Muster, Flächen, Parkettierungen — Anregungen für einen kreativen Mathematikunterricht

Christian Hartfeldt und Prof. Dr. Herbert Henning

Magdeburg, den 9. August 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen der Parkettierungen

In der Mathematik versteht man unter einer Parkettierung die überlappungsfreie, vollständige Überdeckung der Ebene mit zueinander kongruenten regelmäßigen Polygonen, wobei das Muster an allen Ecken gleich aussehen soll.

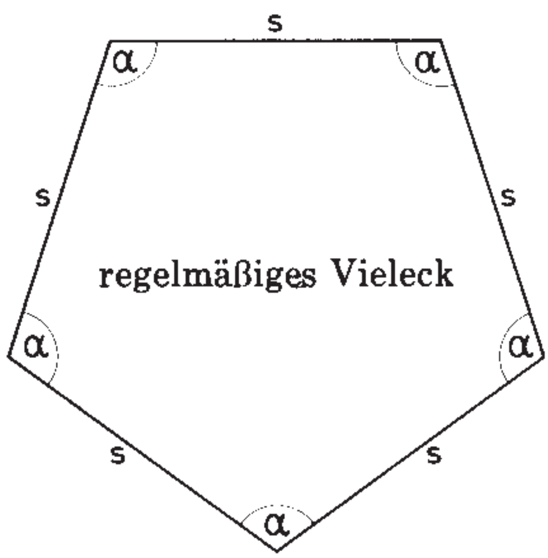
1.1 Das reguläre Vieleck

Betrachtet man Ornamente oder gefließte Fussböden bzw. Wände, so stellt man fest, dass diese, wegen ihres ästhetischen Reizes regelmäßige Vielecke besitzen. In der Natur findet man die Formen von regulären Sechsecken z. B. bei Bienenwaben wieder.

Definition 1.1
*Ein Vieleck heißt **regulär**, wenn*

- *alle Seiten gleich lang und*
- *alle Innenwinkel*

gleich groß sind.



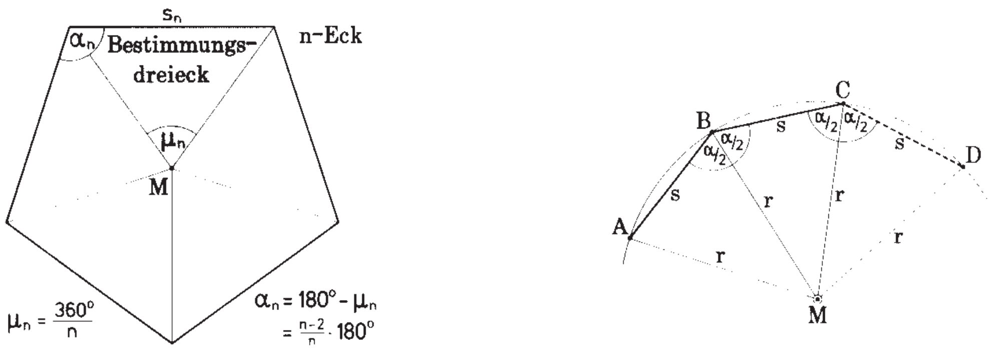
Vieleck

Aus der Definition folgt

Satz 1.2
Jedes reguläre Vieleck (n-Eck) besteht aus n-kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Ein solches Dreieck, das diese Bedingung erfüllt, wird als ***Bestimmungsdreieck*** *bezeichnet.*

Beweis. Da drei benachbarte Ecken einen Umkreis mit Mittelpunkt M haben gilt

$$\Delta AMB \cong \Delta BMC.$$



Bestimmungsdreieck

Wird M mit der nächsten Ecke (D) verbunden, so entsteht das Dreieck ΔCMD und dieses ist nach dem Kongruenzsatz zu den anderen Dreiecken kongruent. Fahre mit den anderen Ecken so fort und es folgt die Behauptung. □

Für den Innenwinkel μ gilt allgemein

$$\mu = \frac{360°}{n},$$

ist also proportional zu $\frac{1}{n}$, also

$$\mu \propto \frac{1}{n}.$$

Für ein Sechseck ist also $\mu = 60°$. Damit ergibt sich zwangsläufig für den Winkel α

$$\alpha = 180° - \mu = 180° - \frac{360°}{n} = \frac{180° \cdot n - 360°}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

Speziell für ein Sechseck ergibt sich $\alpha = 120°$.

In der folgenden Tabelle werden die Innenwinkel für spezielle Anzahlen von Ecken dargestellt.

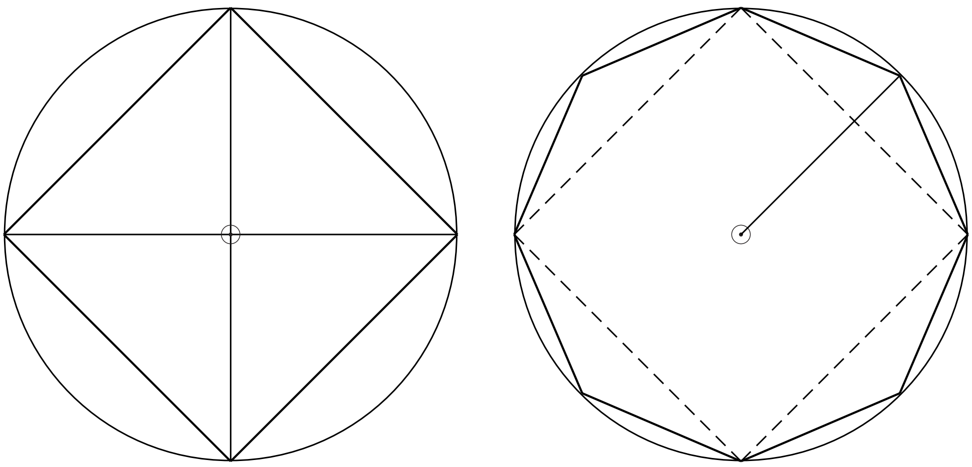
1.1.1 Konstruktion eines n-Ecks

Im Folgenden wollen wir der Frage nachgehen, wie man ein regelmäßiges Vieleck konstruiert. Kennt man den Mittelpunktswinkel μ_n, dann kann ein regelmäßiges

Anzahl der Ecken:	3	4	5	6	8	9	10	12
Innenwinkel α:	60°	90°	108°	120°	135°	140°	144°	150°

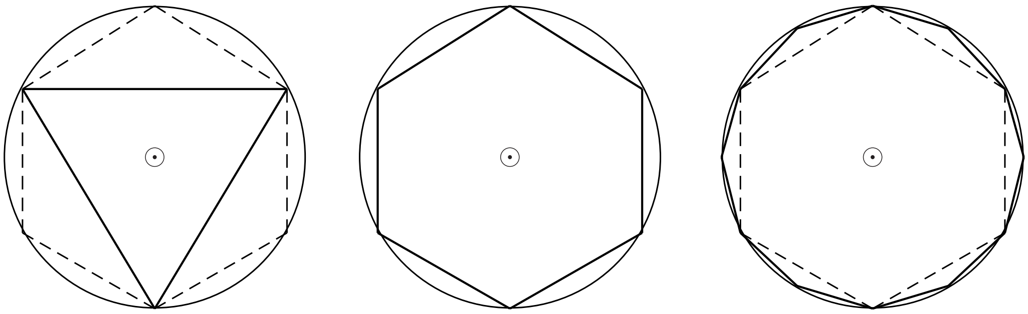
Vieleck konstruiert werden. Da sich Winkel verdoppeln bzw. halbieren lassen und man ein n-Eck konstruieren kann, dann kann man auch ein n-Eck mit doppelter Eckenzahl konstruieren. Bei allen Konstruktionen beginnt man am besten mit dem Umkreis. Im Folgenden wollen wir dies für verschiedene Fälle demonstrieren.

Quadrat: Dieses Verfahren ist auch als 4er Serie bekannt. Zunächst konstruiert man den Umkreis und fällt Lote, die man vom Mittelpunkt M auf die Quadratseite fällt. Diese schneiden den Kreis in den Ecken des Achteckes. Damit ergibt sich



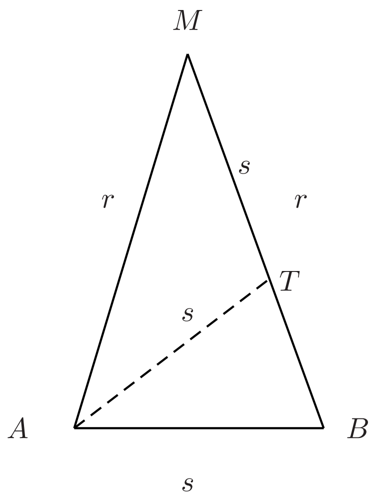
Das 4-Eck und 8-Eck

Sechseck: Dieses Verfahren ist auch als 3er Serie bekannt. Die Bestimmungsdreiecke sind gleichseitig. Somit muss eine Seite so lang sein, wie der Radius. Das Sechseck erhält man aus dem gleichseitigen Dreieck, indem man die übernächsten Ecken verbindet. Fällt man die Lote, so erhält man das Zwölfeck.



Das 3-Eck, 6-Eck und 12-Eck

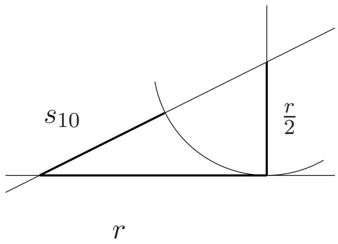
Zehneck: Dieses Verfahren ist auch als 5er Serie bekannt. In dem Bestimmungsdreieck für das Zehneck stellt man fest, dass die Dreiecke ΔMAB und ΔABT ähnlich sind. Es gilt somit



Das Bestimmungsdreieck ΔMAB

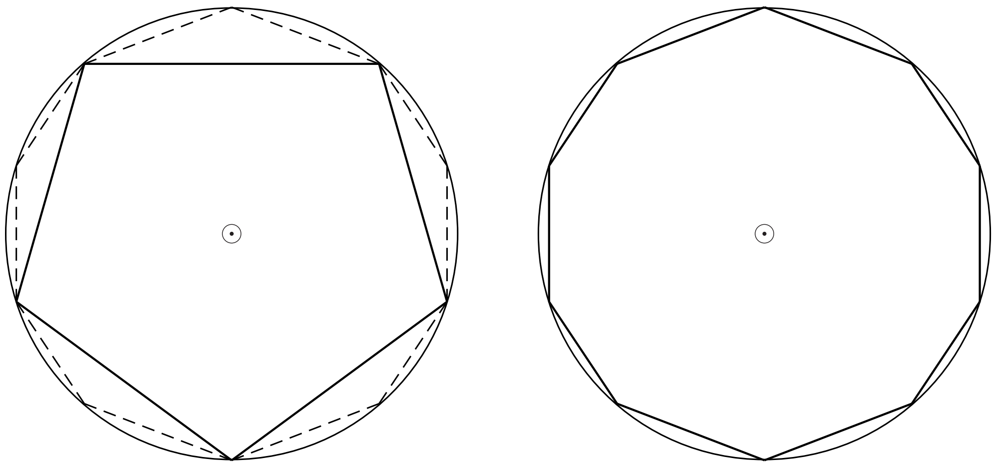
$$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s} \Leftrightarrow r^2 - rs = s^2 \Leftrightarrow r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = s^2 + rs + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(s + \frac{r}{2}\right)^2.$$

r, $\frac{r}{2}$ und $s + \frac{r}{2}$ lassen sich nach dem Satz von Pythagoras als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks deuten. Die Konstruktion der Seite s des Zehnecks, bei bekanntem Umkreisradius, entnehme man der Zeichnung.



Zur Konstruktion des Zehnecks

Auch hier wieder ist das Zehneck Ausgangsfigur für das 5- und 20-Eck.



Das 5-Eck und 10-Eck

Betrachtet man die Mathematikgeschichte stellt man fest, dass lange Zeit geglaubt wurde, dass nur Vielecksseiten mit $n = 4 \cdot 2^k$, $n = 3 \cdot 2^k$ und $n = 5 \cdot 2^k$ konstruierbar sind. Gauss bewies 1801, dass auch weitere regelmäßige n-Ecke konstruierbar sind. Dabei muss für die Eckenzahl n gelten

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_m,$$

wobei m und k natürliche Zahlen sind. Die p_i's $i \in \{1, \dots, m\}$ sind die FERMATschen Primzahlen. Für die FERMATschen Primzahlen gilt

$$p_i = 2^{2^i} + i \text{ für } i \in \mathbb{N}_0.$$

Für $i = 5$ erhält man keine Primzahl ($i = 5 \Rightarrow p_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417 \neq$prim). Somit sind demnach die n-Ecke mit $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots$ und nicht konstruierbar sind die n-Ecke mit $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, \dots$.

Enthält nun die Eckenzahl n mehr als eine FERMATsche Primzahl, dann kombiniert man die Mittelpunktswinkel geeignet. Für $n = 15$ ergibt sich

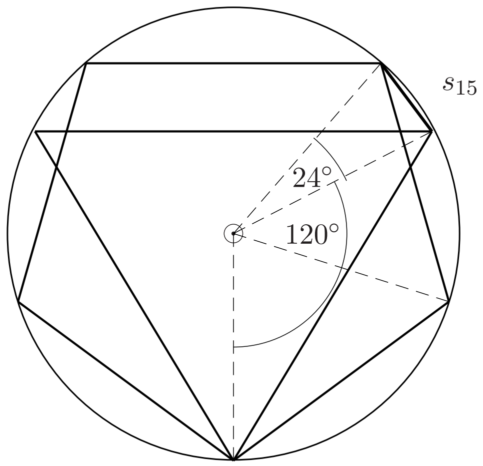
$$\frac{1}{15} = \frac{a}{5} + \frac{b}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{15} = \frac{3a + 5b}{15} \Leftrightarrow 1 = 3a + 5b$$

Diese Gleichung ist überbestimmt. Wähe $a = 2$ und $b = -1$, damit erhält man

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} + \frac{-1}{3}$$

und nach Multiplikation mit 360° erhält man

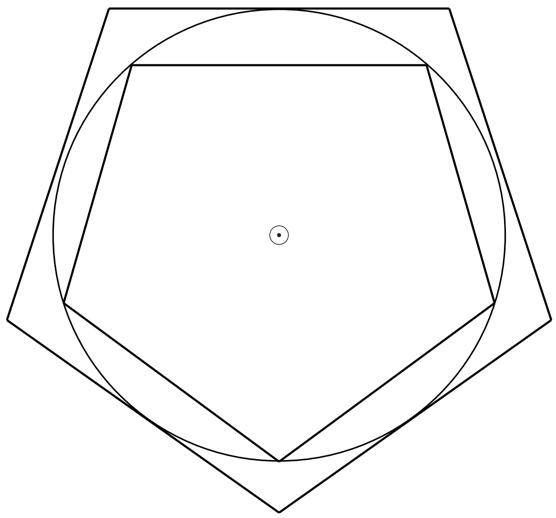
$$24° = 2 \cdot 72° - 120°.$$



Das 15-Eck

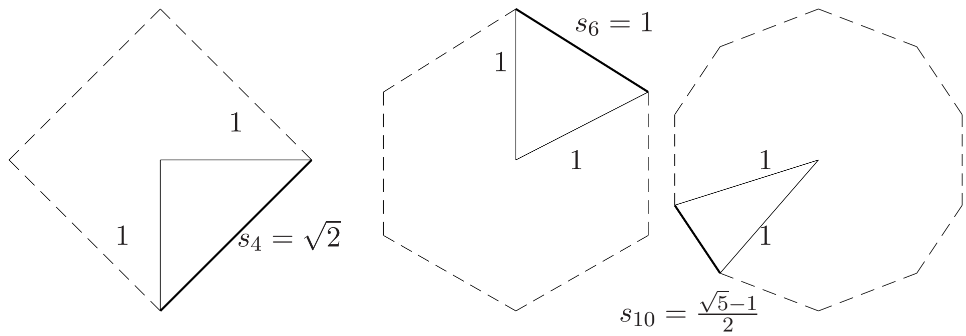
Wir wollen nun der Frage nachgehen, wie man rechnerisch die Seitenlängen eines n-Ecks berechnen kann. Dafür wird der Einheitskreis verwendet. Zunächst einmal unterscheidet man zwischen **Einbeschriebenen** und **Umbeschriebenen** n-Ecken.

1.1.2 Einbeschriebene n-Ecke



Der Unterschied zwischen einbeschriebenem und umbeschriebenem n-Eck am Beispiel des Fünfecks

Aus den Zeichnungen liest man sofort für das Sechseck



Die Seitenlänge für das Viereck, Sechteck und Zehneck

$$s_6 = 1,$$

für das Viereck

$$s_4 = \sqrt{2}$$

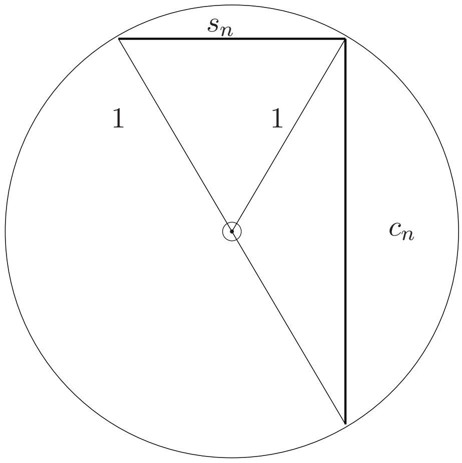
und für das Zehneck gilt

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(s_{10} + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Erstaunlich hierbei ist, dass die Länge von s_{10} das Verhältnis des Goldenen Schnittes darstellt.

Gegeben sei ein n-Eck, dann ist, wie bereits gesehen, das $2n$-Eck leicht zu konstruieren. Wir wollen nun die Seitenlänge eines solchen $2n$-Ecks berechnen. Dabei verwenden wir das Verfahren von LUDOLPH VON CEULEN, welches darauf basiert, dass ein zur Seite s_n zugehöriges Komplement c_n eingeführt wird. Dabei ist c_n die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit s_n als einer Kathete und der Hypothenuse 2. Es gilt

$$s_n^2 + c_n^2 = 4 \Rightarrow s_n = \sqrt{4 - c_n^2}.$$



Konstruktion nach CEULEN

Anwendung des Kathetensatzes liefert

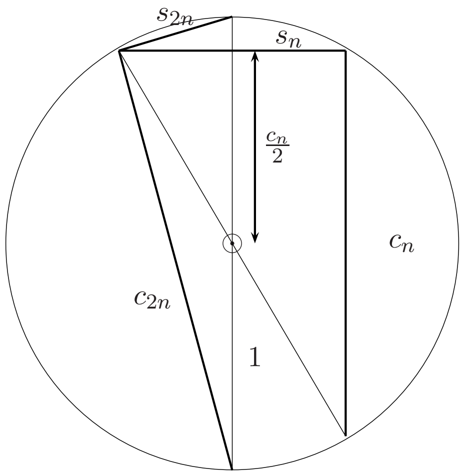
$$c_{2n}^2 = 2\left(1 + \frac{c_n}{2}\right)^2 \Rightarrow c_{2n} = \sqrt{2 + c_n}. \tag{1}$$

Letzteres wird auch als Verdopplungsformel bezeichnet.

Beispiel 1.3 (regelmäßiges 96-Eck)
Die Zahl 96 kann faktorisiert werden und es gilt

$$96 = 2^4 \cdot 6,$$

d. h. die Ausgangsfigur ist ein Sechseck. Also startet man am besten mit $s_6 = 1$ *und wendet dann mehrfach die Verdoppelsformel* (1) *an.*



Anwendung des Kathetensatzes

Man erhält der Reihe nach

$$c_6 = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$c_{12} = \sqrt{2 + c_6} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$c_{24} = \sqrt{2 + c_{12}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$c_{48} = \sqrt{2 + c_{24}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$c_{96} = \sqrt{2 + c_{48}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

Damit ergibt sich

$$s_{96} = \sqrt{4 - c_{96}^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \approx 0.065438.$$

Habe ein Kreis den Radius r, so folgt, das die Seitenlänge des 96-Eck mit r multipliziert werden muss. Bei einem Radius von 3 m erhält man eine Seitenlänge des regelmäßigen 96-Eck von 196.3 mm.

Für den Flächeninhalt A_n erhält man bei bekannter Länge s_n für ein n-Eck

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot h_n$$

für den Umfang

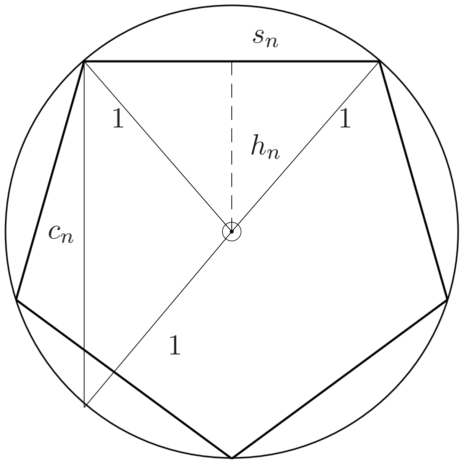
$$U_n = n \cdot s_n$$

also

$$A_n = \frac{1}{2} \cdot u_n \cdot h_n$$

und

$$h_n = \frac{1}{2} c_n = \sqrt{1}2\sqrt{4 - s_n^2}.$$



Darstellung zur Höhe

Beispiel 1.4 (Fortsetzung von Beispiel 1.3)
Für den Flächeninhalt gilt $A_{96} = \frac{1}{2} u_{96} h_{96} = \frac{1}{2} \cdot 96 s_{96} \cdot \frac{1}{2} c_{96} = 24 \cdot s_{96} \cdot c_{96}$ *also*

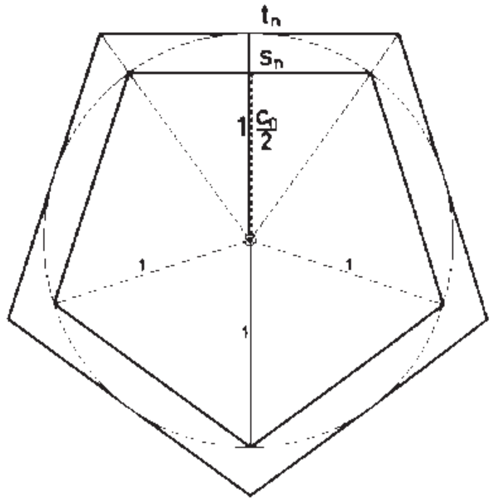
$$\begin{aligned} F_{96} = \quad & 24\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \\ = \quad & 24\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \\ = \quad & 3.139350 \end{aligned}$$

Bei einem Radius von r *muss der Flächeninhalt mit* r^2 *multipliziert werden. Bei einem Radius von 3 m ergibt sich Fläche zu 28.25* m^2.

1.1.3 Umbeschriebene n-Ecke

Auch hier werden die Ähnlichkeitssätze für die Seite t_n angewandt. Es gilt

$$t_n : s_n = 1 : \frac{c_n}{2} \Rightarrow t_n = 2\frac{s_n}{c_n}.$$



Umbeschriebene n-Ecke

Beispiel 1.5 (Fortsetzung von Beispiel 1.3)
Für die Seite t_n des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ergibt sich

$$t_{96} = 2\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} \approx 0.065473.$$

Bei Radius $r = 3$ m erhält man 196.4 mm.

Für die Fläche G_n des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks gilt

$$G_n = n\frac{1}{2}t_n \cdot 1$$

und für den Umfang

$$V_n = nt_n,$$

also

$$G_n = \frac{1}{2}V_n.$$

Beispiel 1.6 (Fortsetzung von Beispiel 1.3)
Der Flächeninhalt beträgt $G_{96} = 3142714$. Bei $r = 3$ m ergibt sich die Fläche mit $9\ m^2 \cdot 3.142714 = 28.28\ m^2$.

1.2 Parkettierung mit einer Fläche

Satz 1.7
*Eine lückenlose Parkettierung **ohne** Überschneidungen ist nur mit den regulären n-Ecken für $n = 3, 4, 6$ möglich.*

Beweis. Ausgangspunkt ist ein Punkt der Ebene (z. B. ein Eckpunkt eines Vielecks. Um diesen Punkt gruppieren sich reguläre n-Ecke. Wenn überdeckungsfreie Überlagerung muss gelten:

$$z\alpha = 360° \Rightarrow z \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180° = 360° \Leftrightarrow z \cdot \frac{n-2}{n} = 2$$

also

$$z = \frac{2n}{n-2},$$

wobei $z \in \mathbb{Z}^+$ und $n > 2$ sein muss. Setzt man für n die Anzahl der Ecken ein, so stellt man fest

n (Anzahl der Ecken):	3	4	5	6
Innenwinkel α:	6	4	$\frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$	3

Vielecke mit größeren Eckenzahlen als 6 müssen nicht betrachtet werden, denn für $z \geq 3$ muss der Innenwinkel α des n-Ecks kleiner als 120° sein, also folgt $n \leq 6$. Für $n = 5$ existiert keine lückenlose Parkettierung, also nur für $n = 3, 4, 6$. □

Parkettierungen in diesem Sinne (siehe Definition) sind nur mit gleichseitigen Dreiecken, Quadraten und regelmäßigen Sechsecken möglich.

1.2.1 Parkettierung mit 3 Vielecken

Wir betrachten jetzt 3 reguläre Vielecke mit jeweils x, y bzw. z-Ecken.

Die Winkelsumme um jeden Eckpunkt muss 360° betragen, also

$$\frac{x-2}{x} \cdot 180° + \frac{y-2}{y} \cdot 180° + \frac{z-2}{z} \cdot 180° = 360°$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{x-2}{x} + \frac{y-2}{y} + \frac{z-2}{z} = 2$$

$\Leftrightarrow$

$$1 - \frac{2}{x} + 1 - \frac{2}{y} + 1 - \frac{2}{z} = 2$$

$\Leftrightarrow$

$$-1\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right)=-2$$

$\Leftrightarrow$

$$-2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=-2$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$$

Die Lösung der Gleichung lautet

$$\left\{y=y,z=z,x=2\,\frac{yz}{-2\,z-2\,y+yz}\right\}.$$

2 Geschichtliches über Parkette und Parkettierungen

2.1 Das Zeitalter der Renaissance

Während des Zeitalters der Renaissance entdeckte man die griechisch-römische Bildung und Kunst wieder, welche den Beginn der modernen Welt, gegenüber der antiken und mittelalterlichen Welt darstellte und somit interessierte man sich in diesem Zeitalter wieder verstärkt für die Platonischen Körper. Im Zeitalter der Renaissance beschäftigte man sich mit der Perspekive. Aber auch andere Objekte spielten neben der Perspektive eine wichtige Rolle:

- Anwendung des Grund- und Aufrissverfahrens um räumlich-konstruktive Aufgaben zu lösen,
- geometrische Konstruktionen mittels Näherungswerten sowie die Erfindung von Lösungsmechanismen, um geometrische Aufgaben zu lösen,
- neue geometrische Kurven wurden entdeckt (Flächen, Körper, Kurven),
- ebene Parkette und Ornamente wurden studiert (Beispiel: Abbildung,
- die Schönheit der regulären und halbregulären Polyeder,
- es wurden Versuche unternommen, um Harmonie und Schönheit in Zahlenverhältnisse auszudrücken und
- der Beginn der Fachterminologie in der Geometrie.

Verschiedene dieser Aspekte findet man bei Albrecht Dürer und Leonardo da Vinci. Albrecht Dürer vollendet seine drei theoretischen Schriften und verwendet dabei theoretisches, deduktives und systematisches Vorgehen. Hingegen sind die Arbeiten von Leonardo da Vinci nicht abgeschlossen und er unterscheidet selten zwischen Mathematik und Natur, Deduktion und Induktion und irrt sich hierbei sehr oft. Dagegen hat er andere Stärken. Diese Stärken liegen in der Vorwegnahme technischer Prinzipien und in der Beobachtung der Natur.

2.2 Johannes Kepler

Johannes Kepler wurde am 27. Dezember 1571 in Weilderstadt in Würtemberg als Sohn eines Gastwirts aus der verarmten Familie von Kappel geboren. Die Schule besuchte er in Leonberg, anschließend die Klosterschule zu Maulbronn und bezog nach dem Tode seines Vaters die Universität in Tübingen. Das Fach Mathematik studierte Kepler nur als vorgeschriebenes Vorstudium der Theologie, der er sich zu widmen entschlossen hatte, doch war schon in Tübingen die Unterweisung seines Lehrers Möstlin, der ihn mit der Kopernikanischen Lehre bekannt machte, von wesentlichen Einfluss für seine spätere

Richtung. Hingegen waren die mathematischen Kenntnisse um diese Zeit noch so beschränkt, dass er die ihm 1593 angetragene Professur der Mathematik zu Graz nur in der Hoffnung besserer Ausbildung annahm. Hier fing er an, sich ernsthaft mit der Mathematik und Astronomie zu beschäftigen.

Kepler lebte während des Dreizigjährigen Krieges. Als ihm aber vor dem Dreizigjährigen Krieg seine Besoldung nicht mehr ausgezahlt wurde, begab er sich, nachdem er 11 Jahre in Prag in der größten Dürftigkeit und Kaiser Rudolf II., der ihn nicht von sich lassen wollte, im Januar 1612 gestorben war, 1612 nach Linz, wo er als Professor der Mathematik an der dortigen Landschule fast 15 Jahre in nicht glücklichen Verhältnissen zubrachte und sich hauptsächlich mit der Berechnung der Rudolfinischen Tafeln bechäftigte, die er 1624 vollendete. Durch die Protestantenverfolgung in Oberösterreich wurde der Aufenthalt in Linz unsicher, und um den Druck der Rudolfinischen Tafeln rascher betreiben zu können, verließ er im November 1626 Linz und begab sich nach Ulm, wo er sein Werk veröffentlichte.

1596 veröffentlichte Kepler sein erstes Werk „Prodomus dissertationium cosmographicarum, continens mysterium cosmographicarum“, in denen er auf die endliche Zahl der Platonischen Körper eingeht und den Beweis von Euklid wiedergibt. Die wichtigste unter Keplers Schriften ist die klassische „Astronomia nova seu Physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis“, welche 1609 in Prag erschien. Die von Kopernikus aus Tychos (Tycho Brahe (1546-1601)) Beobachtungen abgeleiteten Gesetze des Planetenlaufs, welches in der Astronomie unter dem Namen der Keplerschen Gesetze bekannt geworden ist, sind es, auf welche sich Newtons Entdeckungen nebst der ganzen neuen Theorie der Planetenbewegung gründen.

Kepler setzte in seinen Untersuchungen die Bahnen der damals 5 bekannten Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Sarturn (außer der Erde) in Beziehung zu den Umkugeln der konzentrisch angeordneten fünf Platonischen Körper und setzte jedem Planeten eine Sphäre, welche näherungsweise, fast exakt, die Planetenbahnen umschließen. Nachdem aber Kopernikus und Galilei ihre Theorien veröffentlichten, musste die Theorie von Kepler relativiert werden und zwar, dass man die Sonne in den Mittelpunkt setzen muss. Kepler schrieb dazu:

„Die Erdbahn ist das Maß für alle anderen Bahnen. Ihr umschreibe ein Dodekaeder; die diese umspannende Sphäre ist Mars. Der Marsbahn umschreibe ein Tetraeder; die dieses umspannende Sphäre ist Jupiter. ... Den Genuß, den ich aus meiner Entdeckung geschöpft habe, mit Worten zu beschreiben, wird mir nie möglich sein. Nun reute mich nicht mehr die verlorene Zeit; ich empfand keinen Überdruß mehr an der Arbeit; keine nicht so beschwerliche Rechnung scheute ich“.

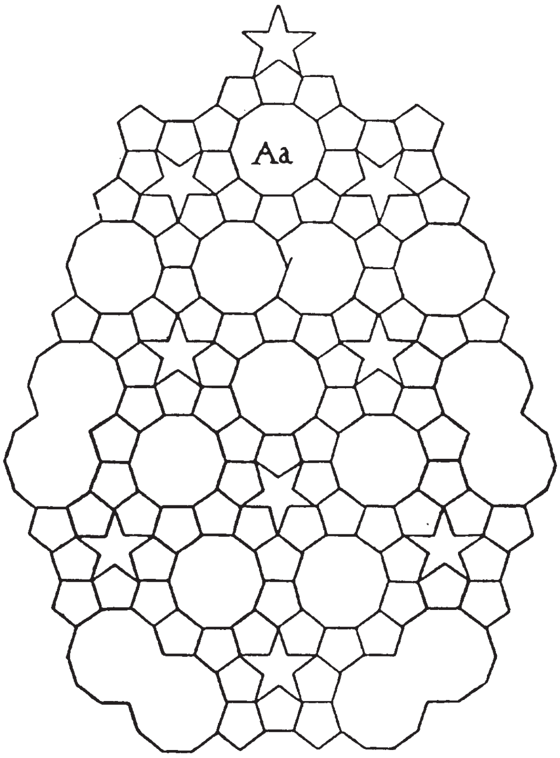
Es gibt also 120=5! verschiedene Möglichkeiten für die Anordnungen und man kann sie der Reihenfolge nach angeben. Ein der Sphäre des Merkur umschriebenes Oktaeder ist zugleich der Sphäre der Venus umbeschriebenes Ikosaeder ist aber zugleich der Sphäre der Erde umschriebenes Dodekaeder und dieses ist zugleich der Sphäre des Mars einbeschrieben und ein der Sphäre des Mars umbeschriebenes Tetraeder ist zugleich der Sphäre des Jupiter einbeschrieben und zum Schluss ist ein der Sphäre des Jupiter umbeschriebenes Hexaeder ist zugleich der Sphäre des Saturn einbeschrieben. Hiermit sind alle Platonischen Körper verarbeitet worden und somit konnte KEPLER das „Weltgeheimnis" lösen und schrieb:

„In der Fünfzahl der regulären Körper die Geometrie, in der Sechszahl der Planeten das Sonnensystem — das ist das „Mysterium Cosmographicum", das Weltgeheimnis."

In seinem Modell seiner Planetentheorie kann man dieses betrachten.

JOHANNES KEPLER starb am 15. November 1630.

KEPLER war Astronom und auch ein kreativer Geometer. In der Geometrie beschäftige er sich mit der Fassrechnung (Keplersche Fassregel), Studien über Parkettierungen und Polyeder. Letztere sind enthalten in der „Harmonice mundi" und in kleinen Schriften „Vom sechseckigen Schnee" (1611). Das Motiv von KEPLER war die feste Überzeugung, dass die gleiche geometrische Harmonie die Welt im Großen wie im Kleinen regiert. Somit versucht er, der spekulativen Kosmologie seines „Mysterium" einen dazu passenden „Mikrokosmos" gegenüberzustellen. Sein systematisches Vorgehen führt ihn dabei dazu, auch Parkette mit sternförmigen Bausteinen und Monstern (Kepplerparkett), Sternpolyeder, von denen oft irrtümlich gesagt wird, er habe sie als erster gekannt und die ersten dualarchimedischen Polyeder aufzufinden und auch die unendlichen Scharen der Prismen und Antiprismen in die Diskussion der archimedischen halbregulären Polyeder einzubeziehen, die er freilich wieder verwirft, weil sie nach seiner Meinung bei genügend großer Eckenzahl nicht mehr „kugelförmig" sondern „scheibenförmig" sind. In der Schrift „Vom sechseckigen Schnee" (1611), einer Neujahrsfestschrift an einem kaiserlichen Hofrat J. M. WACKHER VON WACKENFELS behauptet er, dass keine Kugelpackung im 3-dimensionalen Raum dichter als die des Gauss-Gitters bzw. fcc-Gitters (face-centered cubic) gepackt sei; eine Kugelpackung, die z. B. durch die Atome im Gold realisiert wird. Das KEPLERparkett, aus „Hamonice mundi", ist ein Versuch, ein Parkett mit regulären Fünfecken zu pflastern, das außerdem reguläre Zehnecke, Sternfünfecke und die von KEPLER selbst als „Monster" bezeichneten nichtkonvexen Sechszehnecke enthält. In diesem „Sechseckigen Schnee" wird die Frage diskutiert, wie weit die in der Natur ralisierten hochsymmetrischen Formen durch Naturgesetze und durch die maximale Zweckmäßigkeit bestimmt sind.



Das KEPLERparkett [12]

Das Problem, von Packungen, Überdeckungen und Zerlegungen von Mengen, das Kepler hier betrachtete, gehört zu den allgemeinsten Konzepten der Mathematik (Satz von HEINE-BOREL, Sätze über Triangulierungen). Kugelpackungen, besonders gitterförmige, spielten dabei eine wesentliche Rolle, da eine starke Beziehung zur Zahlentheorie, Geometrie, Gruppentheorie und quadratischen Formen besteht. Anwendungen für diese Konzepte sind in der Codierungstheorie zu finden. Hier betrachtet man besonders dicke Gitterpackungen von Kugeln in Räumen etwa der Dimension 8 bis 800, da diese Packungen besonders gute Codes liefern.

2.3 Maurits Cornelius Escher (1898-1972) – Parkettierung als regelmäßige Flächenaufteilung

Das zentrale mathematische Thema von M. C. Escher war die „regelmäßige Flächenaufteilung“.

Eine Fläche, die man sich nach allen Seiten unbegrenzt fortgesetzt vorstellen muss, kann nach einer beschränkten Zahl von bestimmten Systemen bis ins Unendliche aufgefüllt werden oder aufgeteilt werden in gleichförmige mathematische Figuren, die sich an allen Seiten begrenzen ohne das „eere Stellen“übrigbleiben.

In mathematischer Sprechweise handelt es sich bei den „regelmäßigen Flächenaufteilungen“ um *Parkette*. Dabei ist ein *Parkettstein*, (bei Escher ein „Motiv“) eine beliebige Teilmenge der Ebene, die sich durch umkehrbare stetige Deformation aus einer abgeschlossenen Kreisscheibe herstellen lässt, die also zu einer solchen Kreisscheibe *homöomorph* ist.

2.3.1 „Entdeckungen“ am Escher-Parkett „Reptilien“

Bei der oben abgebildeten Symmetriezeichnung Nr. 25 Eschers hat der einzelne Parkettstein die Form eines Reptils. Offensichtlich überdecken diese Reptilien die Ebene lückenlos und überlappungsfrei und das Muster ist in zwei verschiedenen Richtungen periodisch, was man mühelos an den Richtungen erkennt, in denen sich jeweils Tiere gleicher Farbe wiederholen. Weiterhin kann man offensichtlich jedes Tier einer bestimmten Farbe durch eine Parallelverschiebung des gesamten Musters auf jedes vorgegebene Tier derselben Farbe abbilden. Weiterhin lassen 120°-Drehungen um jeden Punkt, an dem jeweils drei Pfoten, Knie oder Köpfe verschiedenfarbiger Tiere zusammenstoßen, das gesamte Muster (unter Vernachlässigung der Färbung!) unverändert. Daher läßt sich auch jedes Tier einer Farbe auf jedes benachbarte Tier einer anderen Farbe abbilden. Damit lässt sich aber durch Nacheinanderanwendung beider Symmetrieabbildungen jedes Tier auf jedes andere abbilden. Es handelt sich also tatsächlich um ein Parkett.

2.3.2 Geometrische Betrachtungsweise

Man kann die Punkte auf dem Rand eines einzelnen Parkettsteins danach bewerten, zu wie vielen verschiedenen Parkettsteinen im Parkett sie gehören. Man bezeichnet Punkte, die zu mindestens drei verschiedenen Parkettsteinen gehören, als *Eckpunkte* und Punkte, die zu zwei Parkettsteinen gehören, als *Kantenpunkte*. Eine *Kante* ist dann eine zusammenhängende Linie aus Kantenpunkten, die genau zwei Eckpunkte miteinander verbindet. An einer Kante stoßen also genau zwei Parkettsteine aneinander. Das System aus Kanten und Ecken eines Parketts kann man sich sehr gut als „Netz“ vorstellen mit den Eckpunkten als „Knoten“. Umläuft man nun einen einzelnen Parkettstein (etwa im Uhrzeigersinn) und notiert für jeden Eckpunkt seinen Wert, so erhält man eine Sequenz von natürlichen Zahlen, die bis auf zyklische Vertauschungen für alle Parkettsteine desselben Parketts dieselbe ist. Man bezeichnet diese Sequenz auch als *Knüpfmuster* des betreffenden Parketts.

2.3.3 Realisierung der Knüpfmuster

Es gibt 11 verschiedene Knüpfmuster. Knüpfmuster durch Parkettsteine.

3/4 Seite frei lassen

M. C. Escher experimentierte mit handwerklicher Meisterschaft mit geometrischen Formen, Objekten und Gesetzen. Seine Holzschnitte und Lithografien gaben den Betrachtern nicht selten „virtuelle Rätsel“ auf. Die Lithografie „Tag und Nacht“ ist ein Beispiel, wie Escher mit Metamorphosen experimentiert hat. Eine Formation fliegender weißer Vögel impliziert bei Veränderung der Betrachtungsweise (Dominanz von weiß oder schwarz) einen Schwärm im Gegenzug fliegender schwarzer Vögel. Die „Lücken“ zwischen den weißen Vögeln lassen schwarze Vögel erkennen. Bilder wie diese werfen die Frage auf, wie das Erkennen bzw. Wiedererkennen eines Objektes eigentlich funktioniert, von welcher Grenze der Deutlichkeit an wir „weiße Vögel“ und „schwarze Vögel“ identifizieren und ihre geometrische Beziehung erkennen. Im Grenzbereich von Mathematik und Informatik beschäftigt sich die Mustererkennung als Teilgebiet der künstlichen Intelligenz mit diesen Phänomenen, die M. C. Escher in seinen Werken verarbeitet hat.

3/4 Seite frei lassen

„Konkav und konvex“

Kein Künstler hat die Mehrdeutigkeit des Figurenwahrnehmens sorgfältiger untersucht als MAURITS CORNELIS ESCHER. In seinen beeindruckenden Serien lithographischer Drucke hat er die Geheimnisse und Mehrdeutigkeiten von Perspektive und optische Illusionen auf bemerkenswerte Weise eingefangen. ESCHERS Kunst tendiert in ihrer besonderen Wirkung zu einem mathematischen Einschlag, denn obwohl sie mannigfach an bestimmte surrealistische Bilder erinnert, ist seine Kunst tatsächlich außerordentlich intellektuell. In frühen Arbeiten wie „*Acht Köpfe*" spielte Escher vergnügt mit den Möglichkeiten der Mehrdeutigkeit, und die Ergebnisse waren recht einfach. Hier verwandeln sich die wiederholten Kopfformen durch Inversion in einen Fries sehr unterschiedliche Köpfe. Als er aber darang ging, die berühmte Lithographi „*Konkav und konvex*" zu zeichnen, bekannte er sich: „Ich verwandte mehr als einen ganzen Monat darauf, um über diesem Bild zu brüten; meine anfänglichen Zeichnungen waren alle viel zu kompliziert und hatten weder Hand noch Fuss."

„*Konkav und konvex*" ist alptraumhaft mehrdeutig. Auf den ersten Blick scheint das Gebäude symmetrisch zu sein; es besteht aus zwei Hälften, die eine ist die nahezu spiegelbildliche Wiedergabe des anderen und in der Mitte geteilt. Versuchen Sie jedoch, einer der menschlichen Figuren zu folgen, die die vielen Treppen auf- und abgehen, dann stellen Sie fest, dass alles von innen nach außen funktioniert, sobald Sie über die Mitte hinauskommen, wobei das Konvexe während der Betrachtung konkav wird (und umgekehrt).

Eine Frau im oberen Teil des Gebäudes im linken Teil des Bildes trägt einen Korb und ist dabei, eine Treppe hinunterzusteigen zu einem Absatz, wo sich ein kleines Becken befindet. Das Becken ist aber zugleich die muschelförmige Verzierung einer Decke, an der zwei Eidechsen angeklebt sind, und so begibt sich die Frau in die Gefahr ins Leere zu stürzen! Die Treppe auf der rechten Seite verwandelt sich in ein aufsteigendes Gewölbe, das einen Bogen stützt. Das ganze Bild ist voll von solchen Übergängen zwischen konvex und konkav, die Auge und Verstand in die Irre führen. Je länger Sie hinsehen, um so verwirrender wird das Bild. Der Künstler selbst sagte dazu: „Meiner Meinung nach ist eine unmögliche Situation nur dann wirklich gut, wenn die Unmöglichkeit nicht unmittelbar auf der Hand liegt ... Es muss ein wenig mysteriös sein und nicht sofort ins Auge fallen."

1/2 Seite frei lassen

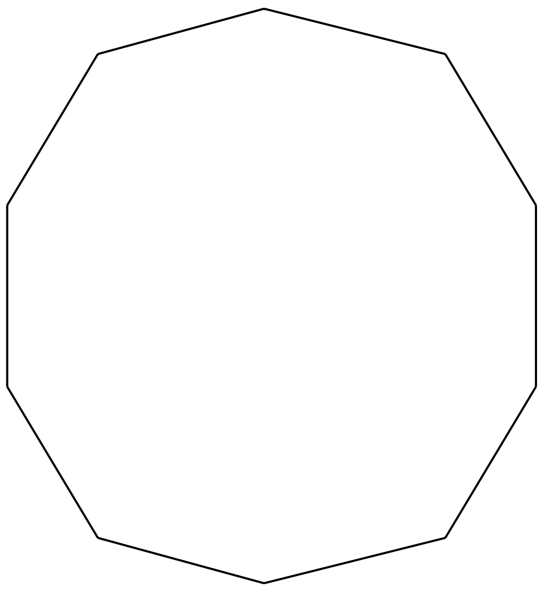
In „*Die kreisförmige Grenze*" wechseln Engel und Teufel einander ab und „springen" zwischen Vordergrund und Hintergrund hin und her.

3 Das Penrose-Parkett

Die Penrose-Parkettierung besteht aus unzählig vielen, zwei verschieden großen Rauten. Das Penrose-Parkett nach seinem Erfinder, dem britischen Physiker Robert Penrose benannt, welcher 1974 entdeckte, dass man mit nur zwei geometrischen Formen anhand weniger, bestimmten Regeln der Zusammensetzung eine unendlich große Fläche mit unendlich vielen Kombinationen bedecken konnte, ohne dass sich einzelne Teilausschnitte je wiederholten. In diesem Zusammenhang muss beachtet werden, dass sich gewöhnliche Muster auf einer unendlichen Fläche unendlich oft wiederholen und somit die Eigenschaft besitzen, dass sie symmetrisch und periodisch sind. Die Penrose Parkette sind unsymmetrisch und aperiodisch, da sie einzelne sehr symmetrische Kleinbereiche aufweisen, aber größere gleichende Flächen nie auftreten.

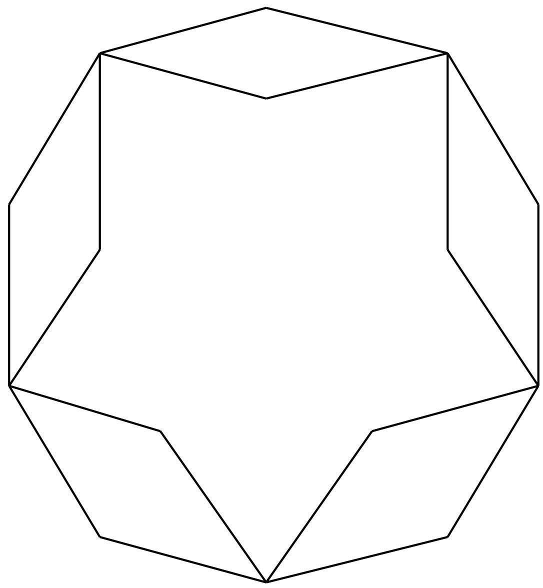
Wir betrachten nun, wie man aus einem Zehneck eine Penrosefigur konstruieren kann.

(a) Zunächst wird das reguläre Zehneck konstruiert.



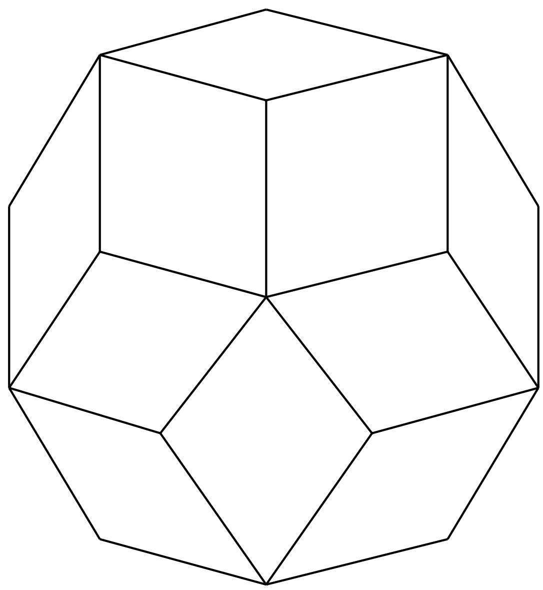
Das reguläre Zehneck

(b) Konstruktion der fünf schmalen Rauten. Der Winkel der Raute muss 36° besitzen und der weitere Winkel $180° - 36° = 44°$.



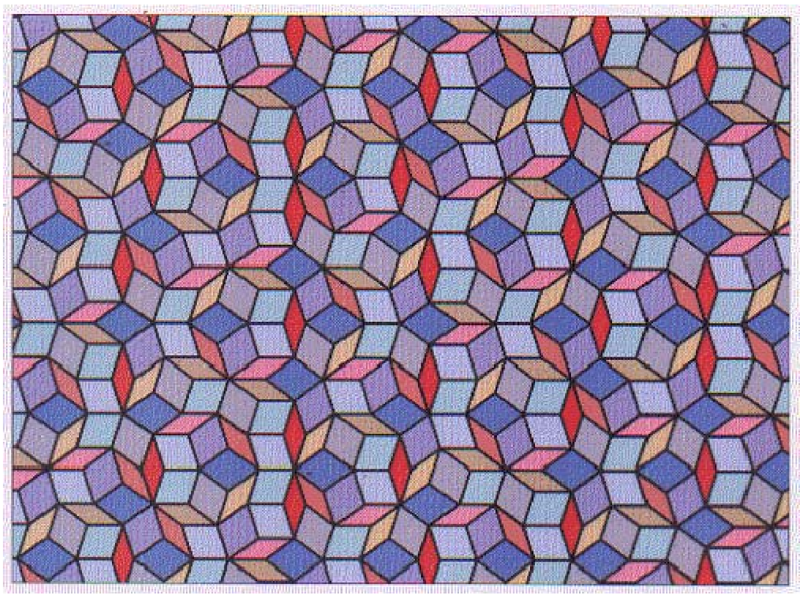
Das reguläre Zehneck mit fünf 36°-Rauten

(c) Die restlichen fünf Rauten ergeben sich dann durch Parallelverschiebung. Dabei gilt $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, also $72^\circ = 180^\circ - 3 \cdot 36^\circ$ und $108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$.



Das reguläre Zehneck mit fünf 36°-Rauten und fünf 72°-Rauten

Führt man diese Konstruktion mehrfach aus und legt die Parkette aneinander, so stellt man fest, dass von sechs verschiedenen Parkettierungen fünf achsensymmetrisch sind.



Das Penroseparkett

Man spricht von fünfzähliger Rotationssymmetrie. Aus diesen Überlegungen folgt, dass es für das reguläre Zehneck sechs mögliche Parkettierungen gibt.

Wir betrachten nun weitere n-Ecke. Hierbei gehe man genauso vor wie bei der Konstruktion des Zehnecks. Man erhält für den Winkel der Rauten $\frac{360°}{n}$. Dieses sind die schmalen Rauten, für die die Winkel $\frac{360°}{n}$ und $180° - \frac{360°}{n}$ betragen. Eine weitere Raute passt an zwei solche schmalen Rauten, welche die Winkel $(\frac{n}{2} - 3) \cdot \frac{360°}{n} = 180° - \frac{1080°}{n}$ und $180° - (\frac{n}{2} - 3) \cdot \frac{360°}{n} = \frac{1080°}{n}$ besitzen. Es ergibt sich

n	$\frac{360°}{n}$	$180° - \frac{360°}{n}$	$180° - \frac{1080}{n}$	$\frac{1080}{n}$
3	120°	60°	−180°	360°
4	90°	90°	−90°	270°
5	72°	108°	−36°	216°
6	60°	120°	0°	180°
7	51.4°	128.6°	25.7°	154.3°
8	45°	135°	45°	135°
9	40°	140°	60°	120°
10	36°	144°	72°	108°

Hierbei stellt man folgendes fest:

- Für gerades n sind die betrachteten Winkel bei den anstoßenden Rauten Vielfache voneinander.

- Dieses ist bei ungeraden n nicht mehr der Fall (wird im Folgenden nicht weiter betrachtet).
- Dividiert man die Winkel $180° - \frac{1080°}{n}$ durch $\frac{360°}{n}$ so stellt man fest, dass eine ganzzahlige Zahl entsteht.

Bei der Konstruktion des Penrose Parketts beginne man mit den beiden schmalen Rauten und füge dann $n-3$ weitere hinzu. In die dabei entstehenden Zwischenräume passe $n-2$ Rauten mit dem spitzen Winkel $360° - 2(180° - \frac{180°}{n}) = \frac{360°}{n} = 2 \cdot \frac{180°}{n}$ und dem stumpfen Winkel $180° - 2 \cdot \frac{180°}{n} = (n-2)\frac{180°}{n}$. Damit erhält man zwischen den Winkeln zweier Rauten bei $2n$-Ecken folgenden Zusammenhang

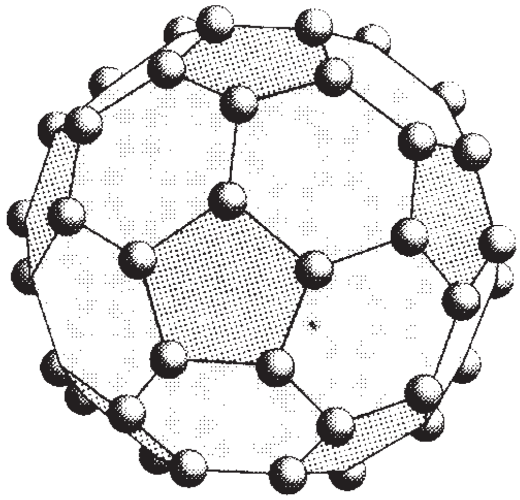
n	$\frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$	$180° - \frac{1080°}{2n} = 180° - \frac{540°}{n}$	Vielfachfaktor
4	45°	45°	1
5	36°	72°	2
6	30°	90°	3
7	25.7°	102.9°	4
8	22.5°	112.5°	5

In den entstehenden Zwischenräumen der $n-2$ Rauten passen wieder $n-3$ Rauten u. s. w. Weitere Möglichkeiten erhält man durch Drehen der Flächen. Insgeamt benötigt man somit $\frac{n(n-1)}{2}$ Puzzle.

4 Der Fussball als Parkett

Der Fussball vor 30 Jahren war ein 12-Flächner mit der Oktaeder-Gruppe als Symmetriegruppe. Nach dem Einzug des Farbfernsehens wurde dieser Fussball verändert und nahm die Form eines 32-Flächners mit der Symmetriegruppe der Ikosaedergruppe ein, wobei das Fünfeck die Farbe schwarz und das Sechseck die Farbe weiss bekam. Der Zuschauer, der im Besitz eines Farbfernsehers war, konnte diesen Fussball somit besser vom Grün des Fussballrasens unterscheiden. Aufgebaut ist ein Fussball aus einer flexiblen Gummi-Blase, welche von einer Decke aus Leder- bzw. lederähnlichem Kunststoff geschützt ist, wobei die Decke aus verschiedenen ebenen Stücken zusammengenäht ist. Diese Blase wird mit Luft bei hohem Druck gefüllt, also aufgeblasen, und erhält die Form einer Kugel.

Aber auch in der Naturwissenschaft, besonders in der Festkörperphysik, findet man die Form des Fussballs bei sogenannten Clustern wieder. Cluster sind Gebilde aus n Atomen oder Molekülen ($n \approx 3 \ldots 10^6$), die entweder nur schwach gebunden sind (van der Waals-Cluster) oder auch stärkere Bindungen aufweisen können. Sehr große Cluster ($n \approx 10^6$) haben bei sphärischer Geometrie einen Durchmesser von 40 nm und sind daher sehr klein gegenüber Staubkörnern oder Zigarettenrauchpartikeln. In den letzten Jahren wurden besonders spezielle Kohlenstoffcluster C_{60} und C_{70} untersucht. Diese bilden eine geometrische Käfig-Anordnung in der Form eines Fussballs und bestehen aus einer fast kugelförmigen Oberfläche aus Sechsecken und zehn Fünfecken. Diese erinnern an architektonische Bauten des kanadischen Architekten Badminster Fuller und werden Fullerene genannt. Neben Diamant und Graphit stellen sie eine neue Form von Kohlenstoffgittern dar und haben die Eigenschaft, im Innern Fremdatome wie in einem Käfig speichern zu können.

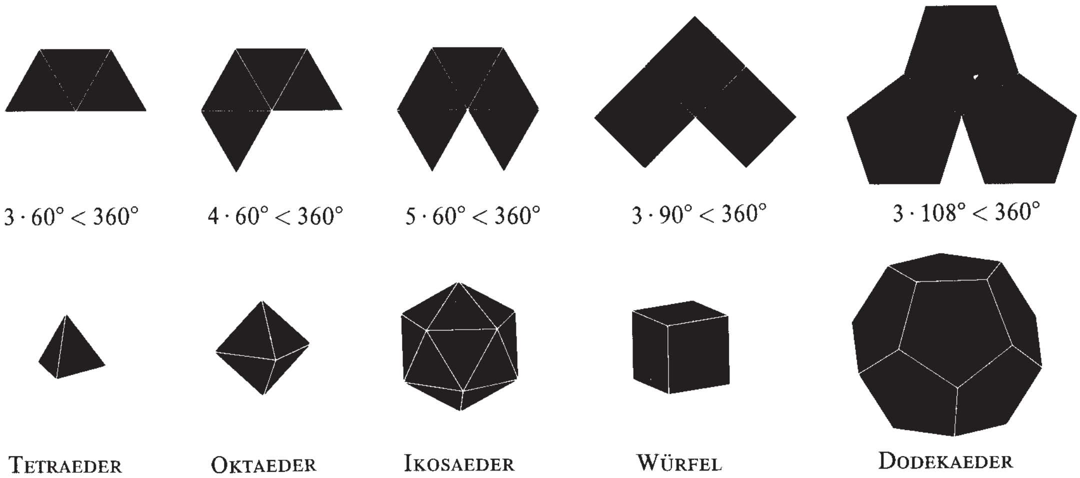


Strukturmodell des Fulleren-Clusters C_{60} [4, p. 508]

Auf weitere interessante Eigenschaften von Clustern kann hier nicht näher eingegangen werden. Wir verweisen auf [4].

Nach diesem interessanten Ausflug in die Physik werden wir uns nun wieder der Geometrie des Fussballs zuwenden. Damit die ebenen Teilflächen überdeckungsfrei angeordnet werden können, müssen diese Polygone sein. Damit ist der Fussball ein Polyeder.

Satz 4.1
Die Summe der Winkel, die zwischen den Kanten einer konvexen Ecke entstehen, ist immer kleiner als 360°.



Die Summe der Winkel zwischen den Kanten einer konvexen Ecke [1, S. 171]

Nach dem Satz 4.1, dass die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke kleiner als 360° ist, kann es nur die fünf regelmäßigen Körper geben.

(a) Bei der Begrenzung des Polyeders durch gleichseitige Dreiecke kann nämlich eine Ecke, da ihre Kantenlänge je 60° ist, nur aus drei, vier oder fünf Seitenflächen gebildet sein. Bei 6 Seitenflächen wäre die Summe der Kantenwinkel bereits $6 \cdot 60° = 360°$, was ein Widerspruch zum Satz 4.1 darstellt.

(b) Bei der Begrenzung des Polyeders durch Quadrate.

(c) Durch regelmäßige Fünfecke (Kantenwinkel jeweils 108°) kann eine Ecke nur aus 3 Seitenflächen gebildet werden.

Regelmäßige Sechsecke können regelmäßige Polyeder nicht begrenzen, da $3 \cdot 120°$ nicht mehr kleiner als 360° ist.

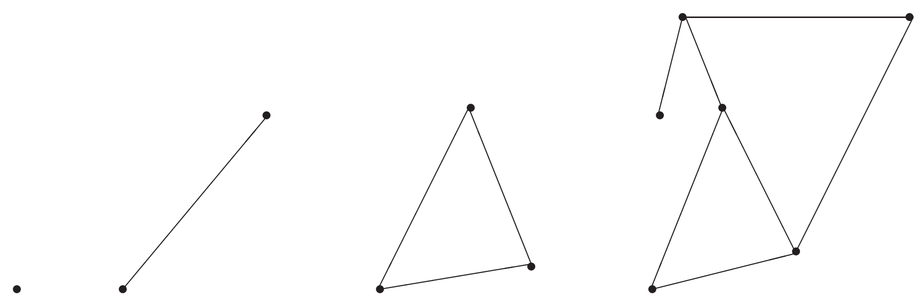
Ein weiteres Merkmal der Platonischen Körper sind die einbeschriebenen und umbeschriebenen Kugeln. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Poyeders ist zugleich der gemeinsame Mittelpunkt dieser Kugeln. Die Oberfläche der umbeschriebenen Kugel geht durch alle Ecken des Polyeders und die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel berührt jede Seitenfläche in ihrem Mittelpunkt. Aus diesen Resultaten folgt

Satz 4.2
Die in den Mittelpunkten der Seitenflächen errichteten Senkrechten schneiden sich im Mittelpunkt des Polyeders.

Satz 4.3 (Polyedersatz von Euler)
Hat ein konvexes Polyeder f Flächen, e Ecken und k Kanten, so gilt

$$f + e - k = 2.$$

Beweis: Bevor wir beginnen, untersuchen wir einige Streckenpläne. Unter Streckenplänen versteht man zusammenhängende Gebilde, die aus Punkten und Verbindungsstrecken bestehen.

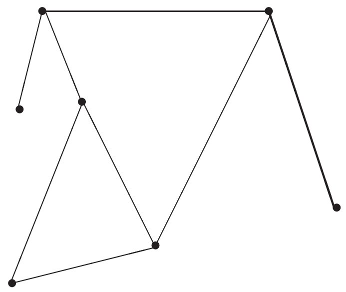


$f = 0$	$f = 0$	$f = 1$	$f = 2$
$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 6$
$f + e - k = 1$	$f + e - k = 1$	$f + e - k = 1$	$f + e - k = 1$

Skizze zum Polyedersatz von Euler

Für jeden Streckenplan hat die Zahl $f + e - k$ den Wert 1. Dieses ist klar, wenn man sich überlegt, wie ein Streckenplan entsteht. Zunächst beginnt man mit einem Punkt. Für ihn stimmt die Behauptung. Anschließend zeichnet man eine Strecke dazu. Entscheidend ist, dass diese Strecke eine schon vorhandene Strecke nicht schneidet. Um dieses zu bewerkstelligen, gibt es 2 Möglichkeiten:

1. Zuerst zeichnet man einen neuen Punkt ein. Diesen verbindet man mit einem schon vorhandenen Punkt. Somit entsteht eine neue Kante und eine neue Ecke. Wichtig hierbei ist, dass die Flächenzahl f gleich bleibt.



$f = 2$

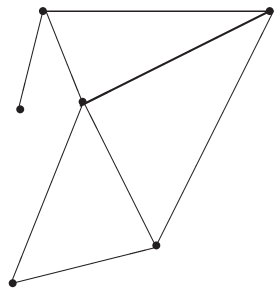
$e = 6+\mathbf{1}$

$k = \mathbf{7+1}$

$f + e - k = 2 + (6+\mathbf{1}) - (7+\mathbf{1}) = 1$

Die erste Möglichkeit: Setzen eines **neuen Punktes**

2. Es werden 2 vorhandene Punkte verbunden. Dabei entstehen eine neue Kante und eine neue Fläche. Auch hier bleibt die Eckenzahl e gleich.



$$f = 2+\mathbf{1}$$

$$e = 6$$

$$k = 7+\mathbf{1}$$

$$f + e - k = (2+\mathbf{1}) + 6 - (7+\mathbf{1}) = 1$$

Die zweite Möglichkeit: Setzen einer **neuen Strecke**

Aus 1. und 2. folgt, dass sich die Zahl $f + e - k$ nicht ändert.

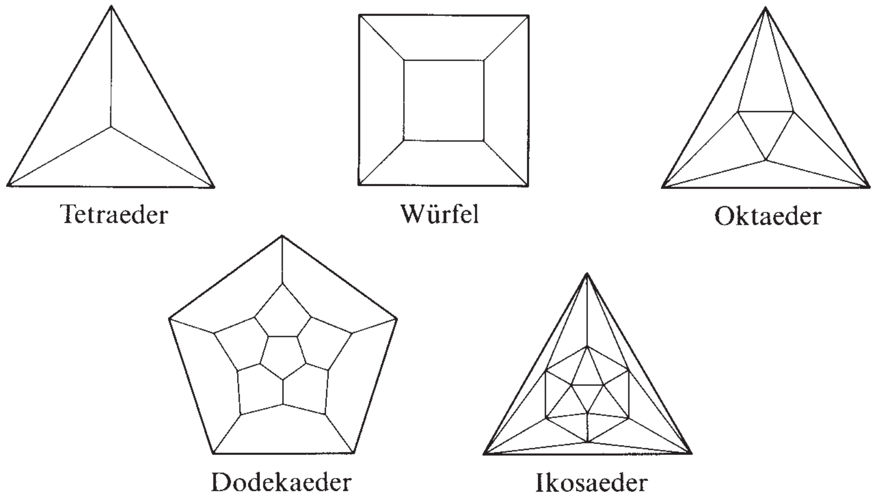
Ein konvexes Polyeder kann man immer als Kantenmodell anschauen, sodass man es als Streckenplan sieht. Wichtig hierbei ist, dass dieser Streckenplan genauso viele Kanten und Ecken hat wie das Polyeder. Um dieses zu verwirklichen, muss man mit dem Auge nur nahe genug an eine Fläche herangehen. Einen Streckenzug, der auf diese Art und Weise entsteht, bezeichnet man auch als Schlegel-Diagramm. Wie oben gezeigt gilt hier

$$f + e - k = 1.$$

Das Polyeder hat aber eine Fläche mehr als das Schlegel-Diagramm. Daraus ergibt sich, dass für konvexe Polyeder

$$f + e - k = 1 + 1 = 2$$

gilt. □



Die fünf Platonischen Körper [1, S. 176]

Aus der Linearen Algebra weiß man, dass orthogonale Matrizen, deren Determinante $+1$ ist, eine Untergruppe bilden, die wir spezielle orthogonale Gruppe nennen und mit SO_n bezeichnen. GL stehe für general linear, also der Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$. Also

$$SO_n = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^t A = I \text{ und } \det\ A = +1\}.$$

Satz 4.4
Die jeweils endlichen Untergruppen der Drehgruppe SO_3 sind:

1. *Die **zyklische Gruppe** der Drehungen um das Vielfache von $\frac{2\pi}{k}$ um eine Drehachse. Diese bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_k$.*
2. *Die **Diedergruppe** der Symmetrien eines regelmäßigen k-Ecks in einer Ebene, aufgefasst als räumliche Drehung. Diese bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_k$.*
3. *Die **Tetraedergruppe** der zwölf Drehungen, die ein reguläres Tetraeder in sich überführen. Diese bezeichnen wir mit $\mathcal{T}$.*
4. *Die **Würfelgruppe**, bestehend aus 24 Drehungen, die einen Würfel oder ein reguläres Oktaeder in sich überführen. Diese bezeichnen wir mit $\mathcal{W}$.*
5. *Die **Ikosaedergruppe** der 60 Drehungen eines regulären Dodekaeders oder eines regulären Ikosaeders. Diese bezeichnen wir mit $\mathcal{I}$.*

Beweis: Es sei $\mathcal{G}$ eine endliche Untergruppe von SO_3 und die Ordnung von $\mathcal{G}$ sei $ord(\mathcal{G}) = N$. Jedes Element $g \neq 1 \in \mathcal{G}$ ist eine Drehung um die Drehachse l, und diese Gerade ist eindeutig bestimmt. Somit lässt g genau 2 Punkte der Einheitssphäre $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$ fest, nämlich die Schnittpunkte der Drehachse l mit $\mathcal{S}$. Diese Punkte bezeichnen wir mit Pole von g. Ein Pol ist also ein Punkt p

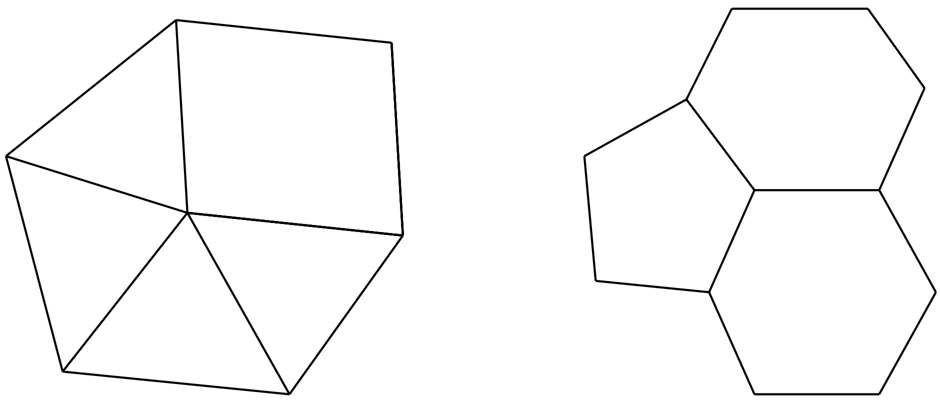
auf der Einheitssphäre, sodass $gp = p$ für ein geeignetes Element $g \neq 1$ von $\mathcal{G}$ gilt. Sei $\mathcal{G}$ die Gruppe der Drehsymmetrien eines Tetraeders, dann sind die Pole diejenigen Punkte von $\mathcal{S}$, die über den Eckpunkten, den Mittelpunkt der Seitenflächen und den Mittelpunkten der Kanten des Tetraeders liegen. □

Unser regelmäßiges n-Eck hat die Diedergruppe als räumliche Symmetriegruppe. Bei zunehmender Eckenzahl n wird das reguläre n-Eck immer kreisähnlicher. Um einen kugelähnlichen Polyeder zu erzeugen, ist dieses Verfahren aber ungünstig, da bei einem großen Flächeninhalt ausgedehnte flache Flächen entstehen.

Wir betrachten nun die räumlichen Eckpunkte. Hierbei unterscheidet man zunächst zwischen

- der *Ecke*, dem reinen Eckpunkt und
- dem *Eckenkranz*, welcher die Vereinigung aller Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen darstellt.

Zunächst stellt man fest, dass die Polygonwinkel die Winkel eines Eckenkranzes sind. Damit erhält man zunächst

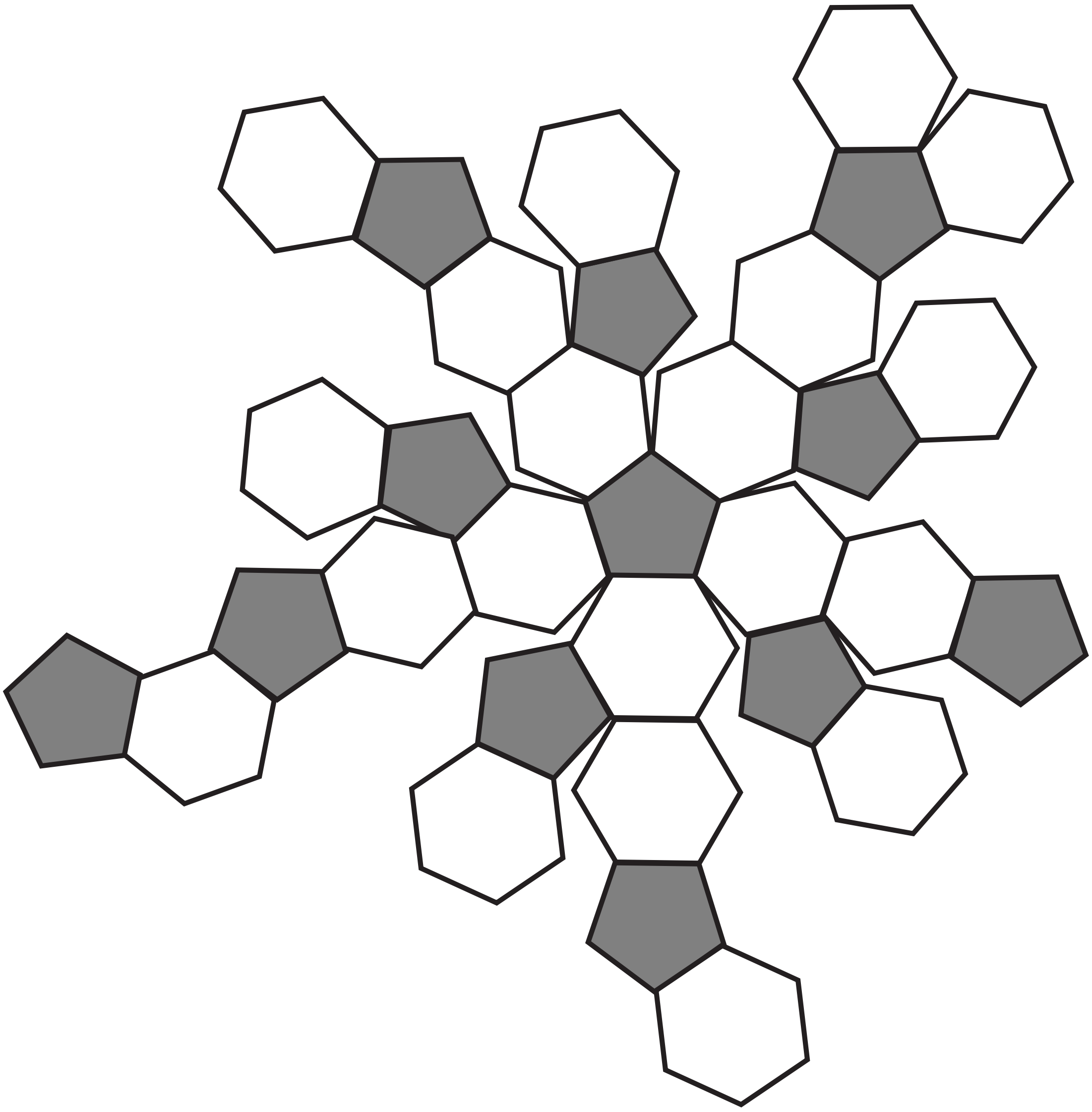


Zur Veranschaulichung des Eckenkranzes und des Polygonwinkels

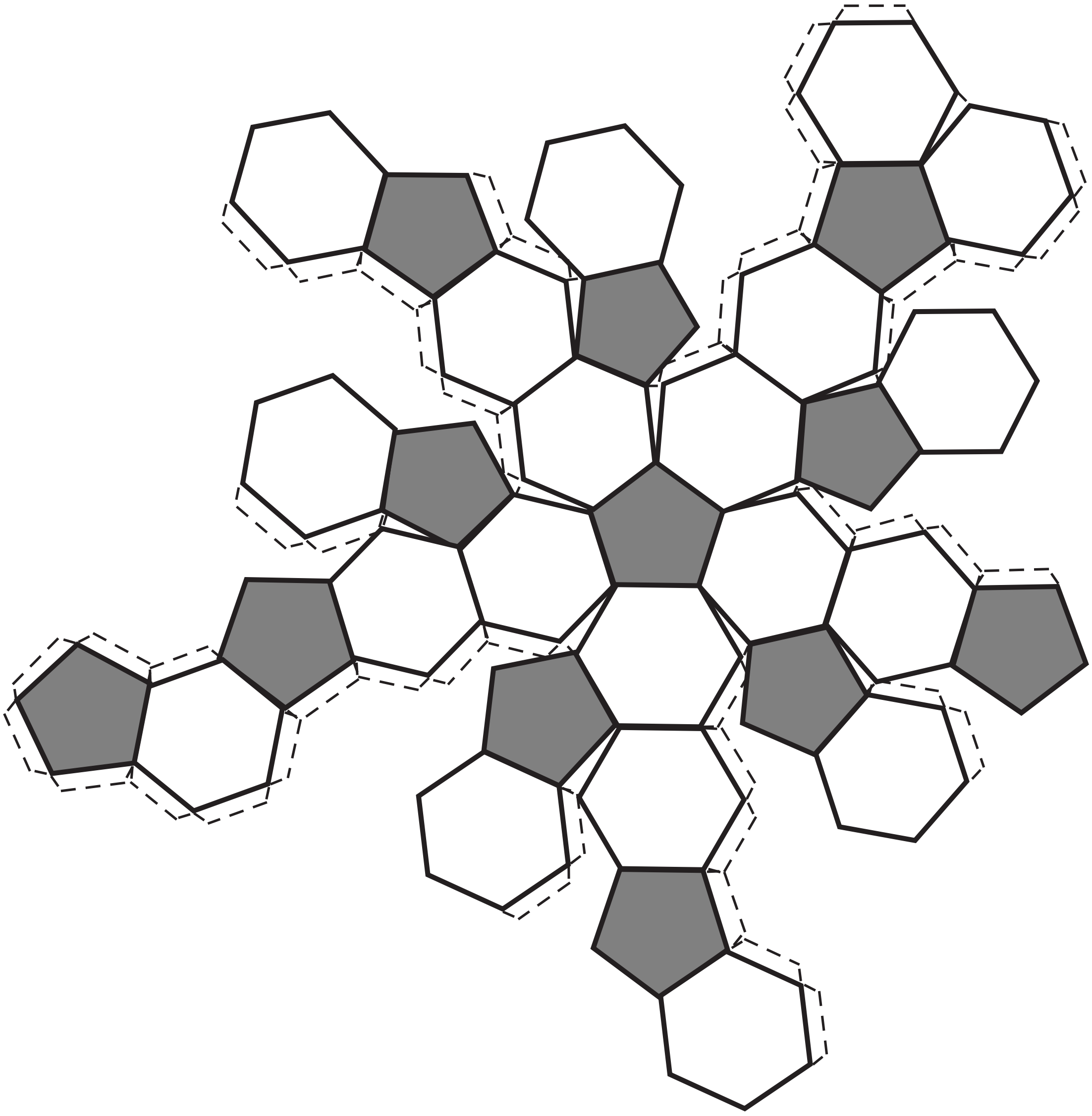
Wie in Satz 4.1 gesehen, ist die Winkelsumme eines konvexen Eckenkranzes kleiner als 360°.

Wir betrachten nun einen konvexen Eckenkranz. Enthält ein solcher konvexer Eckenkranz nur regelmäßige Polygone, dann mus ein Polygon eine höchste Eckenzahl von fünf haben, denn bei drei Polygonen der Eckenzahl größer gleich sechs gilt, dass die Winkelsumme größer als 360° ist, was im Widerspruch zu unserem Satz 4.1 steht.

Das Netz des Fussballs kann damit konstruiert werden:



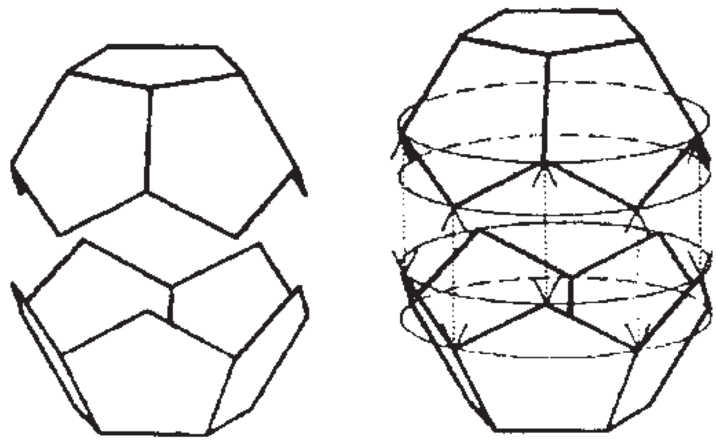
Das Netz des Fussballs



Das Netz des Fussballs mit Klebkante

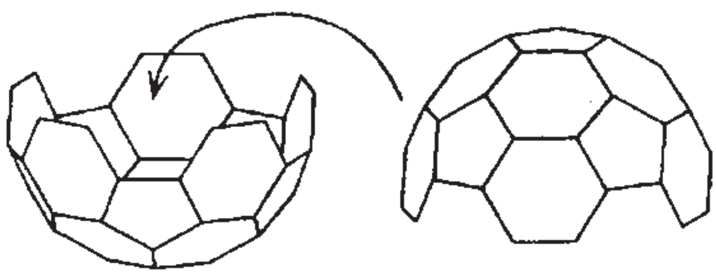
Diese beiden Netze brauchen dann nur noch gefaltet und geklebt zu werden.

Eine weitere Variante zur Herstellung eines Fussballs soll der Einfachheit halber am Dodekaeder demonstriert werden. Zunächst stellt man 2 Hälften her,



Zwei Hälften eines Dodekaeders [2, p. 6]

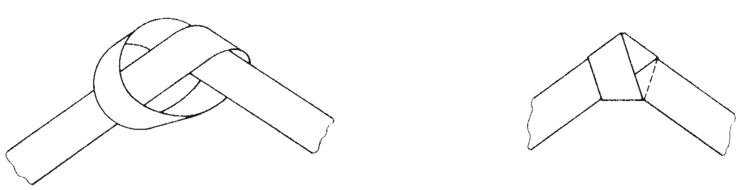
welche rotationssymmetrisch mit dem Drehwinkel $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ sind. Die Randlinie stellt eine Zickzacklinie dar. Obere Punkte liegen auf einem Kreis um die Symmetrieachse, untere ebenfalls. Beide Kreise mit dem Radius $\varrho = \frac{1}{\tan 36°}$ sind kongruent. Anschließend setze man die beiden Hälften zusammen und erhält einen Dodekaeder. Verfährt man bei Fussball analog, so erhält man den Fussball.



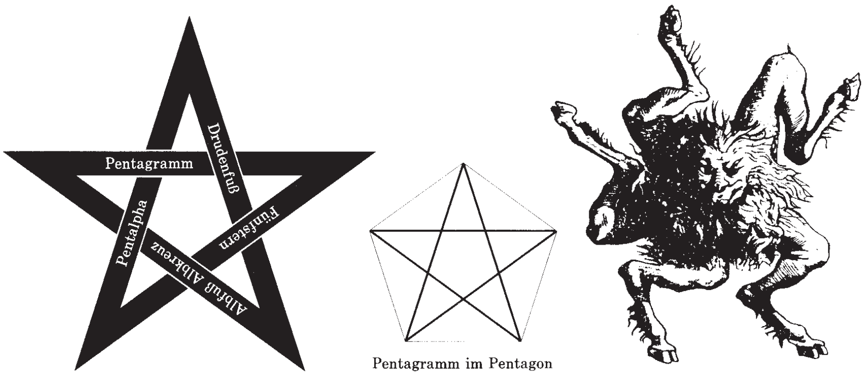
Zwei Hälften eines Dodekaeders [2, p. 6]

4.1 Der Goldene Schnitt

Künstler und Maler interessierten sich dabei vor allem für das regelmäßige Fünfeck, dem Pentagramm. Ein solches Pentagramm entsteht, indem man einen Papierstreifen einmal knotet und den entstehenden Knoten platt drückt.



Hierbei stellt man etwas sehr interessantes fest. Zeichnet man in ein regelmäßiges Fünfeck die Diagonalen ein oder verlängert man die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks, so entsteht ein fünfzackiger Stern, welchen man auch Fünfstern nennt. Andere Bezeichnungen für den Fünfstern sind Pentagramm, Pentalpha, Drudenfuß, Albfuß bzw. Albkreuz.



Pentalpha, Pentagramm im Pentagon, Drudenfuß [1, S. 135]

Johannes Kepler werden folgende Worte in die Feder gelegt:

> *„Die Geometrie birgt zwei große Schätze: der eine ist der Satz von* Pythagoras*, der andre ist der Goldene Schnitt. Den ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den zweiten dürfen wir ein kostbares Juwel nennen."*

Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.) entdeckte am Pentagramm etwas, was der Lehre von Pythagoras den Todesstoß versetzte. Nach dem pythagoräischen Weltbild beruhen aber alle Harmonien auf Verhältnisse natürlicher Zahlen, also auf rationale Zahlen. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass es für je 2 Strecken ein gemeinsames Maß m geben muss, das in beide Strecken genau reinpasst. Nun konnte Hippasos von Metapont jedoch nachweisen, dass das Verhältnis von Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks irrational ist. Damals kam es darüber zu kontroversen Diskussionen und dies war eine Revolution in der damligen Mathematik. Die Anhänger dieser neuen Erkenntnis nannte man „Mathematikoi", woraus das Wort Mathematiker entstand. Die Gegner nannte man „Akusmatikoi", was soviel bedeutet wie Hörende.

Vermutlich zeigte Hippasos dieses so: Man verkettet regelmäßige Fünfecke so, dass die Seite s_n eines Fünfecks die Diagonale d_{n+1} des nächsten Fünfecks wird. Wenn man dieses mathematisch übersetzt, ergibt sich

$$d_{n+1} = s_n$$

und daraus folgt

$$s_{n+1} = d_n - s_n.$$

Nun nehmen wir an, dass s_n und d_n ein gemeinsames Maß m hätten. Dann müsste das gemeinsame Maß aber auch s_{n+1} und d_{n+1} haben. Nun werden aber die Fünfecke und damit auch ihre Seiten und Diagonalen entsprechend klein. Wenn man dieses Verfahren so fortsetzt, so stößt man auf ein Fünfeck, dessen Seite kleiner ist als das angenommene Maß m. Also kann es kein gemeinsames Maß geben. Diese geometrische Interpretation kann man nun algebraisch übersetzen. Dann ist

$$\sigma = \frac{\text{Seite}}{\text{Diagonale}} = \frac{s_n}{d_n}$$

und

$$\tau = \frac{\text{Diagonale}}{\text{Seite}} = \frac{d_n}{s_n}$$

irrational. Die Streckenverhältnisse σ und τ, was ja $\tau = \frac{1}{\sigma}$ ist, sind in der Geometrie auch in anderen Zusammenhängen bekannt geworden. T teilt die Strecke d so, dass sich die ganze Strecke d zum längeren Abschnitt s genauso verhält wie der größere Abschnitt s zum kleineren Abschnitt $d - s$. Anders gesagt: Der Punkt T teilt die Strecke stetig oder nach dem Goldenen Schnitt.

Im Folgenden berechnen wir σ und τ. Es gilt, gemäß Vorüberlegung

$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s} \Rightarrow \frac{d}{s} = \frac{1}{\frac{d}{s} - 1}$$

und somit

$$\tau = \frac{1}{\tau - 1} \Leftrightarrow \tau^2 - \tau - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung kann gelöst werden, wobei $\tau > 0$ sein muss. Es ergibt sich

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618,$$

was die Zahl des Goldenen Schnittes darstellt.

Für σ ergibt sich damit

$$\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma^2 + \sigma - 1 = 0$$

und mit $\sigma > 0$ ergibt sich

$$\sigma = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \tau - 1 \approx 0.618.$$

Wenn man diese Zahlen σ und τ näher betrachtet, stellt man fest, dass sich jede von ihnen um 1 von ihrem Kehrwert unterscheidet. Aber es gilt noch mehr. Betrachtet man die Wurzelfolge für τ

$$\tau^2 = 1 + \tau \text{ und } \tau > 0,$$

also

$$\tau = \sqrt{1+\tau} = \sqrt{1+\sqrt{1+\tau}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

und für σ ergibt sich ein Kettenbruch

$$1 = \sigma^2 + \sigma$$

$$\frac{1}{\sigma},$$

$$\sigma = \frac{1}{1+\sigma}\sigma = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\sigma}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sigma}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}}.$$

In Folgendem betrachten wir die Näherungsbrüche für σ, welche sich mit Kettenbruchentwicklung ergeben:

$$\sigma_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{1+\sigma_1} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1+\sigma_2} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{1+\sigma_3} = \frac{3}{5}$$

$$\sigma_5 = \frac{5}{8}$$

$$\sigma_6 = \frac{8}{13}$$

$$\sigma_7 = \frac{13}{21} \approx 0.619.$$

σ_7 ist näherungsweise fast $\sigma = 0.618$.

Betrachtet man die Zähler und Nenner, so stellt man fest, dass die Summe des Zählers und Nenners des vorausgegangenen Bruches den neuen Bruch ergeben, also

Zähler	1	1	2	3	5	8	13 …
Nenner	1	2	3	5	8	13	21 …

Solche Zahlenfolgen entdeckte Leonardo von Pisa, kurz Fibonacci genannt. Die Rekursionsgleichung, für die n-te Fibonaccizahl, ergibt sich mit

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

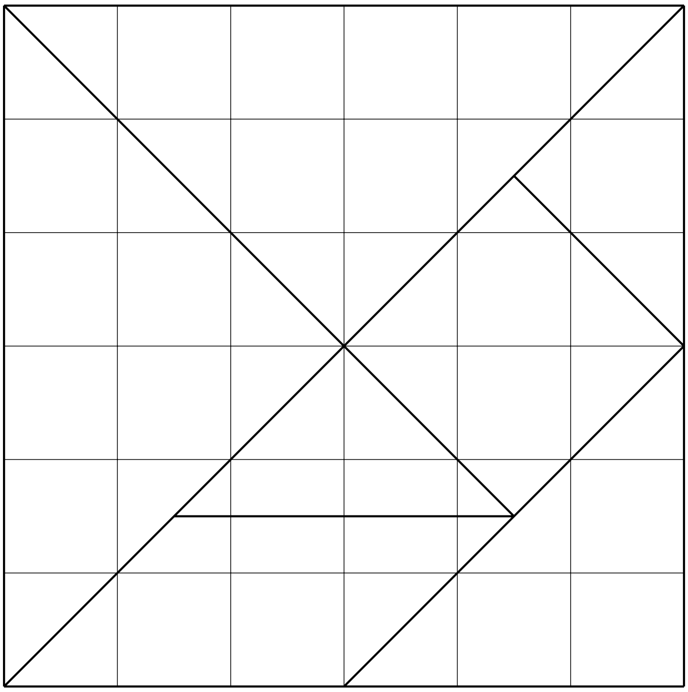
5 Tangram – eine etwas „andere“ Parkettierung

Unter den vielen in Europa beliebten Legespielen nimmt das Tangram eine besondere Stellung ein. Während zum Beispiel beim Puzzle ein Bild aus vielen ganz verschieden geformten Teilen zusammengesetzt wird und die Schwierigkeit hauptsächlich von der Teilezahl abhängt, bleibt die Anzahl der Teile beim Tangram immer gleich und ihre Formen ändern sich nicht. Das Spiel besteht aus 7 einfachen geometrischen Formen, die sich durch die Unterteilung eines Quadrats ergeben. Schon dieses Quadrat nachzulegen, ist ohne die Auflösung nicht einfach.

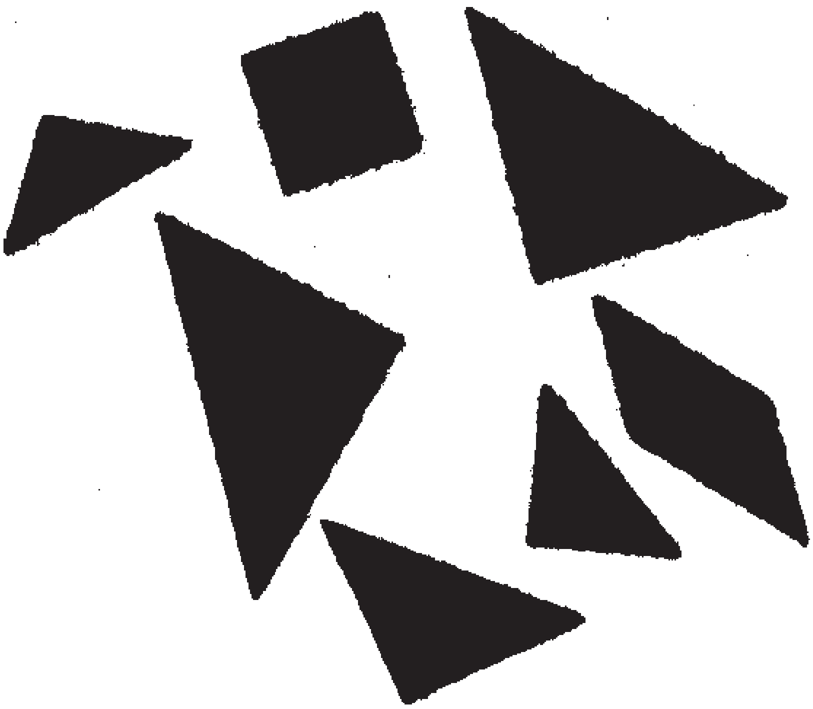
Der Sinn des Spiels besteht darin, aus den 7 Formen Figuren zu legen. Die 250 Vorlagen in diesem Heft stellen knifflige Aufgaben und geben eine Vorstellung von der erstaunlichen Vielfalt an Figuren, die aus den einfachen Grundformen entstehen können. Teils sind es geometrische Figuren, in denen man mit Fantasie auch Gegenstände wiedererkennen kann, überwiegend aber figürliche Darstellungen, bei denen zuweilen eine solche Lebendigkeit und Bewegtheit eingefangen ist, dass der geometrische Charakter ganz überspielt wird. Überhaupt ist die spielerische Fantasie, die dieses Spiel weckt, seine wichtigste Eigenart. Aus der eigenen Beschäftigung können unendlich viele neue Gestalten hervorgehen.

Das Tangram stammt aus China, wo die frühesten Vorlagenbüchlein zu Beginn des 19. Jahrhunderts gedruckt wurden. Das Spiel selbst ist vermutlich viel älter. Es heißt in China „Sieben-Schlau-Brett“ oder „Weisheitsbrett“! Das Tangram fand in Europa und Amerika erstaunlich schnell große Verbreitung. Die ersten Anleitungen erschienen bereits 1818, zunächst als Kopien der chinesischen Ausgaben, doch bald auch mit eigenen Figuren und zum Teil mit abweichenden Grundformen. In Europa wurde das Spiel als „Chinesisches Puzzle“ oder „Kopfzerbrecher“ bezeichnet.

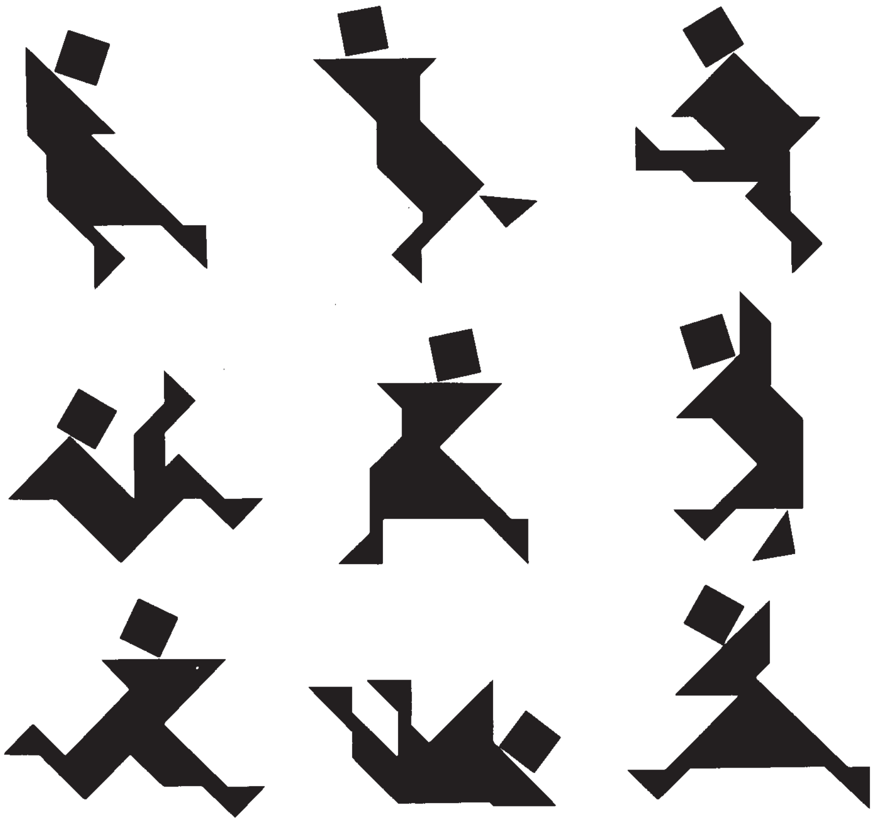
Die Regeln sind denkbar einfach: Für alle Vorlagen werden immer alle 7 Formen verwendet, auch wenn dies manchmal einiges Kopfzerbrechen bereitet. Das Spiel entfaltet sich ausschließlich in der Fläche; die Formen werden also nie übereinandergelegt. Dabei muss das Vorbild ganz genau getroffen werden. Man wird feststellen, dass geringste Veränderungen den Ausdruck einer Figur erheblich verwandeln können.



Sieben Teile des Tangrams als Quadrat



Sieben Teile des Tangrams



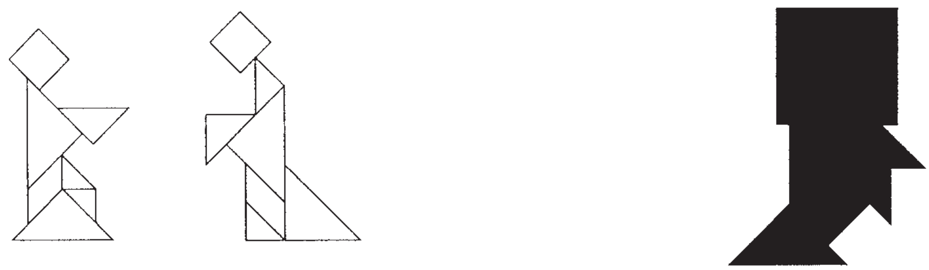
Sieben Teile des Tangrams

5.1 Das „klassische“ Tangram (Urtangram)

Das klassische Tangram – oder Urtangram – besteht, wie anfangs schon erwähnt, aus einem Quadrat, das in sieben Teile zerschnitten wird.

Der Sinn des Spiels liegt darin, aus den sieben Grundformen bestimmte geometrische oder figürliche Darstellungen zu bilden. Die entstandenen Figuren kann man in Gruppen einteilen. So lässt sich eine Fülle von Tieren legen, verschiedenste Katzen, Hasen, Vögel, Pferde und diverse Seetiere.

Die zweite Gruppe zeigt Menschen bei unterschiedlichen Tätigkeiten: sitzend, laufend, auf einem Pferd reitend, Boot fahrend, aber auch einen Schuhputzer mit seinem Kunden, verschiedene Akrobaten sowie mittelalterliche Damen mit Zofe und Diener. Sogar eine Portrait-Galerie aus 26 Figuren wurde erstellt. Beispielhaft sei ein französischer Grenadier.



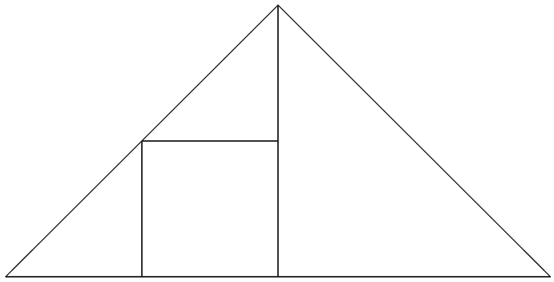
Sieben Teile des Tangrams

Als nächstes lassen sich Gegenstände zusammenfassen. So sind unterschiedliche Schiffe, Brücken oder Häuser legbar. Aber auch Haushaltsgegenstände wie Stühle, Schuhe, Kerzen sowie eine Pfeife oder eine Giesskanne können aus den Steinen entstehen.

Sieben Teile des Tangrams

5.2 Geometrie und Tangram – eine interessante Aufgabe

Unter den sieben Tangram-Teilen befinden sich drei verschiedene große Dreiecke. Nun läßt sich ein weiteres Dreieck aus folgenden vier Teilen legen: Dem großen Dreieck, zwei kleineren Dreiecken und dem Quadrat.



- Kannst Du ein weiteres Dreieck der gleichen Größe auch aus den folgenden Teilen legen:
- Einem großen Dreieck, zwei kleinen Dreiecken und dem Parallelogramm? (zwei Ergebnisse) ...
- Einem großen Dreieck, dem mittleren Dreieck und zwei kleineren Dreiecken?
- Läßt sich ein Dreieck auch aus nur zwei Teilen ... drei Teilen ... fünf Teilen ... sechs Teilen ... allen sieben Teilen zusammenlegen?
- Es ist offensichtlich, daß man mit allen sieben Teilen ein Quadrat legen kann. Wie sieht es jedoch aus, wenn man nur zwei Teile benutzen will? ... drei Teile? ...
- Aus welchen verschiedenen Teilen lassen sich Rechtecke legen?
- Welche weiteren Vielecke lassen sich noch konstruieren?

5.3 Didaktische Aspekte

In der Grundschule spielt die Anschaulichkeit eine große Rolle. Mit dem Tangram können, wie noch aufgezeigt wird, viele Themen des Mathematikunterrichts behandelt werden. Dabei ist selbstständiges Arbeiten mit Eigenkontrolle möglich, Begabungs- und Leistungsunterschiede können berücksichtigt werden. Trotzdem sind Genauigkeit und Sachlichkeit wichtig. Zur Förderung der geometrischen Grunderfahrungen kann das Tangram in der Grundschule unterstützend eingesetzt werden. Das Denken und die visuelle Wahrnehmung werden geschult durch das Erlernen von Fähigkeiten wie Ordnen und Unterscheiden von Formen und spezifischen Denkweisen, zum Beispiel dem Flächenvergleich. Das Differenzieren von Begriffen (dreieckig, viereckig) und das Erkennen von Teil-Ganzheit-Beziehungen sind einzuüben. Im Zusammenhang mit der Übung der räumlichen Orientierungsfähigkeit (Links-rechts-Zuordnung) spielt auch die Sprachunterstützung eine wichtige Rolle. Die geometrischen Handlungen sind zu verbalisieren. Auch fachgemäße Arbeitsweisen sind im Geometrieunterricht zu erlernen und können zum Beispiel bei der Herstellung des Tangrams (Aufzeichnen, Ausschneiden) geübt werden.

Einen besonderen Beitrag leistet das Tangram zum entdeckenden Lernen, denn „Initiative, Spontaneität und Kreativität können sich (...) vor allem in solchen Unterrichtsphasen entwickeln, in denen der Schüler selbstständig Erfahrungen sammeln, gemäß seinen Interessen Fragen stellen, Hypothesen bilden und bestätigen oder verwerfen kann.“ Die räumliche Vorstellung kann gefördert, der Umgang mit den Flächenformen geübt werden. Beim freien Legen der Plättchen wird in der Regel bewusst auf die ästhetische Wirkung (häufig Symmetrien) der Figuren geachtet.

Zu den Einsatzmöglichkeiten ist zu sagen, dass sich das Tangram für den Klassen- und Förderunterricht wie auch für Arbeitsgemeinschaften während des Stationentrainings oder der Freiarbeit eignet, da die Offenheit des Tangrams zu individueller Beschäftigung anregt. Die Aufgaben entsprechen unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden und lassen sich auf Karteikarten vorbereiten. Es kann also in verschiedenen Sozialformen — Frontalunterricht, Gruppen-, Partnerarbeit, Einzelunterricht — gearbeitet werden. Zudem beeinflussen gegenseitiges Helfen (Kooperation) und Kommunikation die sozialen Verhaltensformen positiv. Trotzdem könnte das Spiel auch in einem Wettbewerb genutzt werden.

Durch das selbstständige Arbeiten mit dem Legespiel sind Individualisierung und innere Differenzierung möglich. Außerdem können sich die Schüler selbst oder jeweils ihren Partner kontrollieren.

Für den didaktischen Ort des Tangrams im Mathematikunterricht gibt es mehrere Möglichkeiten. Wenn das Legespiel einmal eingeführt ist, wird man immer wieder darauf zurückgreifen (Spiralprinzip). Als Einstieg in ein neues Thema (z. B. Flächeninhalt) ist das Tangram sehr gut geeignet, da es sehr motivierend wirkt (Unterrichtslustgewinn). Aber auch zur Wiederholung, zum Beispiel am Beginn der Mathematikstunde, lässt sich das Tangram einsetzen, um Erarbeitetes zu vertiefen und zu festigen. Da sich im Rahmen einer Erarbeitungsstunde jeder Schüler sein eigenes Legespiel herstellen sollte, hat auch jedes Kind etwas zum „Mit-nach-Hause-Nehmen“. Das eine oder andere Kind wird auch daheim noch einmal damit spielen. So kann das Tangram über den Unterricht hinaus wirken. Unter Umständen wird man es auch als Zeitpuffer „missbrauchen“ und die Schüler während der letzten zehn Minuten einer Stunde noch einmal Figuren legen lassen, was mit „freudvoller Schulausklang“ begründbar ist.

Auf großes Interesse stößt das Tangramm sicher auch in einer Vertretungsstunde und gibt ihr zusätzlich einen Sinn.

Weitere lernzielbezogene Einsatzmöglichkeiten des Tangrams möchte ich nun stichpunktartig aufzählen:

- kreativer Umgang mit Flächenformen (Offenheit durch freies Legen);
- Erkennen einfacher Flächenformen;
- Grundformen umfahren (Zeichnen mit Schablone), nachzeichnen und ausschneiden;
- formenkundliches Kategorisieren (Sortieren, Beschreiben von Eigenschaften, Unterscheiden von Form und Größe, Benennen);
- Figuren auslegen (= Belegen einer begrenzten Fläche/Umrissfigur), auch Umlegen, Auffinden mehrerer Möglichkeiten;
- Figuren/Muster fortsetzen/vervollständigen;
- Legen nach Anweisung (z. B. aus gegebenen Teilen die Flächenformen Rechteck, Dreieck, Quadrat, Viereck legen);
- Figuren nach Vorlage legen (evtl. nur Umrissfigur gegeben);
- Erlernen geometrischer Grundbegriffe (Ecke, Winkel, Kante, Seite, rechtwinklig);
- Längenbetrachtungen (z. B. Welche Seiten passen genau aneinander?);
- Längenmessung;
- Erkennen von Zusammenhängen zwischen Figuren (z. B. zwei Dreiecke bilden Quadrat; Figur in Figur);
- Vergleich ähnlicher und kongruenter Figuren (z. B. gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke);
- Vorbereitung der zentrischen Streckung durch Vergleich verschieden großer Formen;
- Erarbeitung des Symmetriebegriffs:
  - Symmetrie mit Hilfe eines Spiegels herausfinden;

  - spiegelbildliches Nachlegen von Tangramfiguren;
  - Heraussuchen der symmetrischen Tangramfiguren (z. B. Zwillingstangrame) und Einzeichnen der Spiegelachse;
  - Zeichnen von Tangramfiguren auf Karopapier und Spiegelung an der Achse;
  - Erfassen der Begriffe Symmetrie, Parallelität, Geradlinigkeit, Klappen, Drehen, Verschieben;

- Erarbeitung des Flächeninhaltsbegriffs:

  - „Messen“ einer Fläche durch Auslegen mit Einheitsflächen;
  - Flächengleichheit bei Formverschiedenheit;
  - Unterscheidung Flächeninhalt (kann mit flacher Hand bestrichen werden) und Flächenumfang (= Randlinie, mit dem Finger nachzufahren);
  - Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens, des vorausschauenden Denkens, der Formauffassung, Formunterscheidung und Formcharakterisierung als Vorbereitung auf den späteren Geometrieunterricht.

6 Parkettieren als „Spiel mit Flächen“ in der Geometrie

Parkettierungen[1] ist ein einfaches, lückenloses, überschneidungsfreies Auslegen der Ebene mit deckungsgleichen Figuren. Das bedeutet, dass genau eine Flächenform verwendet wird. Ein zusätzliches Merkmal einer Parkettierung ist die theoretisch unendliche Fortsetzbarkeit. Beim Parkettieren steht vor allem die Idee des Passens im Vordergrund, indirekt auch die des Messens.

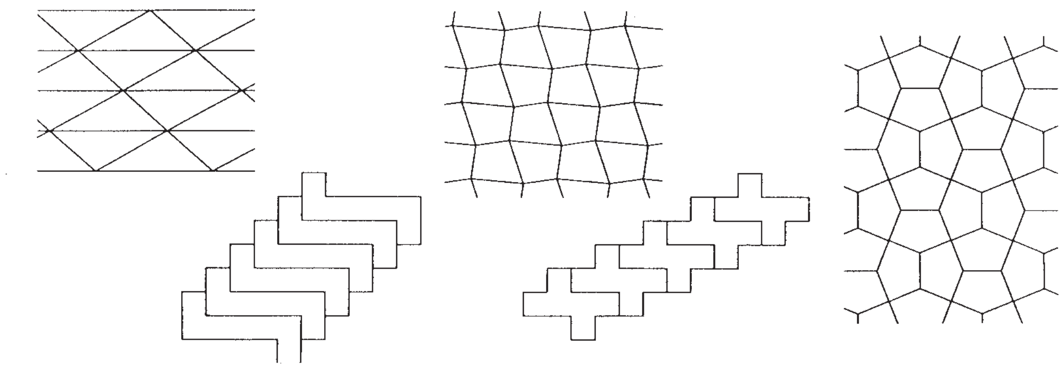
6.1 Parkettieren mit Vielecken

Mit jedem beliebigen Dreieck ist das Parkettieren möglich. Beachtung finden dann zusammenpassende Seitenlängen und die Winkelsumme des Dreiecks von 180°.

Ebenso kann mit jedem beliebigen — außer mit einem überschlagenden — Viereck parkettiert werden, da die Winkelsumme 360° beträgt.

Erste Einschränkungen erlebt man mit Fünfecken. So gibt es gerade eine einzige gleichseitige Fünfecksform, mit der eine Parkettierung möglich ist, mit folgenden Innenwinkeln: zwei rechte Winkel, zwei Winkel von 114.3° und ein Winkel von 131.4°.

Weiter eignet sich nur das regelmäßige Sechseck zum Parkettieren. Mit anderen Vielecken ist das Parkettieren nicht möglich. Dahingegen kann mit Plättchenformen aus zusammengesetzten Quadraten parkettiert werden, wie Tetrominos (LTZ-Plättchen) und Pentominos.



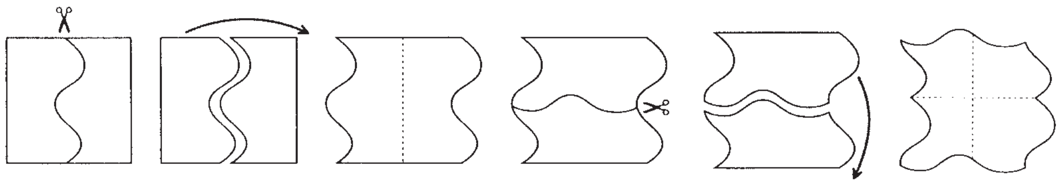
6.2 Parkettieren mit krummlinig begrenzten Formen

Ausgehend von Polygonen lassen sich nach bestimmten Regeln krummlinig begrenzte Formen entwerfen, die sich zum Parkettieren eignen. Als einfachste Re-

[1]Vgl. dazu auch [3, 5–11]

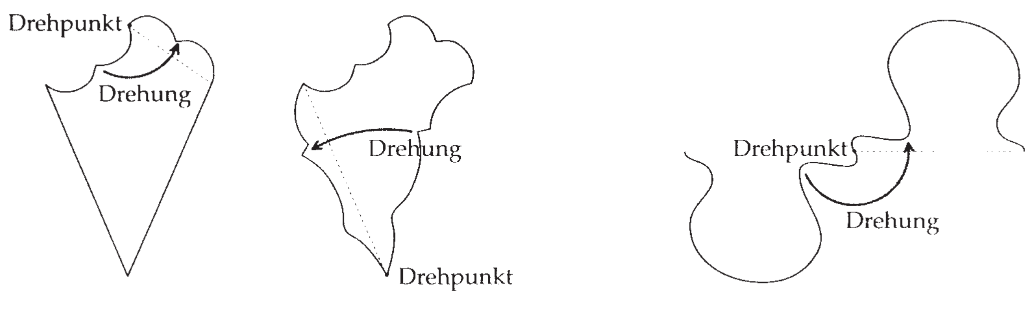
gel bietet sich die Verschiebung an, welche bei Polygonen angewendet wird, deren gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind.

Die „Knabber-Technik“ besteht darin, dass man in einer Ecke beginnend mit der Schere in die Figur schneidet und bei einer benachbarten Ecke endet. Das abgeschnittene Stück wird anschließend zur gegenüberliegenden Seite verschoben, bis sich die ursprünglichen Außenkanten berühren, welche mit einem Stück Klebeband verbunden werden. Schließlich schneidet man entsprechend ein zweites Mal. Eine Variante ist das Schneiden von einer Seite zur gegenüberliegenden, statt in den Ecken zu beginnen.



Eine zweite Transformationsregel, die Drehung, kann bei Polygonen angewendet werden, die gleich lange benachbarte Seiten besitzen, also bei Quadrat, gleichseitigem Dreieck oder Raute, Drachen und Sechseck. Dabei wird ebenfalls an einer Seite von Ecke zu Ecke ein Stück herausgeschnitten, nun aber um einen Eckpunkt gedreht und an der anderen Seite wieder angeklebt.

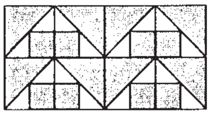
Die technisch schwierigste Veränderung ist die Drehung um den Seitenmittelpunkt, z. B. bei einem Dreieck. Zunächst muss der Mittelpunkt einer Seite durch Messen oder Falten ermittelt werden. Dann wird von einem Eckpunkt ausgehend bis zu diesem Mittelpunkt ein Stück abgeschnitten und durch eine Drehung um den Seitenmittelpunkt an der gleichen Seite angelegt. Dies kann für alle Seiten mit unterschiedlichen Kurvenstücken wiederholt werden.



6.3 Lückenlose Muster mit zwei oder mehr Formen

Bei Mustern gibt es ebenfalls keine Lücken und die Formen wiederholen sich in einer bestimmten (Farb-)Systematik. Wiederum müssen Seitenlängen und

Winkelgrößen passen. Um ein Bandornament fortsetzen zu können, muss die Gesetzmäßigkeit im Aufbau nach Form und Farbe erkannt worden sein. Hier begegnen wir der Verschiebung, Drehung, Spiegelung und Schubspiegelung.

6.4 Didaktische Überlegungen

Bereits im Vorschulalter beschäftigen sich Kinder mit Lege- und Puzzlespielen. Dabei kommt es darauf an, ob Teile ineinander oder nebeneinander passen.

Im Umgang mit Parkettierungen können Inhalte der weiterführenden Schule vorbereitet werden, vor allem der Winkelbegriff bzw. Kongruenzabbildungen: Wie muss eine Fläche beschaffen sein und wie muss man sie bewegen, um eine Parkettierung zu bekommen?

Zunächst bieten Parkettierungen durch den Umgang mit verschiedenen Flächenformen die Möglichkeit, sämtliche geometrischen Grundformen (wie Dreieck, Viereck, usw.) in ihren Begrifflichkeiten und Eigenschaften zu wiederholen — jedoch nicht unbedingt einzuführen. Gleichzeitig entdecken die Kinder die Deckungsgleichheit von Flächen durch Übereinanderlegen, Klappen und Drehen.

Im handelnden Umgang mit Flächen erzeugen die Schülerinnen und Schüler selbst Parkettierungen. Es geht hier allerdings weder um den Gebrauch fachspezifischer Sprache, noch um eine Abbildung bzw. Konstruktion. Es werden lediglich Erfahrungen dazu gemacht — teils auch unbewusst.

Den Lernenden sollen einfache und schwierige Flächenformen zur Verfügung stehen, mit denen sie das Parkettieren versuchen. Ihnen sollte die Möglichkeit für Versuche mit „Irrläufern“ nicht vorenthalten werden — sie helfen, Regeln der Parkettierung besser zu verstehen. Das Zusammenpassen der Ecken (Winkel) und der gleich langen Seiten werden erfahrbar gemacht, auch ohne Kenntnisse von Winkelsätzen oder Winkelsummen.

Zunächst könnten einfache — aus der Umgebung längst bekannte — Parkettierungen mit Quadraten und Rechtecken gelegt werden. Dabei spielen die Schülerinnen und Schüler „Plattenoder Fliesenleger“, und bedecken einen Teil der Ebene lückenlos und überschneidungsfrei mit vorgegebenen Formen. Schnell werden sie die Fortsetzbarkeit an den Rändern entdecken. Später können sämtliche Vierecke zum Parkettieren herangezogen werden.

Als Bausteine für ein Parkett bieten sich LTZ-Plättchen an. Aufgaben können in ihrer Schwierigkeit gesteigert werden.

Der Unterricht sollte über das Legen hinausgehen. So könnten z. B. gelegte Parkettierungen abgezeichnet werden oder Parkettierungen selbst (zeichnerisch) entworfen werden. Denkbar wäre auch, eine Kartonform herzustellen, die als Schablone dient und umfahren wird oder eine parkettierfähige Form aus Moosgummi zu entwerfen, um mit ihr zu stempeln.

6.5 Erfahrungen zur Parkettierung im Kunstunterricht

Eine Begriffsklärung ist an dieser Stelle angebracht, da kunstdidaktisch feststehende Begriffe von der Mathematik enger definiert und eingesetzt werden, wie Fläche, Figur, Grund.

Das Sichabheben einer gesehenen Fläche vom (Hinter-)Grund nennt man Figur-Grund-Verhältnis. Figur und Grund können gleichrangige Stellungen einnehmen, indem sie sich gegenseitig bedingen bzw. durchdringen. Figur-Grund-Verhältnisse können sich umkehren (Kippmuster) oder verschränken, so dass zwei (oder mehr) optische Flächenauffassungen möglich sind, die im Gesamtgefüge sowohl die Figur- als auch die Grundfunktion einnehmen. Flächen sind Ausdehnungen und können im spannungsvollen Gegensatz (Ausdehnungskontrast) großer und kleiner, konvexer und konkaver, aktiver und passiver, positiver und negativer Bildteile „flächenwertig“ oder „linear“ begrenzt sein.

Der Kunstunterricht bietet die Chance der Sensibilisierung und ein Vorfeld zur Geometrie, durch das die Kinder Erfahrungen sammeln können, die sich für das Verständnis der Geometrie positiv auswirken, logisches Schließen unterstützen oder das Durchschauen von geometrischen Phänomenen vereinfachen. Dies bedeutet, dass die Offenheit des Kunstunterrichts im Geometrieunterricht allmählich enger gefasst werden würde.

6.6 Fächerverbindender Unterricht – Chancen und Probleme

Der fächerverbindende Unterricht versucht, neben Kenntnissen und Fertigkeiten, Vernetzungsfähigkeit und Orientierungswissen zu unterstützen. Der Grundgedanke besteht darin, dass die in den Fächern vorgegebene Strukturierung von Fachinhalten erhalten bleibt und diese gleichzeitig eingebettet wird in größere Zusammenhänge. Die Inhalte werden in ganzheitlichen Sichtweisen vollzogen, möglichst handlungsonentiert, und die Kinder lernen mit allen Sinnen. So ist der fächerverbindende Unterricht mehr als nur ein Nebeneinander oder eine „themenverbindende Worthülse“.

Unterrichtsinhalte, die in verschiedenen Schulfächern dasselbe Thema berühren, sollten in ihrer Verbindung für die Lernenden durchschaubar werden (mehrperspektivischer Unterricht), sodass die Schülerinnen und Schüler Gelerntes übertragen, anwenden und einschätzen können. Geometrie- und Kunstunterricht scheinen auf den ersten Blick völlig verschiedene Inhalte, Ziele, Unterrichtsstrukturen und -Prinzipien zu realisieren. Daneben weisen sie Parallelen auf, sodass eine gegenseitige Ergänzung durchaus sinnvoll sein kann:

Geometrie und Kunst regen zum Probieren, Entdecken und Staunen an, fördern Kreativität und Fantasie, wecken Freude an schönen Mustern und am eigenen Gestalten, schaffen Freiraum für aktives und operatives Lernen, sie ermöglichen Handlungsorientierung.

Ihre Unterrichtskonzeptionen haben enge Berührungspunkte: Der Kunstunterricht ist problemlösender, prozessorientierter, erfahrungsbezogener Unterricht. Er ist sicherlich offener gestaltet als der Geometrieunterricht. Doch auch dieser ermöglicht problemlösende, entdeckende Unterrichtsverfahren und bedarf kreativer Momente und Experimentierphasen. Während sich der Kunstunterricht seinen offenen Charakter bewahrt, entwickelt sich der Geometrieunterricht zunehmend — je tiefer er in eine Thematik eindringt — zum geschlossenen, produktorientierten Unterricht (Beispiele: Konstruktionen, Abbildungsverfahren, Winkelsätze, usw.). Dann gibt es richtige und falsche Lösungen, wohingegen im Kunstunterricht divergierende Lösungen und Auffassungen erhalten bleiben.

In der sprachlichen Entwicklung des Kindes leisten beide Fächer einen Beitrag: Sowohl im Kunstunterricht als auch im Geometrieunterricht wird eine präziser werdende Sprache angestrebt, in welche allmählich Fachbegriffe aufgenommen werden, die eine eindeutigere Kommunikation erlauben. Sicherlich unterscheiden sich die Wortschätze beider Fächer, doch erste sprachliche Festlegungen von Eigenschaften (wie innen, außen, größer, kleiner, usw.) und Formen (Kreis, Dreieck, Viereck, später auch Quadrat, Rechteck, ...) kommen nicht nur in der Geometrie, sondern ebenso in der Kunst vor, so dass diese helfen kann, die Begrifflichkeit vorsichtig vorzubereiten, und später auch zu wiederholen und zu vertiefen.

Die folgenden Arbeitsmaterialien thematisieren Parkettierung als interessante Aufgabenstellung für konstruktives Geometrielernen.

7 Die schulische Behandlung der Parkettierung

Wenn man verschiedene Rahmenpläne des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I vergleicht, so stellt man fest, dass die Parkettierung und deren mathematischer Hintergrund im Geometrieunterricht ein sogenanntes Schattendasein führen. Entscheidende Ziele des Mathematikunterrichts sind aber, dass die Schüler und Schülerinnen vertraut sein sollen mit der Vielfalt von regelmäßigen Vielecken und auch erkennen, in der Parkettierung, dass die Kunst sich solcher Vielecken bedient. Aus diesem Grund sehe ich es als entscheidend an, dass man die Parkettierung im Unterricht behandelt, da man die Schüler und Schülerinnen zugleich auch künstlerisch und ästhetisch erziehen kann, welches bei den meisten Themen im Mathematikunterricht viel zu kurz kommt. Ferner könnte man auch fächerübergreifend arbeiten, d. h. die künstlerische Seite könnte dann im Kunstunterricht behandelt werden und im Mathematikunterricht nur die mathematische Seite.

7.1 Einordung des Stoffgebietes in dem Mathematikunterricht und Lernziele

Die Behandlung der Parkettierung sollte in der Klassenstufe 10 erfolgen, da die algebraischen Grundlagen z. T. erst dort vorhanden sind und die Schüler mathematisch reifer geworden sind. Das Themengebiet ist eingeordnet im Geometrieunterricht und zwar bei der Behandlung von „Regelmäßigen Vielecken“. Die Schüler und Schülerinnen müssen mit den Begriffen Flächeninhalt, Umfang, Grundfläche und die Konstruktionen an verschiedenen n-Ecken vertraut sein.

Lernziele: Die Schüler und Schülerinnen kennen

- den Begriff regelmäßiges n-Eck, Bestimmungsdreieck, Innenwinkel,
- verschiedene Konstruktionen um n-Ecke zu konstruieren,
- Klassifizierung von n-Ecken,
- Fermatsche Primzahlen und deren Bedeutung in der Mathematik und
- Anwendungen der regelmäßigen Vielecke in der Kunst (Parkettierung).

Könnensziele: Die Schüler und Schülerinnen können

- verschiedene n-Ecke mit Zirkel und Lineal konstruieren,
- Strahlensatz, Pythagorassatz, Höhensatz, Kathetensatz anwenden,
- Seitenlängen des n-Ecks berechnen,
- Flächen der Bestimmungsdreiecke, Höhen und Umfänge berechnen.

7.2 Zeitlicher Ablauf des Stoffgebietes

Der Themenkomplex „Parkettierung in der Mathematik“ umfasst 17 Stunden. Im Folgenden wird ein Überblick gegeben.

Stunde	Stundeninhalt
Thema 1: Verschiedene Parkettierungen	
1	Beispiele für Parkette
Thema 2: Begriff „Regelmäßiges n-Eck“	
2	Definition und Festigung des Begriffes
3	Eigenschaften von n-Ecken
4	Polyedersatz von Euler
Thema 3: Konstruktionen von n-Ecken	
5	Konstruktionen der 4er Serie
6	Konstruktionen der 3er Serie
7	Konstruktionen der 5er Serie
Thema 4: Fermatsche Primzahlen und deren Bedeutung	
8 / 9	Fermatsche Primzahlen
Thema 5: Das Parkett des Fussballs	
10 / 11 / 12	Anwendung des bislang erworbenen Wissens auf den Fussball
Thema 6: Berechnungen an n-Ecken	
13 / 14 / 15	Verschiedene Berechnungen an n-Ecken
Thema 7: Klassenarbeit	
16	Klassenarbeit
17	Auswertung

Die vorigen Kapitel wurden schulnah dargestellt, sodass auf eine unterrichtliche Darstellung im Folgenden verzichtet wird. Um den vermittelten Stoff zu festigen, werden im Folgenden einige Aufgaben aufgeführt.

Aufgabe 1:

Bestimme von einem Zwölfeck die Summe der Innenwinkel und kannst du ein n-Eck angeben, bei dem die Winkelsumme $17640°$ beträgt? Bestimme von diesem n-Eck die Innenwinkel!

Lösungsskizze:

Wie man leicht sieht gilt $(12-2) \cdot 180° = 1800$ und das gesuchte n-Eck ist ein Zehneck mit den Innenwinkel $\mu = 176.4°$.

Aufgabe 2:

Wie viel Symmetrieachsen hat ein n-Eck und beschreibe die Lage der Achsen. Welche n-Ecke sind punktsymmetrisch?

Lösungsskizze:

Ein regelmäßiges n-Eck hat n Symmetrieebenen. Falls n gerade, dann sind $\frac{n}{2}$ Mittelsenkrechten und $\frac{n}{2}$ Winkelhalbierende die Symmetrieachsen. Falls n ungerade, dann fallen die Mittelsenkrechten und die Winkelhalbierenden zusammen. Ist n gerade, dann sind diese n-Ecke punktsymmetrisch.

Aufgabe 3:

Zeige: Ist p prim, dann gibt es in einem Kreis $\frac{p-1}{2}$ regelmäßige p-Ecke.

Lösungsskizze:

Beweis: Ein regelmäßiges p-Eck entsteht, wenn man die Ecke p mit der Ecke k verbindet, wobei p und k teilerfremd sind. Weil es $p-1$ solche Zahlen k gibt und die Verbindung von p und k zum selben p-Eck führt wie die von p und $p-k$, gibt es $\frac{p-1}{2}$ regelmäßige p-Ecke. $\square$

Aufgabe 4:

Das 51-Eck lässt sich über das 17-Eck und das gleichseitige Dreieck konstruieren, das 85-Eck über das 17-Eck und das Fünfeck. Gesucht sind die Gleichung für die Konstruktion des Mittelpunktswinkels **ohne das eine Konstruktion ausgeführt** wird.

Lösungsskizze:

Man sieht $\frac{360°}{51} = 6\frac{360°}{17} - 1\frac{360°}{3}$ und $\frac{360°}{85} = 7\frac{360°}{17} - 2\frac{360°}{5}$.

Aufgabe 5:

Bei einem Zehneck mit dem Umkreisradius 1 gilt für die Seitenlänge $s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(a) Berechne aus diesen Daten die Seitenlänge des zugehörigen Fünfecks.

(b) Wie lang ist s_{80} im Einheitskreis?

(c) Wie lang ist der Inkreisradius des 80-Ecks bei $(r = 1)$?

(d) Wie lang ist s_{80} bei einem allgemeinen Kreis mit Radius r?

Lösungsskizze:

(a) Zunächst gilt

$$c_{10}^2 = 4 - s_{10}^2 \text{ und } c_5 = c_{10}^2 - 2$$

woraus

$$\begin{aligned} s_5 &= \sqrt{4 - c_5^2} \\ &= \sqrt{4 - (c_{10}^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{4 - (4 - s_{10}^2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{4 - \left(2 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

folgt.

(b) Mit $c_{10} = \sqrt{4 - s_{10}^2} = c_{10}^2 - 2$ erhält man

$$c_{80} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + c_{10}}}} \Rightarrow s_{80} = \sqrt{4 - c_{80}^2} \approx 0.0785.$$

(c) Der Innenkreisradius beträgt $\varrho_{80} = \sqrt{1 - (\frac{s_{80}}{2})^2} = 0.9992$.

(d) Für einen allgemeinen Kreis gilt $s_{80} = r \cdot 0.0785$.

Aufgabe 6:

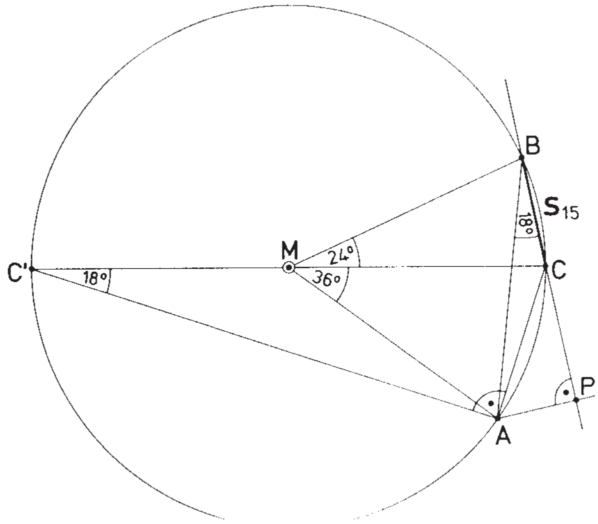
Die Seite des 15-Ecks soll im Einheitskreis berechnet werden.

Lösungsskizze:

Aus der Zeichnung entnimmt man $\Delta BAP \sim \Delta ACC'$. Wegen $\overline{CC'} = 2r$ und $\overline{BA} = r$ folgt aus der Ähnlichkeit $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{C'A} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - s_{10}^2}$. Wegen $\measuredangle ACP = 30°$ und $\measuredangle CAP = 60°$ ist ΔAPC ein halbes gleichseitiges Dreieck. Also $\overline{PC} =$

$h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\overline{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{3}s_{10}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
s_{15} &= \overline{PB} - \overline{PC} \\
&= \frac{1}{2}\overline{AC'} - \frac{1}{2}\sqrt{3}s_{10} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{16 - (6 - 2\sqrt{5})} - \frac{1}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$



Literatur

[1] E. Barth / F. Barth / G. Krumbacher / K. Ossiander: *Anschauliche Geometrie 9*. 2. Aufl., Oldenbourg, München, 1995.

[2] P. Bender: *Die Geometrie des Leder-Fußballs – Ein Optimierungs-Problem.* In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Schriftenreihe der Istron-Gruppe, 2 (1995), pp. 1-15.

[3] H. Besuden: *Knoten Würfel Ornamente*. Klett, Stuttgart, 1984.

[4] W. Demtröder: *Experimentalphysik 3. Atome, Moleküle und Festkörper*. 2. Aufl., Springer, Berlin, 2000.

[5] J. Floer: *Parkette – Einige Anwendungen zur Verzahnung von Geometrie- und Kunstunterricht.* In: Mathematik Didaktik: Theorie und Praxis, Bender, P. (Hrsg.), Berlin, 1988, pp. 37.

[6] J. Haug: *Fächerverbindendes Lehren und Lernen.* In: Grundschule 7 + 8 (1996), pp. 19-26.

[7] J. Hayen: *Die Vorbereitung des Abbildungsbegriffes in der Grundschule.*. In: Die Schulwarte, o. O., 1974.

[8] W. Hestermeyer: *Inhaltsberechnung ist mehr als eine Formel.* In: PM Beitrag, 5 (1994), pp. 189-207.

[9] B. Joachimsthaler: *Flächen in der Grundschule – unter besonderer Beachtung von Parkettierungen.* In: Mathematische Unterrichtspraxis, 20 (1999) Nr. 3.

[10] J. H. Lorenz: *Parkettierungen, Von Quadraten zu Escher*. In: Grundschule 2 (1994), pp. 16-19.

[11] B. Reinhardt: *konkrete kunst, die sammlung gornringer*. Kommissionsverlag, Süddeutsche Verlagsgesellschaft, Ulm, 1991.

[12] C. J. Scriba / P. Schneider: *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kultur, Menschen*. Springer, Berlin, 2001.

[13] H. Walser: *Der Goldene Schnitt*. 2. Aufl., Teubner, Leipzig, 1996.