systematische Musikwissenschaft GmbH, Bonn, 1990.

[11] Schmidt, H.-J.: *Zu Schönbergs Musiktheorie.* alpha 24 (1991), Nr. 4.

[12] Schröder, E.: *Mathematik im Reich der Töne.* BSB G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1990, p. 48-58.

[13] Wannagas, S.: *Möglichkeiten der Einbeziehung von Kenntnissen aus dem Musikunterricht im Mathematikunterricht der Förderstufe bei der Arbeit mit gebrochenen Zahlen.* Belegarbeit zum Lehrerfortbildungskurs „Mathematik für die differenzierte Förderstufe der Sekundarstufe“, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 1998.

[14] Ziegenrücker, W.: *ABC – Musik.* VEB Deutscher Verlag für Musik, Leipzig, 1977.

[15] Zülicke, L.: *Geometrische Relation und musikalische Struktur – Der Goldene Schnitt als musikarchitektonisches Prinzip in L. v. Beethovens Klaviersonate Op. 2, Nr. 1 und P. Petkows „Diphtong“ Op. 9a.* Wissenschaftliche Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien, Magdeburg, 2000.