

Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (Teil 2)

Brigitte Leneke

Institut für Algebra und Geometrie
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik
Postfach 4120
39016 Magdeburg
Germany

Technical Report Nr. 3
2003

Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (Teil 2)

**Sandra Kröher, Mirka Stankewitz, Katrin Motejat, Aileen Schröder,
Janett Els, Frank Grundmann, Antje Schulze, Katharina Engler und
Dr. Brigitte Leneke**

Institut für Algebra und Geometrie, Fakultät für Mathematik
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Postfach 4120, 39016 Magdeburg

Inhaltsverzeichnis

1. Rahmen und Ziele
2. Unterrichtsplanung und Unterrichtsdurchführung
3. Beispiele – Erfahrungen und Probleme

1. Rahmen und Ziele

Mathematikunterricht als problemlösender Unterricht und im Spannungsfeld zwischen Mathematik als Produkt und als Prozess verfolgt die Zielstellung kritisches, folgerichtiges und gründliches Denken einerseits zu entwickeln, andererseits aber auch Ideenreichtum, Beweglichkeit und Fantasie zu initiieren. Jedoch wird Anwendungsproblemen, weiterführenden Fragen und ungewohnten Lösungsideen noch zu wenig Zeit und Platz eingeräumt. Genau dort setzt die „Aufgabenvariation im Mathematikunterricht“ an.

Dieses Projekt hat sich der Idee verschrieben, darüber nachzudenken, **wie** Schülerinnen und Schüler an der Erzeugung von Aufgaben beteiligt werden können, möglichst breite Erfahrungen im Unterricht dazu zu sammeln und auszuwerten sowie die gewonnenen Erkenntnisse und vor allem die Materialien dem "Unterrichtsalltag" zur Verfügung zu stellen. Wir haben versucht in einer zweiten Phase in einigen Unterrichtsstunden Ideen dieses Projektes anhand ausgewählter Aufgaben aufzugreifen, umzusetzen und auch fortzuführen. Aufgaben, Materialien und Erfahrungen unserer ersten Phase sind in /2/ dokumentiert.

Insbesondere ging es darum, in den einzelnen Klassen zu beobachten, **wer** die Variationen zu den "*Initialaufgaben*" komponiert, **wie** dafür hilfreiche Strategien entwickelt und angewendet werden können, **wer** die gesammelten Anstöße und Fragen strukturiert, bewertet und selektiert und **wie** der weitere Lösungsprozess der "Aufgabenvariationen" gestaltet werden kann. Dabei sollten einige spezielle didaktisch-methodische Aspekte, wie z.B. Bewertungsfragen oder die Einführung neuer Unterrichtsinhalte näher untersucht werden.

Die Frage, warum man mehr als bisher eigene Problemstellungen der Schülerinnen und Schüler fördern sollte, kann u.a. wie folgt beantwortet werden:

"Aufgabenvariation" kann bei Schülerinnen und Schüler bewirken, dass

- + sie nicht nur Aufgaben "empfangen", sondern auch lernen zu fragen und sich selbst neue Aufgaben zu stellen;
- + das Bild von Mathematik vervollkommnet wird;
- + das Interesse am Fach und den dort eingebetteten Fragen und Methoden länger erhalten bleibt;
- + eine weitere allgemeine Lösungsstrategie im Sinne von: "Versuche erst eine verwandte Aufgabe zu lösen!" stärkeren Eingang finden kann;
- + Selbstbewusstsein, Selbstvertrauen und Selbsteinschätzungsvermögen des eigenen Wissens und Könnens gestärkt werden können;
- + Weiterdenken und Nachfragen initiiert werden.

Letztlich soll „Aufgabenvariation im Mathematikunterricht“ dem Anliegen dienen, die Schülerinnen und Schüler besser zu befähigen, das Lernen zu lernen, die Unterrichtsinhalte zu vernetzen, Selbstvertrauen und Kritikfähigkeit zu entwickeln, im Team zu arbeiten und auch Werkzeuge verständlich zu nutzen.

2. Unterrichtsplanung und Unterrichtsführung

Bewährt hat sich bisher folgender Unterrichtsverlauf, der auch von uns als Ausgangsbasis genutzt wurde (vgl. auch /1/):

- a) Es wird eine Aufgabe (**Initialaufgabe**) vorgegeben und gelöst.
- b) Die Schülerinnen und Schüler werden dann aufgefordert, diese Initialaufgabe zu variieren:
 - b₁) ohne bewusste Anwendung heuristischer Strategien;
 - b₂) indem jeder in der Aufgabe vorkommende Begriff nacheinander sinnvoll abgeändert wird („what–else–Methode“);
 - b₃) bewusster Einsatz von **Basisstrategien**: geringfügig Ändern, Analogisieren, Verallgemeinern, Spezialisieren, Lücken beheben, Zerlegen, Kombinieren, Umzentrieren, Umkehren, Kontext ändern, Iterieren, anders Bewerten.
- c) Die einzelnen Vorschläge werden gesammelt.
- d) Die gesammelten Vorschläge werden dann geordnet, gruppiert, vorbewertet und ausgewählt.
- e) Die Lösung und Bearbeitung der ausgewählten Aufgabenvarianten erfolgt in unterschiedlichen Sozialformen und Arbeitsaufteilungen. Die meisten Beispiele wurden von uns jedoch so konzipiert, dass die Schülerinnen und Schüler die gefundenen Aufgabenvariationen in kleineren Gruppen bearbeiteten. Denkbar sind aber auch Partnerarbeit oder jeder löst eine Aufgabenvariante in selbstständiger Arbeit.
- f) Die Lösungen werden in geeigneter Form und Darstellung vorgestellt.

Der Unterricht an sich bietet für das Instrument "Aufgabenvariation" günstige Momente. So eignen sich Stundenabschlüsse oder auch Phasen komplexer Übungen sehr gut, wobei generell keine Bindung an spezielle mathematische Inhalte erfolgen muss. Die weitere Bearbeitung der Aufgabenvarianten kann aber durchaus auch einmal eine sinnvolle Hausaufgabe sein. In unserer praktischen Untersuchung verwendeten wir jedoch vorrangig repräsentative Einzelbeispiele und Aufgaben.

Es gibt eine Reihe weiterer methodischer Aspekte, die bei der Gestaltung von „Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht“ bezüglich angestrebter Zielstellungen positiv „zu Buche schlagen“:

- Niemand ist ausgeschlossen. Alle Schülerinnen und Schüler können sich entsprechend ihrem Leistungsniveau einbringen.
- Kein Inhalt und keine Methode sind ausgeschlossen.
- Neue Technologien eröffnen Möglichkeiten, „andere und neue“ Aufgabenvarianten zu finden.
- In jeder Phase der Unterrichtsgestaltung können Hilfen zur Verfügung gestellt werden.
- Es gibt unterschiedliche Einstiege in die Thematik.
- Man sollte sich günstige Gelegenheiten zunutze machen.
- Man muss über „Aufgabenvariation“ im Unterricht reflektieren. *Soviel Zeit muss sein.*
- Aufgabenvariation erfordert Tugenden und macht sie frei, insbesondere wenn in verschiedenen Sozialformen gearbeitet wird.

- Aufgabenvariation ist mathematisch wesentlich.
- Variieren ist kein Selbstzweck und somit ergibt sich auch das Erfordernis einer Kontrolle und Bewertung.

3. Beispiele – Erfahrungen und Probleme

3.1 Lineare Funktionen, Klasse 8 (Sandra Kröher)

Ausgehend von einer *Initialaufgabe* wurde von der Lehrerin in der ersten Stunde jeder Gruppe ein Aufgabenblatt mit vorgegebenen Aufgabenvarianten zur weiteren Bearbeitung übergeben. Eine Schülergruppe musste die Initialaufgabe lösen.

Bei der Präsentation der Ergebnisse der einzelnen Schülergruppen wurde deutlich, dass alle Einzelaufgaben, die in den Gruppen bearbeitet wurden, Varianten der gegebenen Initialaufgabe sind.

Gruppe 1

- Berechnet die Schnittpunkte der Funktion $f(x) = -2x+1$ mit der x- und y-Achse.
- Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks, das als Eckpunkte den Koordinatenursprung und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen hat.
- Wie ändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks, wenn man den Anstieg oder das absolute Glied von f verändert?

Gruppe 2 (Initialaufgabe)

- Zeichnet den Graphen der Funktion $f(x) = -2x+1$ in einem Intervall, das durch den Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0/0)$ und dem Radius $r = 3$ cm begrenzt wird.
- Ermittelt das Monotonieverhalten, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie den Definitionsbereich und Wertebereich der Funktion f .

Gruppe 3

- Zeichnet die Punkte $A(0/-4)$, $B(2/-3)$ und $C(-1/3)$ in ein Koordinatensystem.
- Gibt die Funktionsgleichung der Geraden an, die beim Verbinden von je zwei Punkten entstehen.
- Begründet, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
- Misst die Länge der Dreiecksseiten. Berechnet den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Gruppe 4

Ermittelt die Funktionsgleichung der Funktion $r(x)$, welche parallel zu $f(x) = -2x+1$ verläuft und durch den Punkt $A(1/1)$ geht.

Gruppe 5

Ermittelt die Funktionsgleichung des Graphen, der die Funktion $f(x) = -2x+1$ im Punkt $B(0/1)$ schneidet und gleichzeitig im rechten Winkel auf $f(x)$ im Punkt B steht.

Gruppe 6

Die „Schokoladenfabrik Brand“ hat für die Herstellung ihrer berühmten Mozartkugeln 1 Tonne Marzipanrohmasse im Lager. Erfahrungsgemäß werden pro Monat 2 Tonnen Marzipanrohmasse verbraucht.

- Nach wie viel Stunden muss spätestens eine neue Lieferung mit Marzipanrohmasse eintreffen, damit die Produktionsanlage weiter arbeiten kann.
- Der Preis für die Marzipanrohmasse beträgt 9 € je kg. Wie hoch wird demzufolge die monatliche Rechnung des Lieferanten an die „Schokoladenfabrik Brand“ sein?

Hinweis: In der Fabrik wird 24 h im Schichtbetrieb gearbeitet und man nimmt an, jeder Monat hat durchschnittlich 30 Tage.

Gruppe 7

Zeichnet die Funktion $f(x) = -2x+1$ in ein Koordinatensystem.

- Zeichnet und ermittelt die Funktionsgleichung des Graphen $g(x)$, der entsteht, wenn man $f(x)$ an der x-Achse spiegelt.
- Zeichnet und ermittelt die Funktionsgleichung des Graphen $h(x)$, der entsteht, wenn man $f(x)$ an der y-Achse spiegelt.

In der zweiten Unterrichtsstunde wurde zunächst die folgende Initialaufgabe gemeinsam im Unterrichtsgespräch gelöst.

Initialaufgabe

- Zeichne die Punkte $A(1/3)$, $B(-4/-2)$, $C(-1,5/-4,5)$ und $D(3,5/0,5)$ in ein Koordinatensystem.
- Gib die Funktionsgleichung einer beliebigen Geraden an, die beim Verbinden von zwei der in a) gegebenen Punkte entsteht.
- Zwischen A, B, C, D wird ein Viereck eingeschlossen. Untersuche die Winkel des Vierecks!
- Miss die Länge der Vierecksseiten.

Danach sollten die Schülerinnen und Schüler selbstständig variieren, wobei sie aufgefordert wurden, vollständige Aufgabenstellungen aufzuschreiben und diese dann zu lösen.

Variationsrichtungen, die weiter verfolgt werden könnten, sind hierbei u.a.:

- Flächeninhalte von Figuren berechnen, die durch die gegebenen Punkte und von in b) ermittelten Funktionsgraphen begrenzt werden.
- Lösen von Textaufgaben.
Katharina läuft von Ort B nach Ort A mit 1 km/h und hat bereits 2 km zurückgelegt ($\overline{AB} = 8$ km). Bettina läuft etwas schneller mit 3 km/h und startet von Ort C als Katharina schon 2 km zurückgelegt hat ($\overline{AC} = 8$ km).
 - Nach wie viel Stunden trifft Katharina am Ort A ein?
 - Katharina und Bettina wollten sich am Ort A treffen. Wer trifft dort zuerst ein und wie lange muss er auf den Anderen warten?
- Ermitteln weiterer Funktionsgleichungen, so dass jeweils zwei der gegebenen Punkte auf dem entsprechenden Graphen der Funktion liegen.

Von den Schülerinnen und Schülern wurden in dieser Stunde im Wesentlichen diese Richtungen verfolgt. Stellvertretend seien an dieser Stelle die Varianten von vier Schülerinnen und Schüler (Originalformulierungen) genannt:

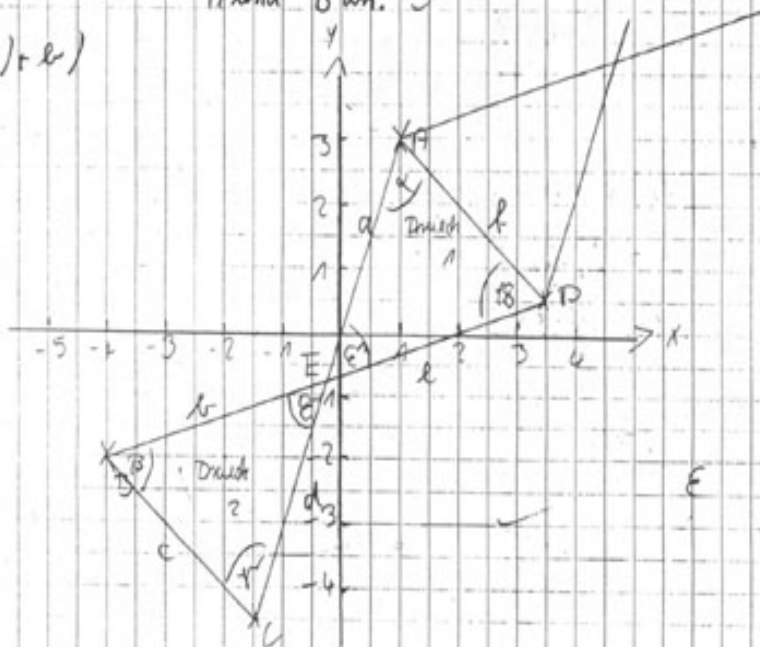
- Verbinde die Punkte B und C, A und D, A und C sowie B und D miteinander.
- Beweise, dass die beiden entstehenden Dreiecke kongruent zueinander sind.
- Errechne den Flächeninhalt eines Dreiecks.
- Welche Figur entsteht, wenn man eines der Dreiecke an einer Dreiecksseite spiegelt?
- Spiegele das Viereck ABCD an den Seiten AB und CD. Gib die Punkte an.
- Ermittle die Funktionen der neu entstandenen Seiten.
- Die Funktion mit den Punkten A, D begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt.
- Stelle die Funktionsgleichung der Diagonalen im Rechteck auf. Berechne den Schnittpunkt.

Das folgende Schülerarbeitsblatt soll das Vorgehen der Schülerinnen und Schüler verdeutlichen.

Aufgabe:

- Zeichne die Punkte A (1/3), B (-2/-4), C (-1,5/-4,5) und D (3,5/0,5) in ein Koordinatensystem!
- Verbinde die Punkte B und C, A und D, A und C sowie B und D miteinander!
- Beweise dass die beiden entstehenden Dreiecke kongruent zueinander sind!
- Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks!
- Was entsteht für eine Figur wenn man eines der Dreiecke mit der Seite A und D bzw B und C an die Seite B und C bzw A und D an.

a) + b)



- c)
- | | | |
|--------------------|----------|--|
| $\alpha = \alpha'$ | $b = b'$ | } die beiden Dreiecke sind deckungsgleich. |
| $\beta = \beta'$ | $c = c'$ | |
| $e = e'$ | $d = d'$ | |

d)

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \text{ cm} \cdot 3,5 \text{ cm} = \underline{\underline{6,125 \text{ cm}^2}}$$

e) Es entsteht ein Parallelogramm.

fläche

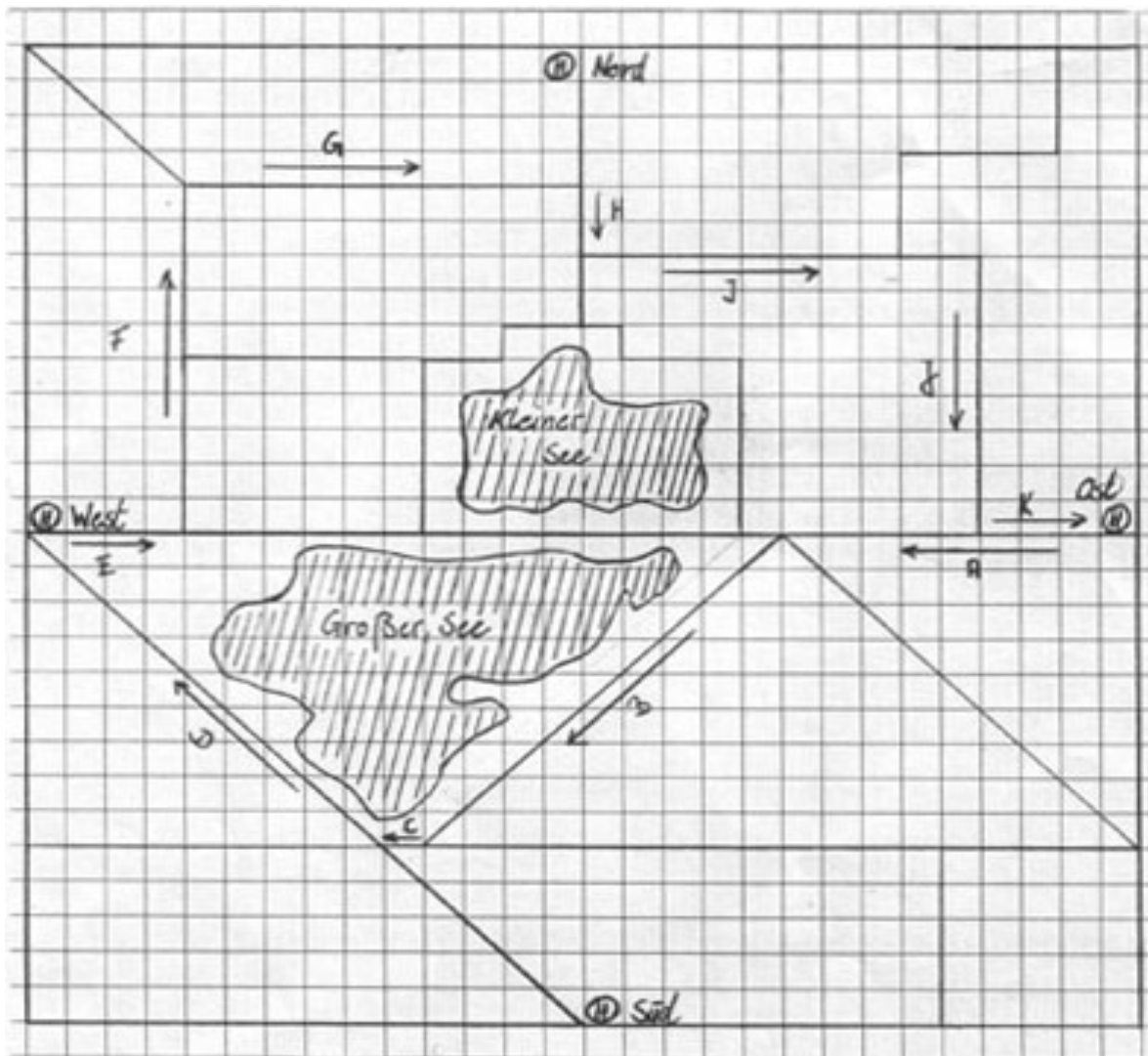
3.2 Parkanlage – Rationale Zahlen, Klasse 7 (Mirka Stankewitz)

Dieses Beispiel wurde für drei Unterrichtsstunden konzipiert.

1. Stunde: Die Schülerinnen und Schüler lösen selbstständig die Initialaufgabe.

Die Karte zeigt den Grundriss einer 196 ha großen, quadratischen Parkanlage.

- Berechne die dazugehörige Seitenlänge des Parks und bestimme anschließend den Maßstab der Zeichnung.
- Ein Jogger läuft die durch die Buchstaben A bis K gekennzeichnete Strecke.
 - Wie viele Kilometer legt er dabei zurück?
 - Schafft er die gesamte Strecke in $20\frac{1}{2}$ Minuten, wenn er mit einer konstanten Geschwindigkeit von $16,3\text{ km/h}$ läuft?
 - Wie viel Zeit benötigt er genau?



Im Rahmen der Lösungskontrolle wurden die Schülerinnen und Schüler mit der „Aufgabenvariation“ bekannt gemacht und danach aufgefordert, selbst Variationen zu suchen, die dann von der Lehrerin gesammelt wurden. Da natürlich in der Planung bereits mögliche Variationsrichtungen betrachtet wurden, konnten im Unterricht dann auch sehr konkrete Hilfestellungen gegeben werden.

Mögliche Variationen sind hier:

1. Andere Flächengrößen vorgeben.

Die Karte zeigt den Grundriss einer großen, quadratischen Parkanlage.

2. Statt Vorgabe des Flächeninhalts, den Umfang der Parkanlage geben.

Die Karte zeigt den Grundriss einer quadratischen Parkanlage mit einem Umfang von

3. Den Maßstab vorgeben und damit dann die Seitenlänge, den Flächeninhalt und den Umfang des Parks bestimmen.

Die Karte zeigt den Grundriss einer quadratischen Parkanlage, die im Maßstab 1 : abgebildet ist. Berechne die entsprechende Seitenlänge, den Umfang und den Flächeninhalt des Parks.

4. Finden und berechnen anderer Laufwegen mit gleichen Anfangs- und Endpunkt.

5. Kürzeste/längste Wege zwischen 2 Standorten bestimmen.

6. Andere Laufgeschwindigkeiten wählen.

7. Näherungsweise Bestimmen der Seeflächen.

- zum Beispiel durch Zerlegung der Flächen in Teilstücke, die sie mit den bisherigen Kenntnissen bestimmen können oder
- Auszählen der Fläche mit Hilfe von „Einheitsquadraten“
- In welchem Verhältnis stehen die beiden Seeflächen zueinander?

8. Flächenbestimmung zum Beispiel zwecks Begrünung

9. Anlegen von bestimmten Dingen

Ein rechteckiger Spielplatz mit den Seitenlängen m und m soll im Park angelegt werden

- reicht der vorhandene Platz im Teilstück
- an welchen Stellen kann dieser Spielplatz überall angelegt werden?

Welche Dinge kann man noch in Parkanlagen finden? Überlegt Euch, wie viel Platz diese benötigen (oder ermittelt dies praktisch) und stellt fest, ob man sie in der vorgegebenen Parkanlage integrieren kann?

10. Kostenrechnung für anzulegende Dinge

11. Anlegen von Bäumen/niedrigen Zäunen zur Umrandung

Um den kleinen See soll eine niedrige Umzäunung aus Holz angelegt werden. Ein Zaunelement hat eine Länge von Wie viele Zaunelemente benötigt man für die Umrandung?

12. Zwei Läufer oder zwei andere Objekte in Bewegung

Ein Bus fährt an der Haltestelle Ost um 16.58 Uhr los und erreicht die Haltestelle West um 17.03 Uhr, von wo er nach einminütigen Aufenthalt weiterfährt.

Schafft ein Fahrgast, der an der Haltestelle Ost aussteigt und mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15,8 km/h quer durch den Park zur Haltestelle West läuft, vor dem Bus dort anzukommen? Kann er mit dem Bus weiterfahren?

13. Andere Wege- beziehungsweise Parkgestaltung

Entwerft selber eine Parkanlage! Bestimmt für diese kürzeste/längste Wege, Flächenteilstücke, ...

14.

Die Schülerinnen und Schüler haben sehr vielseitige Möglichkeiten zum Verändern der Aufgabe gefunden, die größtenteils mit den erwarteten Überlegungen übereinstimmen. Bis auf wenige Ausnahmen gaben alle Schülerinnen und Schüler mindestens einen Variationsvorschlag ab. Bei den folgenden Beispielen wurde wieder lediglich die Rechtschreibung korrigiert:

- Ein Radfahrer fährt von der östlich gelegenen Haltestelle zur westlich liegenden Haltestelle.
 - a) Wie lang ist die Strecke?
 - b) Mit wie viel $\frac{km}{h}$ fährt er, wenn er in 15 min $\frac{1}{2}$ km schafft?

- Es soll im Nord-Osten ein kleiner Wald angelegt werden. Der Wald soll ein Quadrat ergeben und eine Seitenlänge von 300 m haben.
 - a) Wie viele m² nimmt der Wald ein?
 - b) Ist genug Platz für den kleinen Wald?

- Schafft es ein Fahrzeug bei 30 $\frac{km}{h}$ den Park (Umfang: 5,6 km) in 15 min zu umqueren? Wie lange benötigt er, wenn er die Hälfte der Strecke fährt?

- Herr Suhrbier will vom Start eines Rallyrennens Fotos machen, aber auch sehen, wie die Autos ins Ziel kommen. Er nimmt den Weg durch den Park, der 9 ha groß ist.
 - a) Berechne den Maßstab und die Seitenlänge!
 - b) Berechne den Weg seiner Strecke! Erreicht er das Ziel in 10 min 50 sek bei einer Geschwindigkeit von 12 $\frac{km}{h}$?
 - c) Wie viel Zeit benötigt er genau?
(Dieser Schüler hat dazu eine Karte von seinem Park gezeichnet.)

- Ein Hund rennt von Süden nach Westen, dann weiter nach Osten und schließlich nach Norden. Wie lange braucht er bei einer Geschwindigkeit von 15,7 $\frac{km}{h}$, wenn der Park 169 ha groß ist?
Finde einen Maßstab und messe die Strecke. Schafft ein Mensch diese Strecke in 20 $\frac{1}{2}$ min?
Schreibe die genaue Zeit auf.

- Die Fläche von einem Park beträgt 324 m^2 . (Seitenlänge in der Karte: 18 cm).
- Wie viel Meter muss man laufen, wenn man einmal um den Park herumläuft?
 - Wie lange braucht man für diese Strecke, wenn man mit einer konstanten Geschwindigkeit von $14,9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ läuft?
 - Schafft man es in 25 Sekunden?
 - Wie lange braucht man, wenn man 10 Runden laufen würde?
 - Würde man es in 5 Minuten schaffen?

2. Stunde/3. Stunde: Beide Unterrichtsstunden wurden jeweils in einen Arbeits- und Präsentationsteil gegliedert. Die Lehrerin nahm aufgrund der Analyse der von den Schülerinnen und Schülern vorgeschlagenen Aufgabenvariationen eine Einteilung der Klasse in Gruppen vor. In dieser Gruppenstruktur folgte dann die weitere Arbeit.

Gruppe I

Die Stadt beauftragt Euch mit der Weitergestaltung der gegebenen Parkanlage. Dabei sollt ihr unbedingt folgende Elemente anlegen:

- ein quadratisches Waldstück mit einer Seitenlänge von 350 m.
- ein rechteckiges Blumenbeet mit den Seitenlängen $a = 4,05 \text{ m}$ und $b = 6,60 \text{ m}$. Es soll ringsherum mit Tulpen bepflanzt werden. Zwei benachbarte Tulpen haben jeweils einen Abstand von 15 cm. Eine Tulpe kostet 0,49 €.

1. Welche Fläche nimmt der Wald ein? Gibt es ein Teilstück im Park, an der dieser Wald angelegt werden kann, ohne dass ein Weg hindurchführt? (Nicht alle Teilstücke berechnen, sondern durch Überlegung lösen.)
Zeichnet den Wald an einem geeigneten Platz eurer Wahl maßstabsgetreu in Die vorgegebene Karte ein.

Hausaufgabe:

Besucht einen Park in eurer näheren Umgebung. Welche anderen Elemente könnt ihr dort finden (mindestens 3)? Schätzt deren Größe ab zum Beispiel mit Hilfe von gezählten Schritten (1 Schritt entspricht m).

2. Fertigt eine Skizze vom Blumenbeet an. Berechnet die Anzahl der benötigten Tulpen.(Achtung!)
Reichen 70 € für die Bepflanzung aus? Gebt den genauen Wert an.

Gruppe II

1. Bestimmt näherungsweise die Fläche und den Umfang der beiden gegebenen Seen. Findet dabei möglichst verschiedene Verfahren (mindestens 2) und schätzt deren Ergebnisse bezüglich ihrer Genauigkeit ab.
Wie viel Prozent beträgt die Fläche des kleinen Sees im Vergleich zum großen See?

Hausaufgabe:

Besucht gemeinsam einen Park in eurer Nähe. Versucht diesen möglichst genau zu skizzieren.

Geht, wenn möglich, einmal um den Park herum und gebt mit Hilfe eurer gezählten Schritte den Umfang des Parks an. (Sollte dies nicht gehen, bestimmt eine Seitenlänge des Park auf die gleiche Art und Weise.) Vergesst nicht die Angabe: 1 Schritt entspricht m

2. Bestimmt rechnerisch die Größen aller Teilflächen, die sich zwischen den Wegen befinden. (Bitte keine gerundeten Werte)
Berechnet die wahre Länge der Strecke B.

Gruppe III

Die Fläche eines quadratischen Parks (siehe Karte der Initialaufgabe) beträgt 110,25 ha.

1. a) Berechnet die dazugehörige Seitenlänge des Parks und ermittelt den Maßstab.
b) Untersucht folgende Wege hinsichtlich ihrer Länge:
Startpunkt: Haltestelle West und Zielpunkt: Haltestelle Nord
 - außen entlang des Parks
 - E F, G, dann zur Haltestelle Nord
 - E, abbiegen auf den Weg F, an der nächsten Biegung in Richtung See, weiter geradeaus entlang des Sees, dann den Weg nach Norden zur Haltestelle
 - E, weiter geradeaus, vor dem kleinen See nach links, weiter entlang des Sees, dann den Weg zur Haltestelle Nord nehmen.
- c) Versucht den längsten und den kürzesten Weg zwischen der Haltestelle Ost und der Haltestelle Süd zu finden, ohne die nördliche Parkhälfte zu betreten.

Hausaufgabe:

Wählt eine Strecke in eurer Umgebung, deren Länge ihr kennt oder die ihr leicht bestimmen könnt (zum Beispiel die 100m-Laufbahn auf dem Sportplatz).

Ermittelt die Zeiten mit einer Stoppuhr, wenn ihr sie als Fußgänger, Läufer oder Radfahrer zurücklegt. Bestimmt die jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten.

2. Wie lange braucht ein normaler Spaziergänger, ein Läufer und ein Radfahrer für die in Aufgabe 1c) ermittelten Wege?
Schätzt die Zeiten zuerst ab, bevor ihr sie dann mit Hilfe eurer in der Hausaufgabe ermittelten Werte berechnet.

Gruppe IV

1. Zwei Männer laufen gleichzeitig von den Ausgängen West beziehungsweise Ost los. Sie laufen mit einer konstanten Geschwindigkeit von 13,3 km/h. Beide wollen die Haltestelle Nord möglichst schnell erreichen, dürfen aber nur den vorhandenen Wegen folgen.
Wer kommt dann früher an?
Wie sieht das Ergebnis aus, wenn sie beide zur Süd- statt zur Nordhaltestelle laufen?

Hausaufgabe:

Gestaltet selbst eine Parkanlage innerhalb eurer Gruppe mit dem gegebenen Maßstab und der Fläche der Initialaufgabe. Der Park sollte unbedingt eine Dreiecksfläche mit einer Fläche von 49ha haben. Der Rest kann frei gestaltet werden.

2. Es laufen 2 Männer gleichzeitig vom Osteingang los und wollen zum Westausgang. Der eine nimmt den Weg quer durch den Park und läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 12,9 km/h. Der andere Läufer wählt die Strecke, die über die Wege A bis D dorthin führt.
Mit welcher Geschwindigkeit muss dieser Mann laufen, damit beide Männer gleichzeitig am Westausgang ankommen? (Für das Teilstück B ist eine Länge von 636 m zu verwenden)

Gruppe V

1. a) Entwerft eine eigene Parkanlage mit dem gegebenen Maßstab und Fläche der Initialaufgabe. Dabei sollten folgende Weglängen auftreten:
- 1,4 km
 - circa 1,98 km
 - 700 m
 - 235000 cm
 - 1150 m
- (weitere Wege sind natürlich auch zulässig)
- b) Bestimmt im Anschluss daran zwei verschiedene Routen, die den gleichen Anfangs- und Endpunkt haben. Eine der Routen soll kürzer als 2 km und die andere länger als 4,8 km sein. Gebt eure genauen Werte an.

Hausaufgabe:

Wählt eine Strecke in eurer Umgebung, deren Länge ihr kennt oder die ihr leicht bestimmen könnt (zum Beispiel die 100 m-Laufbahn auf dem Sportplatz). Ermittelt die Zeiten mit einer Stoppuhr, wenn ihr sie als Fußgänger, Läufer, Radfahrer zurücklegt. Bestimmt die jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten (falls möglich auch vom Hund, Inline-Skater, ...).

2. Bestimmt für eure zwei Routen jeweils die fehlenden Größen. Überlegt euch, ob alle Werte realistisch sind?

Subjekt	Route	Weglänge	Geschwindigkeit	Zeit
laufender Mensch	1		14,8 km/h	
	1		24,2 km/h	
	1			15min 13 sek
Hund	2		6,6 m/s	
Fahrradfahrer	2			68 sek
	2			3min 30 sek

Sowohl die Lösung der Aufgaben in der jeweiligen Gruppe als auch die Präsentation der Ergebnisse waren erfolgreich. Zum Abschluss dieses Projektes mussten die Schülerinnen und Schüler noch einige kleine Testfragen beantworten, die ihnen zeigen sollten, wie gut sie den Anforderungen dieser Aufgabenstellungen (z. B. auch genaues Zuhören bei der Präsentation) gerecht werden konnten. Dies stellte sich als eine Möglichkeit dar, Kontrolle und Bewertung von Schülerleistungen im Rahmen der Aufgabenvariation mit einzubeziehen.

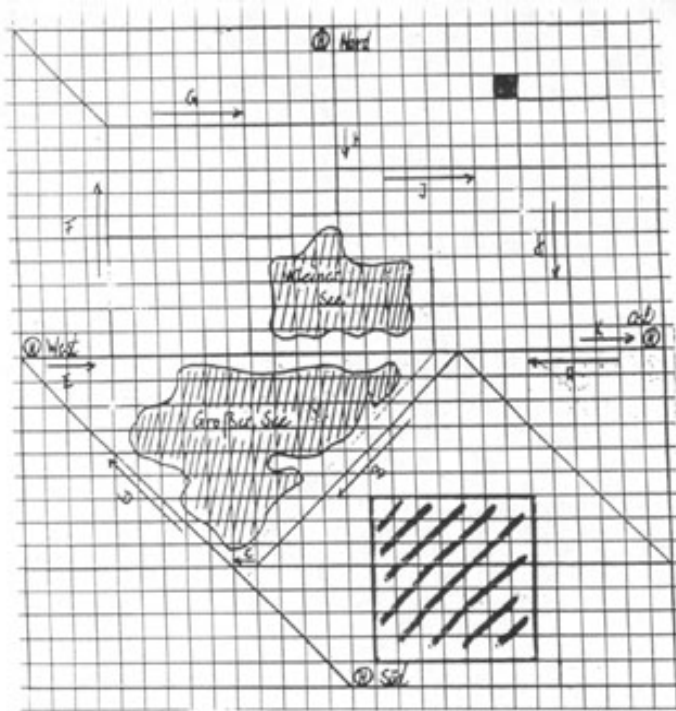
Fragen	Lösungen
<p>1. Welche geometrische Form hatte die Parkanlage?</p> <p>2. Wie viel m² entsprechen der Fläche eines Hektars?</p> <p>3. Ihr habt einen Weg von 7 cm gemessen und ihr wisst, dass 1 cm 50 m entspricht. Wie lang ist der Weg dann in der Realität?</p> <p>4. Wie lautet die Formel zur Berechnung einer konstanten Geschwindigkeit?</p> <p>Nennt eine realistische Geschwindigkeit für ...</p> <p>5. einen Jogger</p> <p>6. einen Bus innerhalb der Ortschaft</p> <p>Wer oder was geht beziehungsweise fährt mit folgenden Geschwindigkeiten:</p> <p>7. circa $5 \frac{km}{h}$</p> <p>8. circa $23,9 \frac{km}{h}$</p> <p>9. Wahr oder falsch? Wenn man den Flächeninhalt eines Quadrates gegeben hat, muss man diesen quadrieren, um die Seitenlänge des Quadrats zu bestimmen.</p>	<p>→ Quadrat</p> <p>→ 1 ha \equiv 10000 m²</p> <p>→ 350 m</p> <p>→ $v = \frac{s}{t}$</p> <p>→ 12 bis 19 $\frac{km}{h}$</p> <p>→ 30 oder 50 $\frac{km}{h}$</p> <p>Zum Beispiel:</p> <p>→ Fußgänger</p> <p>→ Fahrradfahrer</p> <p>→ falsch</p>

10. Eine Gruppenarbeit sollte mit Hilfe aller Gruppenmitglieder gelöst werden. War dies bei euch der Fall?

11. Wie war die Präsentation eurer Gruppenergebnisse (Skala 1 bis 5)

12. Schätzt eure Gruppenarbeit selbst ein (Skala 1 bis 5)

Repräsentativ für die Gruppenarbeit seien hier die Schüleraufzeichnungen der Gruppen I und IV dargestellt.



Antworten:

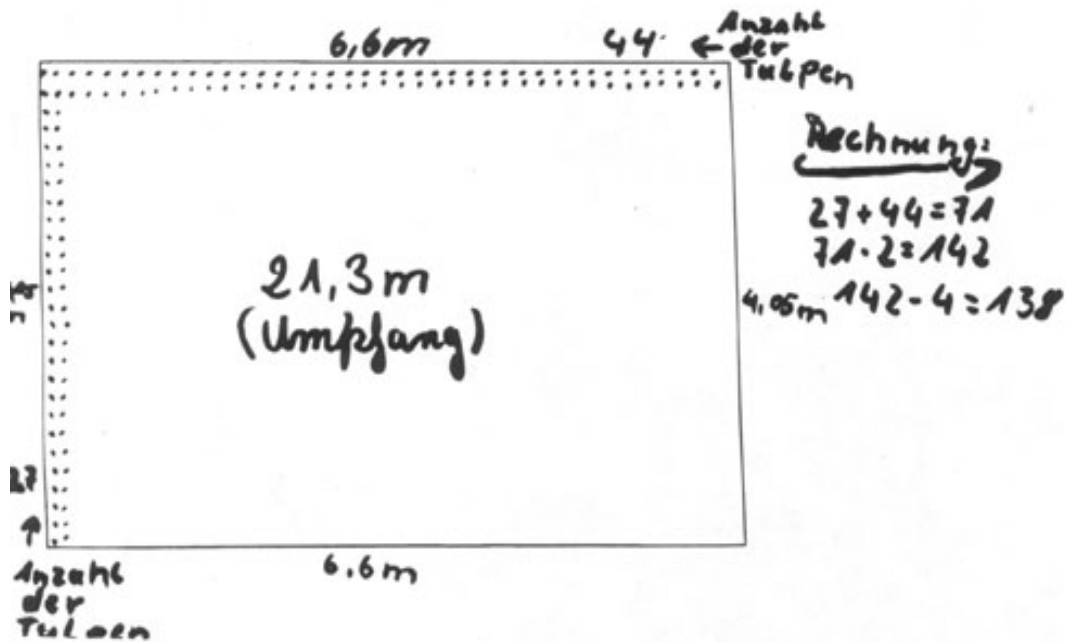
Der Wald nimmt 127.500 m^2 ein.

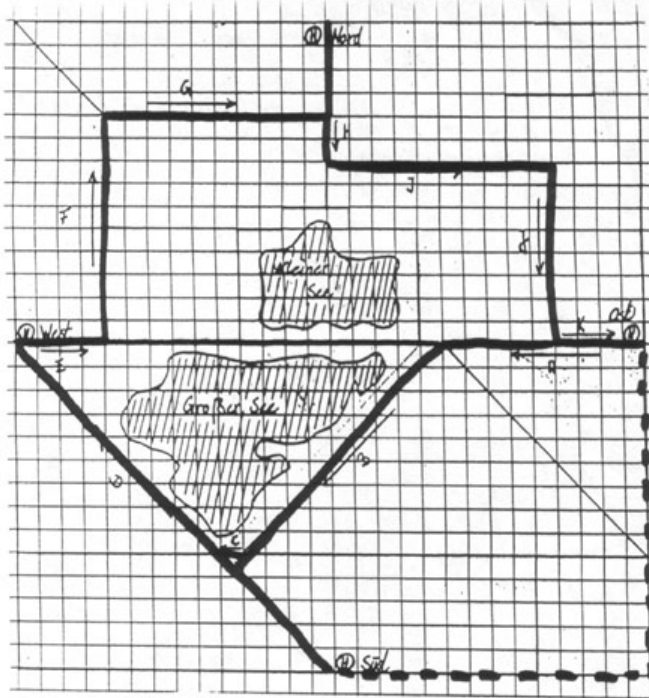
Das Tulpenbeet nimmt $26,73 \text{ m}^2$ ein.

Ha.

138 Tulpen sind es insgesamt.

706 reichen aus um das ganze Beet mit Tulpen zu bepflanzen.





- a) Mann Ost: 1,4 km
Mann West: 1,4 km

Männer kommen gleichzeitig an.

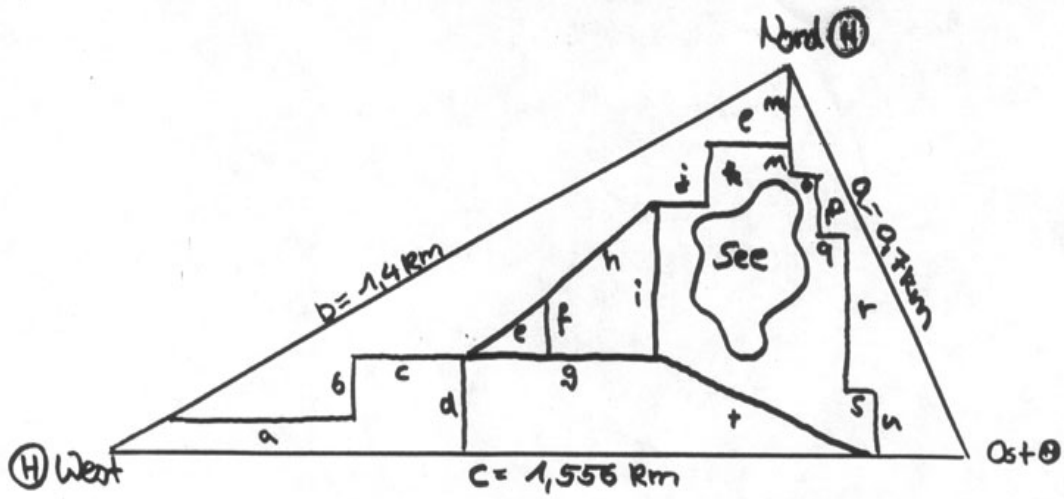
- b) Mann Ost: 1,5 km
Mann West: 0,99 km

Mann West kommt zuerst an.

$$1. \text{ Mann: } \frac{1,4 \text{ km}}{12,9 \text{ km/h}} = 0,11 \text{ h}$$

$$2. \text{ Mann: } \frac{17,72 \text{ km}}{0,11 \text{ h}} = 16,1 \text{ km/h}$$

Der 2. Mann muss 16,1 km/h laufen.



1 ha = 10.000 m² ≈ 490.000 m²

49 ha = 490.000 m²

1 cm ≙ 100 m



a = 7 cm b = 14 cm

c = $\sqrt{a^2 + b^2} = 15,56$ cm

a = 700 m ≈ 0,7 km

b = 1400 m ≈ 1,4 km

weil 700 · 1400 = 490.000

3.3 Schwimmbecken – Körperdarstellung und Körperberechnung, Klasse 10 (Karin Motejat)

Bereits in /2/ wurden das unterrichtliche Vorgehen bei der Lösung der Initialaufgabe „Schwimmbecken“ (vgl. auch /4/) und mögliche „Schülervariationen“ vorgestellt.

Stereometrie

2. Prismen Blatt 9*

1. Die folgende Abbildung zeigt zwei Schwimmbecken in Form gerader Prismen, die mit Kacheln ausgelegt werden sollen.

(Maßangaben in m)

I

$\overline{AB} = 50$
 $\overline{BC} = 20$
 $\overline{AE} = 3$

II

$\overline{EF} = 50$
 $\overline{BC} = 20$
 $\overline{AE} = 3$
 $\overline{BF} = 2$

- Nenne alle Flächen der Figur I, die mit Kacheln ausgelegt werden müßten!
- Wieviel Flächen der Figur II werden gekachelt, wenn der Grund des Beckens ausgelassen werden soll?
- Berechne für Figur I die Größe der zu kachelnden Fläche!

2. Die folgende Abbildung zeigt das Schrägbild eines Prismas, das durch die Fläche BCLK in zwei Teilkörper zerlegt wird.

$\overline{AB} = \overline{BC} = 4\text{cm}$
 $\overline{AE} = 2\text{cm}$

- Nenne Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Teilkörper!
- Ermittle den Rauminhalt der beiden Teilkörper für den Fall, daß die Punkte L und K die entsprechenden Körperkanten halbieren!
- Vergleiche die Rauminhalte der beiden Teilkörper für den Fall, daß Punkt K mit Punkt E und Punkt L mit Punkt H zusammenfallen!

Die Lehrerin hat dieses Beispiel noch einmal aufgegriffen und die Phase der „Aufgabenvariation“ ausgebaut. Im Ergebnis dieses Prozesses ist die folgende Liste von Aufgabenvariationen entstanden:

1. Über dem Becken 1 soll ein Dach mit einer pyramidenartigen Form gebaut werden. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Daches?
2. Becken 1 soll vollständig gekachelt werden. Wie viele Kacheln mit den Maßen 20 cm x 20 cm werden dazu benötigt und wie teuer wird das Kacheln bei einem Stückpreis von 1,50 Euro?
3. Becken 2 soll nur zu 75 % mit Kacheln (25 cm x 25 cm) verkleidet werden – wie viel bezahlt man bei einem Stückpreis von 1 Euro?
Der Rest der Poolmantelfläche soll mit einer wasserfesten Farbe 3,5 mm dick bestrichen werden. Wie viel Liter Farbe werden benötigt?
4. Um wie viel cm steigt der Wasserspiegel im Becken 1, wenn gleichzeitig 20 Menschen mit je einem Volumen von 52 Litern in das Becken gehen und das Becken vorher bis 15 cm unter den Rand gefüllt war?
5. Im Schwimmbecken 1 befinden sich 16 Leute, die zusammen rund 1200 kg wiegen. Eine Pumpe mit einer Leistung von 20 Liter / Minute arbeitet ununterbrochen, um das Wasser im Becken zu reinigen. Wie lange braucht die Pumpe, um das gesamte Wasser im Becken einmal vollständig zu reinigen?
6. Becken 1 soll um 15 m verbreitert werden. Wie groß sind nun Fassungsvermögen und Kachelflächeninhalt des Beckens?
7. Ein Kind steht auf einem 3m-Turm, welcher am oberen Ende ein 1 m langes Sprungbrett besitzt. 6 m vom Fußpunkt des Turmes entfernt ist der Kopf eines Schwimmers auf der Wasseroberfläche zu sehen. Welchen Abstand hat der Schwimmerkopf von der Vorderkante des Sprungbrettes?
8. Becken 1 soll – nach dem Ablassen des Badewassers und einer Renovierung neu befüllt werden. 1000 Liter sind bereits eingefüllt. Wie hoch steht das Wasser und wie viel Prozent des Fassungsvermögens sind damit erreicht?
9. Wie groß ist die Masse des eingefüllten Wassers in Becken 1 bzw. 2, wenn sie voll gefüllt sind?
10. Im Becken 2 ist die untere Fläche geneigt. Welche Winkel schließt sie mit den Seitenwänden ein? Gib die Steigung der Fläche in Prozent an.
11. Ein 80 kg schwerer Mann springt in das Wasser, welches hoch aufspritzt. Wie weit spritzt das Wasser, wenn er mit einer Geschwindigkeit von ca. 5 m/s auf der Wasseroberfläche auftrifft?
12. Am Beckenrand befindet sich eine Rutsche, die ein Kind mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h waagrecht verlässt. Wie lang sollte das Becken mindestens sein, damit das Kind noch im Wasser landet?

3.4 Rund um das Skispringen, Klasse 8 (Aileen Schröder, Janett Els)

Sowohl bei der Auswahl der Initialaufgabe als auch bei der Suche nach möglichen Variationen kamen fächerübergreifende Aspekte zum Tragen. So werden die Fächer Physik, Biologie und Sport miteinbezogen.

Initialaufgabe

Ein Skispringer erreicht den Schanzentisch bei einer Normalschanze mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h. Der Absprung ist für den Springer enorm wichtig, da dieser über die Weite seines Sprunges bestimmt. Eine sehr gute Weite hängt folglich vom genauen Zeitpunkt seines Absprungs ab. Die Vorbereitung auf den Absprung dauert insgesamt 0,27 Sekunden. Wie weit vor der Absprungkante muss der Springer seinen Absprung beginnen?

Mögliche Variationen sind:

2. Bei einer Skiflugschanze erreicht ein Skiflieger aufgrund seiner größeren Anlaufänge eine höhere Geschwindigkeit, etwa 10 km/h mehr. Welche Auswirkungen hat dieser Sachverhalt auf den Absprung?
3. Ein Skispringer leitet jedoch erst 5 Meter vor der Absprungkante seinen Absprung auf der Normalschanze ein. Über welche Geschwindigkeit verfügt der Springer, wenn er den Absprung trotzdem genau trifft?
4. Ein Skispringer mit einer Gewichtskraft von 726 Newton beschleunigt sich vom Balken weg auf die Geschwindigkeit von 90 km/h. Diese Geschwindigkeit hat er nach 3,2 Sekunden erreicht. Welche Masse besitzt der Springer? Ist dieses Gewicht für einen Skispringer real?
5. Alle Skispringer haben ein niedrigeres Gewicht. Welche Gewichtskraft hat ein Skispringer von 70 kg?
6. Der Skispringer verlässt den Schanzentisch mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h. Wie weit springt er eventuell, wenn er vom Absprung bis zur Landung 3,2 Sekunden in der Luft bleibt?
7. Der Schanzenrekord auf der großen Olympiaschanze in Garmisch-Partenkirchen liegt bei 133 m von Martin Schmitt. Die durchschnittliche Absprunggeschwindigkeit von dieser Schanze liegt bei 91 km/h. Wie lange war Martin Schmitt etwa in der Luft?
8. Berechne die Flugzeit vom Schanzenrekordhalter Risto Jussilainen (FIN) der Flugschanze in Harrachov (Tschechien) am 14.01.2001 mit 212,5 m. Dieser verließ den Schanzentisch mit einer Geschwindigkeit von 102,5 km/h.
9. Mit einer Weite von 206 m landete ein Springer lediglich auf dem 10. Rang. Auch Skispringer analysieren ihre Sprünge zusammen mit ihren Trainern, um in Zukunft Fehler vermeiden zu können. Sein Trainer stoppte eine Flugzeit von 6,8 Sekunden. Der Geschwindigkeitsmesser beim Absprung war zu diesem Zeitpunkt defekt. Berechne deshalb seine Absprunggeschwindigkeit.

10. Ein Skispringer verfügt beim Absprung über eine Geschwindigkeit von 90 km/h. Seine Beschleunigung war vom Balken bis zum Schanzentisch konstant 4 m/s^2 . Zeichne ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm im Zeitraum seines Anlaufes. Anschließend zeichne ein weiteres Diagramm, in dem du Weg und Zeit berücksichtigst.
11. Die wohl bekannteste Skischanze in Deutschland mit einer Turmhöhe von 38 m steht in Garmisch-Partenkirchen. Der Landkreis Garmisch-Partenkirchen ist zu 46 % von ausgedehnten Wäldern bedeckt. Die Berge sind bis zur Waldgrenze auf etwa 1650 m Höhe bewaldet. Nenne die Schichten des Waldes und charakterisiere sie. Erläutere die Bedeutung von Wäldern. Welche Auswirkungen sind nach einer Entwaldung zu erwarten?

Bezieht man noch andere Faktoren, wie z.B. Schneebeschaffenheit, Wind, Schanzenaufbau in die (fächerübergreifenden) Betrachtungen ein, ergeben sich weitere Variationsmöglichkeiten.

3.5 Positionstausch – Einführung in die Graphentheorie, Klasse 8

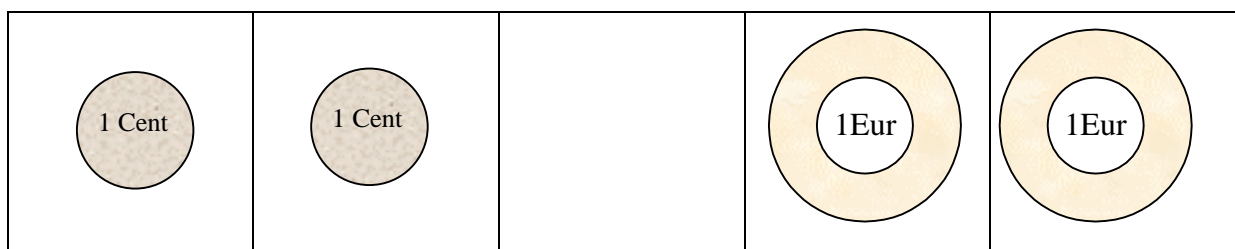
(Frank Grundmann)

Es gibt Faktoren, die die Möglichkeiten des Variierens von Aufgaben durch die Schülerinnen und Schüler selbst mehr oder weniger günstig beeinflussen. Dazu gehören auch Kontext und Struktur einer Aufgabe. Aus diesen Gründen und aufgrund der Anwendungsbedeutung der Graphentheorie entschieden wir uns für den Versuch, dieses neue Gebiet über den Weg der „Aufgabenvariation“ (und damit sozusagen von den Schülerinnen und Schülern selbst initiiert) in den Unterricht mit einzubringen. So lösten wir mit einer Schülergruppe das Problem des *Positionstausches von vier Münzen* als Initialaufgabe und diskutierten dann auf dieser Basis mehrere Aufgabenvarianten.

Ausgangssituation:

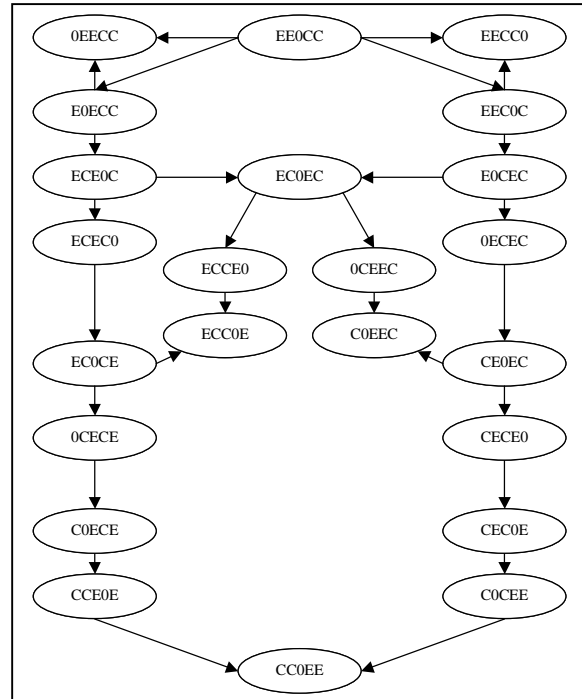
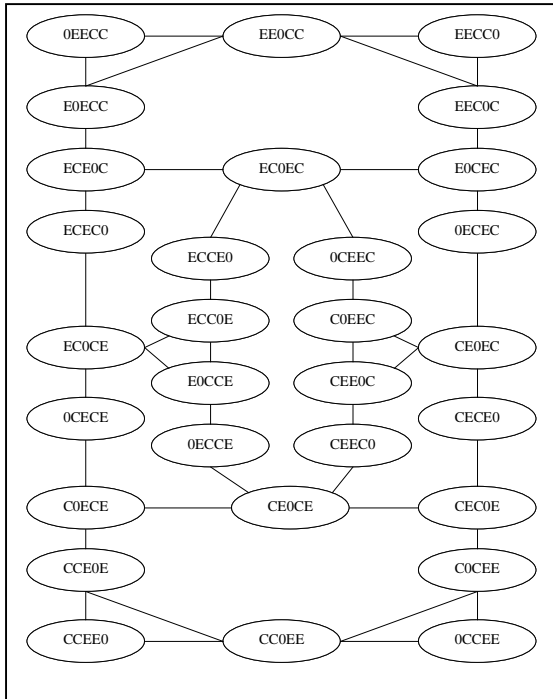


Zielsituation:



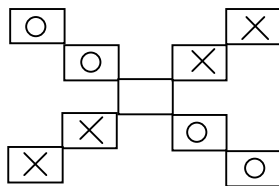
Regeln: Schieben einer Münze ist erlaubt; Überspringen einer Münze ist erlaubt

Diskutiert wurden **kürzeste** und **längste** Wege, alle **möglichen** Wege, **gerichtete** Graphen und vieles mehr natürlich in Abhängigkeit von variierten Bedingungen (z.B. Anzahl der Münzen, „freie Felder“, Richtungsbeschränkungen . . .). Im Ergebnis entstanden z. B. folgende zwei Graphen:



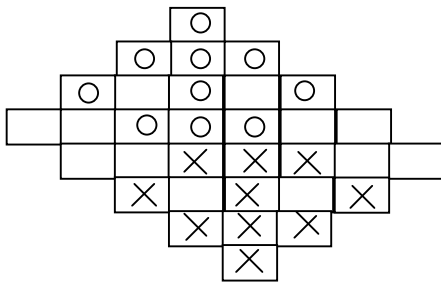
Andere Variationen, die von den Schülerinnen und Schülern vorgeschlagen wurden, waren:

1. Die Anzahl der Münzen ist auf drei zu erhöhen.
2. Die Anzahl der freien Felder ist auf 2 zu erhöhen.
3. Finde alle möglichen Lösungswege.
4. Wie sieht die Lösung aus, wenn die Anzahl der Münzen und der freien Felder beliebig ist?
- 5.



Das Schieben sollte hier diagonal gestattet sein. Zusätzlich war das Springen erlaubt. Da das Problem der Lösbarkeit sofort erkannt wurde, folgt die Zusatzbedingung, dass in den Mittenfeldern über die Leerfelder ebenfalls gesprungen werden darf (B2 → B4, B4 → D4, D4 → D2, D2 → A2). Die Richtung sollte beliebig sein.

6. In dieser Variante sollte nur das diagonale Schieben gestattet sein.

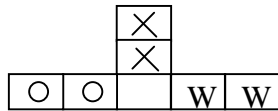


7. Die Beschränkung in Bezug auf die Richtung des Ausgangsproblems ist aufzuheben.

8. Das Überspringen von zwei Münzen ist gestattet (entsprechend mindestens zwei Freifelder).

9. Das Problem ist auf je vier Münzen auszudehnen, wobei zwei Freifelder zur Verfügung stehen. Das Schieben und Springen ist mit bis zu zwei Münzen gleichzeitig erlaubt.

10.



Das Problem wurde auf drei Elemente ausgedehnt. Jede der Seiten ist im Uhrzeigersinn zu vertauschen. Springen ist über die Ecke möglich.

11.

E	E		C	C
E	E		C	C
E	E		C	C
E	E		C	C
E	E		C	C

Die beiden Seiten sind zu vertauschen. Dabei darf nur gerade und diagonal geschoben werden.

12.

C	C	C	C	E
C	C	C	E	E
C	C		E	E
C	C	E	E	E
C	E	E	E	E

Die beiden Bereiche sind zu vertauschen. Dabei darf nur gerade und diagonal geschoben werden. Das Springen ist erlaubt.

13. Die Aufgabe ist auf die Form eines Würfels auszudehnen. Die genaue Belegung und die Regeln konnten nicht spezifiziert werden. (Diese Aufgabe wurde auch nicht vollständig gelöst.)

14. Vier Würfel sind in Form einer 2 x 2 Matrix angeordnet. Die benachbarten Würfel sind an den zugewandten Seiten verbunden. Die verbleibenden vier Seiten jedes Würfels sind mit jeweils einem Symbol belegt. Ziel ist es, die Symbole so zu sortieren, dass am Ende auf jedem Würfel nur Symbole einer Art vorhanden sind. Das Schieben ist auf der Oberfläche des Würfels möglich. Das Schieben ist über die Verbindungslinien möglich, sofern das Zielfeld nicht belegt ist.

3.5 Aufgabenvariation und Bewertung – Kursstufe (Antje Schulze, Katharina Engler)

Anliegen, Zielstellungen und der Anspruch, dass „Aufgabenvariation“ kein Selbstzweck sein darf, stellen Fragen nach Möglichkeiten der Bewertung und Zensierung im Unterricht. Mit Sicherheit ist dies eine schwierige Problematik, die erst noch genauer untersucht werden muss. Klar scheint zu sein, dass Engagement und Kompetenz beim Variieren im Unterricht Einfluss haben muss auf die mündlichen Noten und damit auf die Gesamtnotengebung. Für den schriftlichen Bereich seien an dieser Stelle zwei Vorschläge unterbreitet:

(a) Variation mit möglichst offener Fragestellung (Test)

Mögliche Fragestellung:

1. Löse die Initialaufgabe.
2. Variiere die Initialaufgabe und löse dann.

Problem: unterschiedliche Anzahl und Art der Variationen, schwer einheitlichen Maßstab zu finden.

Alternative:

1. Löse die Initialaufgabe.
2. Finde drei (verschiedene) Variationen und löse dann.

Problem: vorheriges Festlegen der Punkteverteilung fast unmöglich (Bewertungsmaßstab muss für Schüler klar ersichtlich sein!)

Lösung: Bewertung der Schülerarbeit in schriftlicher Form

Mögliche Kriterien zur schriftlichen Bewertung

- Wurde die Aufgabenstellung erfüllt?
- Entspricht das Niveau der Variation dem Wissen und Können des Schülers?
- Haben die Variationen unterschiedliche Schwierigkeitsgrade?
- Wurden die Aufgaben richtig gelöst oder ggf. ihre Unlösbarkeit begründet?
- Ist die Aufgabe und deren Lösung verständlich und nachvollziehbar formuliert?
- Hat der Schüler übersichtlich und sauber gearbeitet?

Einwände

- großer zeitlicher Aufwand für den Lehrer
- Nehmen die Schüler Bewertungen in schriftlicher Form ernst?

Beispiel

Initialaufgabe:

Zwei ältere Ehepaare sind zusammen 290 Jahre alt. Die Männer sind zusammen 10 Jahre älter als die Frauen. Die Frauen sind gleich alt. Man stelle ein Gleichungssystem auf und gebe mögliche Lösungen an.

Mögliche Variationen:

- Ändern der vorgegebenen Parameter
- Hinzufügen von Informationen (damit Gleichungssystem eindeutig lösbar)
- Hinzufügen von Informationen (damit Gleichungssystem nicht lösbar)
- Anderen Zusammenhang finden, der dieses Gleichungssystem beschreibt
- Zeichnerisches Lösen der Aufgabe
- Lösen der Aufgabe durch systematisches Probieren

Warum eignet sich diese Aufgabe?

- Variationen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades lassen sich leicht finden
- Verständnis des Stoffgebietes wird überprüfbar

(b) Möglichkeiten der Leistungsbewertung in Klausuren

Bei Klausuraufgaben sind im Gegensatz zum Test klare Bewertungsmaßstäbe und eine eindeutige Punkteverteilung notwendig, dies macht eine genaue Vorgabe der Aufgabenstellung erforderlich.

(1) Art der Variation vorgeben

Zum Einen ist es natürlich möglich, die Initialaufgaben und deren Variationen exakt und eindeutig vorzugeben, nur entspricht dies nicht dem Sinn der Aufgabenvariation, die selbstständiges, kreatives Denken fördern soll.

In diesem Abschnitt soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden, wie eine Klausur aussehen könnte, bei der die Art der jeweiligen Variation schon vorgegeben ist, dem Schüler aber dennoch Freiraum zur eigenen Gestaltung der Aufgaben gelassen wird.

	Aufgabe	Punkte
1	Löse die Initialaufgabe: Welchen Abstand hat der Punkt P(7/9) von der Geraden g, die durch die Punkte Q(9 5) und R(5 2) gegeben ist? Löse rechnerisch.	6 (Lösungsweg) 1 (richtige Lösung)
2	Finde eine Variation gemäß der Vorgabe und löse dann.	
2a	Ändere einen der gegebenen Punkte.	1 (Variation gefunden) 6 (Lösungsweg) 1 (richtige Lösung)
2b	Finde einen anderen Lösungsweg.	2 (Variation gefunden) 6 (Lösungsweg) 1 (richtige Lösung)
2c	Was kann man anhand der gegebenen Daten noch berechnen?	2 (Variation gefunden) 6 (Lösungsweg) 1 (richtige Lösung)
2d	Finde eine ähnliche Aufgabe für den \mathbb{R}^3 .	2 (Variation gefunden) 6 (Lösungsweg) 1 (richtige Lösung) 1 Zusatzpunkt, falls schwierige Aufgabenstellung
		42 + 1

Punkteverteilung

Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8
Leistung (in %)	100-96	95-91	90-86	85-81	80-76	75-71	70-66	65-61
	42-40	39-38	37-36	35-34	33-32	31-30	29-28	27-26

Punkte	7	6	5	4	3	2	1	0
Leistung (in %)	60-56	55-51	50-46	45-41	40-35	34-28	27-21	20-0
	25-24	23-21	20-19	18-17	16-15	14-12	11-9	8-0

(2) Stoffgebiet der Variation vorgeben

Bei dieser Art von Variation sind die Schüler auf ihre Kreativität angewiesen. Als eine Klausuraufgabe wird ihnen eine Initialaufgabe gegeben, die sie lösen müssen. Danach sollen sie eine Variationsaufgabe finden und diese auch lösen. Damit die Schüler aber ähnliche Aufgaben bearbeiten, gibt man ihnen ein Stoffgebiet vor, in das die Aufgabe eingeordnet werden soll. Dazu ist es vorher notwendig, eine ähnliche Aufgabe im Unterricht zu behandeln, um mit den Schülern zu klären, welches Niveau man in den Aufgabenstellungen von ihnen erwartet.

Bewertung

Die Vergabe der Punkte erfolgt bei der Initialaufgabe auf den Rechenweg und die Lösung der Aufgabe. Bei der Variation erhält der Schüler einen Punkt auf die Aufgabenstellung und zwei Punkte auf den Lösungsweg und die Lösung der Aufgabe. Bei besonders hohem Niveau der Variationsaufgabe kann ein Zusatzpunkt vergeben werden. Die Höchstpunktzahl der Variationsaufgabe von nur vier Punkten soll dem Schüler ermöglichen, einige notwendige Punkte für die Klausur zu erhalten. Aber diese Punkte sind im Gegensatz zur Gesamtpunktzahl gering, da das Hauptziel in der Klausur im Verstehen und Bearbeiten des zu testenden Stoffgebietes liegt. Der Schüler hat dadurch aber auch die Möglichkeit, sein vorhandenes Wissen wieder anzuwenden und damit zu überprüfen.

Bei einer Klausur von zwei Schulstunden sollte die Punktzahl dieser Aufgabe etwa ein Drittel der Gesamtpunktzahl umfassen.

Diese Klausuraufgabe ist für einen Leistungskurs gedacht, da das Niveau der Variationsaufgaben höher angelegt sein sollte.

Beispiel

Initialaufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - 6x$.

- Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, deren Graph durch den Punkt $P(-1;-2)$ geht.
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen $F(x)$ und der x -Achse.

Variationsmöglichkeiten:

Aufgabe

Geben Sie eine Variationsaufgabe an, die in das Gebiet der Differentialrechnung reicht, und lösen Sie sie.

- Welche Stammfunktion von $f(x)$ hat ein Minimum auf der x -Achse? (+1 Zusatzpunkt)
- Welche Stammfunktion von $f(x)$ hat ein Maximum auf der x -Achse? (+1 Zusatzpunkt)
- Berechnen Sie die 1., 2. und 3. Ableitung der Funktion $f(x)$.

4. Bestimmen Sie den Anstieg der Funktion $f(x)$ im Punkt $P(2;0)$.
5. Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Extremwerte.

Klausuraufgabe (Beispiel):

1. Initialaufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - 6x$.

- a) Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, deren Graph durch den Punkt $P(-1;-2)$ geht.
- b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen $F(x)$ und der x -Achse.

Variation:

- c) Geben Sie eine Variationsaufgabe an, die in das Gebiet der Differentialrechnung reicht, und lösen Sie diese.

Bewertung:

Initialaufgabe: 18 Punkte

Variationen: 4 Punkte

Gesamtpunktzahl: 22 Punkte

+ weitere Klausuraufgaben: ca. 40 Punkte
Gesamtpunktzahl in der Klausur: 62 Punkte

Verteilung der Punkte:

Punkte	15	14	13	12	11	10	09	08
Leistung in %	100-96	95-91	90-86	85-81	80-76	75-71	70-66	65-61
Punkte im Test	62-60	59-56	55-53	52-50	49-47	46-44	43-41	40-38

Punkte	07	06	05	04	03	02	01	00
Leistung in %	60-56	55-51	50-46	45-41	40-35	34-28	27-21	20-0
Punkte im Test	37-35	34-32	31-29	28-25	24-22	21-17	16-13	12-0

Literatur

/1/ www.blk.mat.uni-bayreuth.de/blk/blk/material/mathe.html

/2/ Henning, H.; Leneke, B.: Aufgabenvariation als Unterrichtsgegenstand
Technical Report Nr. 1, 2000
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik

/3/ Schupp, Hans: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht
Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2002

/4/ „Tägliche Übungen – Teil 3“, Aufgabenblätter, Paetec, Gesellschaft für Bildung und Technik mbH, Berlin