Anwendungen – Modelle – Lösungen

Herbert Henning, Christian Hartfeldt
Thomas Kubitza, Steffen Hammermeister
Institut für Algebra und Geometrie
Fakultät für Mathematik
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Postfach 4120
39016 Magdeburg
Germany

Mike Keune
Ökumenisches Domgymnasium Magdeburg
Hegelstraße 5
39104 Magdeburg

Technical Report Nr. 2
2004

Fakultät für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 0

Herausbildung von Modellbildungskompetenzen

1. Mathematische Kompetenz

Kompetenzerwerb und Bildung stehen auf einer Stufe, beschreiben dieselben Fähigkeiten. Klieme et al. (2003) argumentieren in einer Expertise zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards das Bildung, als Erwartung an Lernprozesse, Fähigkeiten von Subjekten beschreibt, in der Gesellschaft mündig und selbstbestimmt handlungsfähig zu sein. Kompetenzen beschreiben gerade diese Fähigkeiten, die der Bildungsbegriff meint. Die vorliegende Arbeit schließt sich dem von Weinert definierten allgemeinen Kompetenzbegriff an. (vgl. Weinert 2001).

Eine exakte Definition des Begriffs Mathematische Kompetenz gibt Niss (2003). Niss beschreibt Mathematische Kompetenz als Fähigkeiten in einer Vielfalt inner- und außermathematischer Kontexte und Situationen, in denen Mathematik eine Rolle spielt oder spielen könnte, mathematisch zu handeln (zu verstehen, zu entscheiden und zu denken).

2. Modellbildungskompetenz

Unter Modellbildungskompetenz wird eine Gruppe von Kompetenzen (in gradueller Ausprägung) beschrieben, die sich dem Konzept der mathematischen Kompetenz unterordnet. In Anlehnung an aktuelle Diskussionen zum Kompetenzbegriff kann somit von einem Kompetenzmodell für die Domäne mathematische Modellbildung gesprochen werden. (Klieme et al., 2003, S. 61 ff.)

Es stehen bei der hier vorgenommenen Beschreibung von Modellbildungskompetenzen und deren charakterisierenden Fähigkeiten hauptsächlich *kognitive Merkmale* im Vordergrund.

Das vorgelegte Konzept der *Niveaustufen von Modellbildungskompetenzen* (Stufenmodell) wurde entwickelt, um Einsicht und Strukturierung in folgende wichtige Bereiche zu geben.

- Beschreibung von Fähigkeiten und ihre graduelle Ausprägung
- Auswahl und Zuordnung von unterrichtlichen Inhalten

- kriteriumsorientierte Interpretation von Schülerleistungen
- Operationalisierung von Zielsetzungen (Kompetenzerwerb)

Das Stufenmodell kann somit als deskriptives, normatives und metakognitives Hilfsmittel Verwendung finden. (vgl. Niss, 2003)

2.1. Niveaustufen der Modellbildungskompetenz. Fähigkeiten und Fertigkeiten in der Modellbildung werden einer Niveaustufe zugeordnet.

- Stufe 1: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes
- Stufe 2: selbständige Modellbildung
- Stufe 3: Metareflexion über Modellbildung

Die vorgenommene Einteilung korrespondiert dabei mit den Kompetenzklassen der PISA-Studie (OECD, 2000, S. 50) bzw. mit dem Kompetenz-Cluster Modell (OECD, 2003).

2.2. Modellbildungsfähigkeiten. Zur Charakterisierung der Niveaustufen werden Fähigkeiten zugeordnet. Die Zuordnung basiert auf theoretischen Überlegungen und praktischen Ergebnissen aus entsprechenden Unterrichtseinheiten.

2.2.1. *Stufe 1: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes.* Die Niveaustufe des Erkennens und Verstehens des Modellbildungskreislaufs wird näher charakterisiert durch:

- die Fähigkeit, den Modellbildungsprozess zu beschreiben
- die Fähigkeit, einzelne Phasen zu charakterisieren
- die Fähigkeit, einzelne Phasen zu unterscheiden bzw. während eines Modellbildungsprozesses zu lokalisieren

2.2.2. *Stufe 2: Selbständige Modellbildung.* Das Erreichen dieser Niveaustufe wird charakterisiert durch:

- die Fähigkeit, verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln

- die Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven (z. B. Algebra, Geometrie, Stochastik)
- die Fähigkeit zur selbständigen Modellbildung (Informationen abstrahieren; Auswahl und Verknüpfung von Größen; Mathematisieren; Modelllösung; Interpretation)

Der Grad der Kompetenzerweiterung liegt darin, dass die Schüler selbständig ihr Wissen differenziert anwenden, um die einzelnen Phasen der Modellbildung zu durchlaufen.

Ein geringer Grad innerhalb dieser Stufe ist das bloße Ausprobieren verschiedener Lösungsansätze. Ein höherer Grad innerhalb dieser Stufe ist gegeben, wenn selbstständig neue Lösungsverfahren (die nicht zum bisherigen Wissensumfang der Schülerinnen und Schüler gehört haben) entwickelt werden.

Eine Kompetenzerweiterung ist darin zu sehen, dass für ein Problem mehrere Modelle gefunden werden bzw. ein Modell mittels dynamischer Modellbildung verfeinert wird.

2.2.3. *Stufe 3: Metareflexion über Modellbildung.* Metareflexion über den Modellbildungsprozess und über die Anwendung von Mathematik wird charakterisiert durch:

- die Fähigkeit, (unabhängig vom konkreten Problem) über Anwendungen der Mathematik zu reflektieren
- die Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses
- die Fähigkeit, über den Anlass von Modellbildung zu reflektieren
- die Fähigkeit, Kriterien der Modellbildungsevaluation zu charakterisieren

Auf dieser Stufe werden allgemeine Probleme der Modellbildung erkannt, die Fähigkeit entwickelt, kritisch zu beurteilen und allgemeine Zusammenhänge zu erkennen. Es findet eine Reflexion über die Rolle von Modellen innerhalb der Wissenschaft und der Anwendung der Wissenschaft statt. Auf dieser Stufe ist es nicht unbedingt notwendig, zuvor ein Problem mittels Modellbildung bearbeitet zu haben. Denkbar ist hier die Analyse von Problemlöseprozessen. D. h., ein fertiges Modell wird untersucht und die gezogenen Schlussfolgerungen bewertet. (vgl. Jablonka, 1996, S. 163) Es werden Kriterien der Modellevaluation untersucht. (Henning, Keune, 2002)

Das vorgeschlagene Stufenmodell ist unabhängig von der jeweiligen Schul- bzw. Bildungsstufe und kann zur Untersuchung eines Längsschnittes über Bildungsstufen (Primarstufe, Sekundarstufe (I/II), usw.) eingesetzt werden. Als weitere Dimension kann zu den Niveaustufen das jeweilige Anforderungs-/Schwierigkeitsniveau der zugrunde liegenden Aufgabe betrachtet werden.

3. Literatur

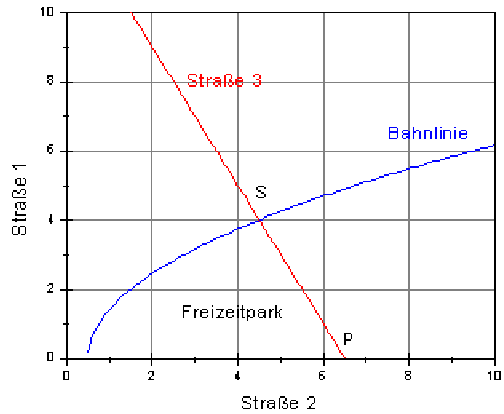
- Henning, H.; Keune, M. (2002). Modelling and Spreadsheet Calculation. In: Vakalis, I., Hallett, D. H., Kourouniotis, C., Quinney, D., Tzanakis, C. (Eds.). Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Hersonissos: Wiley. ID114 CD-Rom.
- Henning, H.; Keune, M. (2004). Levels of Modelling Competencies. In: Henn, H.-W., Blum, W. (Eds.). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education (Pre-Conference Volume). Dortmund: Universität Dortmund.
- International Commission on Mathematical Instruction [ICMI] (o. J.). ICMI Study 14: Application and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. (o. O.)
- Jablonka, E., (1996). Meta-Analyse von Zugängen zur Mathematischen Modellbildung und Konsequenzen für den Unterricht. Berlin: transparent.
- Klieme, E. (Koordination) et al. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards - Eine Expertise. Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF). Frankfurt a. M. (www.dipf.de/aktuelles/ expertisebildungsstandards.pdf)
- Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. (www7.nationalacademics.org/mseb/ Mathematical-Competencies-and-the-Learning-of-Mathematics.pdf)
- OECD - Deutsches PISA-Konsortium (2000). Schülerleistungen im internationalen Vergleich: Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung. (www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/Rahmenkonzeptiondt.pdf)
- OECD (2003). The PISA 2003 Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. (www.pisa.oecd.org)
- Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: F. E. Weinert (Hrsg.). Leistungsmessung in Schulen. Weinheim und Basel: Beltz Verlag, S. 17-31.

KAPITEL 1

Geländeplanung

1. Aufgabenstellung

AUFGABE 1. ***In einem ebenen Gelände kreuzen sich zwei Straßen rechtwinklig im Punkt O. Eine Straße verläuft von Süd nach Nord (Straße 1), die andere von West nach Ost (Straße 2). Des Weiteren verläuft in diesem Gelände eine Bahnlinie, die durch eine Funktion der Form*** $y = f(x) = \sqrt{ax+b}$ ***beschrieben werden kann. Eine dritte, ebenfalls geradlinig verlaufende Straße, kreuzt die Bahnlinie 450 m östlich und 400 m nördlich von O im Punkt S rechtwinklig. Die Kreuzung der Straße 2 mit der Straße 3 befindet sich 650 m östlich von O (Punkt P). Die Straßen 2 und 3 sowie die Bahnlinie begrenzen einen Freizeitpark vollständig.***



a) ***Ermitteln Sie je eine Gleichung für die Funktion, die den Verlauf der Straße 3 bzw. der Bahnlinie im Bereich des Freizeitparks beschreibt. [Teilergebnis zur Kontrolle:*** $y = f(x) = \sqrt{4x-2}$***]***

   Von West nach Ost fährt ein Autofahrer die Straße 2 entlang und biegt nach links in die Straße 3 ein.
   Um welchen Winkel ändert sich dabei die Bewegungsrichtung des Autos?

b) ***400 m östlich vom Punkt O befndet sich der Ausgang eines Tunnels für Fußgänger (Punkt A). Die Bahnlinie soll nun eine neue Haltestelle erhalten, die so angelegt werden soll, dass die Fußgänger vom Tunnel***

bis zur Haltestelle die kleinstmögliche Entfernung zurücklegen müssen. Berechnen Sie diese Entfernung.

Ein geradliniger Zugangsweg zum Haltepunkt B von der Straße 3 soll tangential zur Bahnlinie angelegt werden.
Stellen Sie eine Gleichung der Funktion auf, die den Verlauf des Weges beschreibt und geben Sie näherungsweise den Ort an, an dem sich die Kreuzung dieses Weges mit der Straße 3 befindet.

c) ***Der Freizeitpark hat eine Fläche von*** $14\frac{2}{3}$ ***Hektar. Durch einen rechtwinklig zur Straße 2 verlaufenden, geradlinigen Weg soll der Park in zwei flächengleiche Stücke zerlegt werden.***
Berechnen Sie für diesen Fall die Koordinaten des Punktes Z, in dem der Weg in die Straße 2 mündet.
[Hinweis: Mehr als 50 Prozent der Parkfläche liegt unter der Kurve, die die Bahnlinie beschreibt.]

2. Lernziele

Wissensziele: Die Schüler kennen...

- funktionelle Zusammenhänge und den Funktionsbegriff;
- verschiedene Vorgehensweisen zur Bestimmung von Funktionsgleichungen;
- die Modellbildung als Erkenntnismethode;
- den Zusammenhang zwischen erster Ableitung und dem Anstieg in einem Kurvenpunkt.

Könnensziele: Die Schüler...

- können von einem realen auf einen mathematischen Zusammenhang schließen;
- sind in der Lage, Extremwertaufgaben zu lösen;
- sind in der Lage, sich selbstständig einen geeigneten Maßstab für eine Aufgabe zu suchen, die metrische Angaben enthält;
- können Tangentengleichungen in einem Punkt eines Graphen bestimmen;
- können aus einer gegebenen Fläche gesuchte Parameter (zum Beispiel die obere Integrationsgrenze) mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen.

3. Fachwissenschaftliche Grundlagen

Insgesamt wird bei der gesamten Aufgabe - bei der es sich im Übrigen um eine Abituraufgabe aus dem Leistungskursabitur von 1997 aus Sachsen-Anhalt handelt - vor allem die

Differentialrechnung benötigt. Dabei müssen sich die Schüler zunächst für die gegebenen Daten einen geeigneten Maßstab auswählen. Es bietet sich hierbei an, dass eine Einheit im Koordinatensystem 100 Meter im Gelände entspricht. Außerdem sollten die Schüler in der Lage sein, vom gesamten Sachverhalt eine Skizze anzufertigen. Des Weiteren wird das Wissen der Schülerinnen und Schüler über Wurzelfunktionen und lineare Funktionen vorausgesetzt. In der letzten Teilaufgabe ist das Kalkül der Integralrechnung anzuwenden.

4. Didaktische Reflexion

Vor dem Beginn der Bearbeitung der Komplexaufgabe wurde mit den Schülern ein einheitlicher Maßstab fest gelegt. Wie auch vom Lehrenden geplant, schlugen die SchülerInnen den Maßstab 1 : 10.000 vor, sodass also eine Einheit im Koordinatensystem 100 Meter im Gelände entspricht. Die gegebenen Daten wurden anschließend noch ein Mal an die Tafel geschrieben:

Maßstab: 1 : 10.000
$S(4,5 \mid 4)$
$P(6,5 \mid 0)$
$O(0 \mid 0)$

4.1. Teilaufgabe a). Der Verlauf der Straße 3 war in selbstständiger Schülerarbeit zu ermitteln, was ohne Probleme verlief, da es sich hierbei um eine lineare Funktion handelte.

$S, P \in g \Rightarrow m_g = \dfrac{4-0}{4,5-6,5} = -2 \Rightarrow g(x) = -2x + n$
Mit $P(6,5 \mid 0) \in g$ folgt dann: $n = 13$ und somit

$$\underline{\underline{g(x) = -2x + 13}}$$

Der Verlauf der Bahnlinie wurden im Lehrer-Schüler-Gespräch gemeinsam berechnet. Auf Grund der sehr guten Ideen der Schüler gab es auch hier keine weiteren Probleme.

$S \in f(x) \Rightarrow f(4,5) = 4$; weiterhin $f'(4,5) = 0,5$, da die Bahnlinie die Straße 3 senkrecht im Punkt S kreuzt (folgt aus $m_1 \cdot m_2 = -1$)

$f(x) = \sqrt{ax+b} = (ax+b)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert das folgende Gleichungssystem:

I) $4 = \sqrt{4,5a+b}$

II) $0,5 = \dfrac{a}{2\sqrt{4,5a+b}}$.

Einsetzen von Gleichung I in Gleichung II liefert:

$0,5 = \dfrac{a}{2 \cdot 4} \Rightarrow a = 4$.

Durch Einsetzen von a in Gleichung I erhält man den zweiten Parameter:

$4^2 = 4,5 \cdot 4 + b$

$16 = 18 + b \Rightarrow b = -2$

$$\underline{\underline{f(x) = \sqrt{4x-2}}}$$

Der Winkel, der die Änderung der Bewegungsrichtung des Autos beschreibt, lässt sich über den Anstiegswinkel der Straße 3 bestimmen.

$\tan\alpha' = -2 \Rightarrow \alpha' = 63,4°$

Änderung der Bewegungsrichtung: $\underline{\underline{\alpha = 180° - \alpha' = 116,6°}}$

Auch diese Aufgabe konnte von den Schülern selbstständig gelöst werden und wurde nur verglichen.

4.2. Teilaufgabe b). Zur Berechnung der minimalen Entfernung muss zunächst der Punkt B berechnet werden. Dieses Extremwertproblem lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras lösen.

Hauptbedingung: $s^2 = (4-x)^2 + y^2$
Nebenbedingung: $y^2 = [f(x)]^2 = 4x - 2$
Zielfunktion: $s^2(x) = (4-x)^2 + (4x-2) = x^2 - 4x + 14$
Wird s^2 minimal, so auch s.
$[s^2(x)]' = 2x - 4$; $[s^2(x)]'' = 2$
$0 = 2x - 4 \Rightarrow x_E = 2$; Wegen $[s^2(2)]'' = 2 > 0$ ist $x_E = 2$ auch tatsächlich ein lokales Minimum. Der Funktionswert von B ergibt sich durch Einsetzen in die Funktion f, also $f(2) = \sqrt{4 \cdot 2 - 2} = \sqrt{6} \Rightarrow \underline{\underline{B(2 \mid \sqrt{6})}}$
Die minimale Entfernung wiederum ergibt sich durch Einsetzen von $x_E = 2$ in $s^2(x)$, also $s^2(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 14 = 10 \Rightarrow s = \sqrt{10} \approx 3,16$

Antwort: Die kleinstmögliche Entfernung zwischen Tunnelausgang und Haltestelle beträgt 316 Meter.

Das Aufstellen der Haupt- und Nebenbedingung sowie der Zielfunktion erfolgte im Lehrer-Schüler-Gespräch. Die Berechnung der Koordinaten des Haltestellenpunktes sowie das Ausrechnen der minimalen Entfernung gelang den Schülern in selbstständiger Arbeit.

Ebenfalls in selbstständiger Arbeit gelang den Schülern das Aufstellen der Tangentengleichung im Punkt B.

$$m_t = f'(2) = \frac{4}{2\sqrt{4 \cdot 2 - 2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$B \in t \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot 2 + n \Rightarrow n = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\underline{\underline{t : y = \frac{1}{3}\sqrt{6}x + \frac{1}{3}\sqrt{6}}}$$

Zur näherungsweisen Berechnung der Kreuzung des Zugangsweges mit der Straße 3 berechnet man einfach die Wurzeln in der Tangentengleichung auf einige Dezimalen genau. Ein Weiterrechnen mit den Wurzeln ist sicherlich auch möglich, steigert den Rechenaufwand jedoch erheblich. Der Ort der Kreuzung ergibt sich dann aus dem Schnittpunkt des Zugangsweges mit der Straße 3. Auch diese Aufgabe konnten die Schüler eigenständig lösen.

Näherungsweise gilt für die Tangente t: $y = 0,816x + 0,816$. Die Koordinaten der Kreuzung K ergeben sich aus der Bedingung $K = t \cap g$, also

$$0,816x + 0,816 = -2x + 13 \Rightarrow x = 4,32 \Rightarrow g(4,32) = 4,36.$$

$$\underline{\underline{K(4,32 \mid 4,36)}}$$

Antwort: Die Kreuzung befindet sich 432 m östlich und 436 m nördlich vom Punkt O.

4.3. Teilaufgabe c). Zur Berechnung der Koordinaten des gesuchten Punktes Z ist die Integralrechnung anzuwenden. Auf Grund des Hinweises ist dabei aber nur das Integral unter der Bahnlinie zu beachten. Zunächst ist jedoch die untere Integrationsgrenze zu bestimmen, die sich aus der Nullstelle der Funktion $f(x)$ ergibt. Diese ergibt sich zu $x_0 = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}A = \frac{22}{3} = \int_{\frac{1}{2}}^{u} \sqrt{4x-2}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{u} (4x-2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\frac{22}{3} = \frac{1}{6}\sqrt{(4u-2)^3} - \frac{1}{6}\sqrt{(4\cdot\frac{1}{2}-2)^3} = \frac{1}{6}\sqrt{(4u-2)^3}$$

$$1936 = (4u-2)^3$$

$$u = \frac{1936^{\frac{1}{3}}+2}{4}$$

$$u \approx 3,62 \Rightarrow \underline{\underline{Z(3,62 \mid 0)}}$$

Antwort: Der Punkt Z befindet sich 362 m östlich von O.

5. Methodische Hinweise

- Die Festlegung des Maßstabs mit 1:10.000 ist nicht zwingend, empfiehlt sich jedoch, da es sich dann im Folgenden mit den Einheiten im Koordinatensystem wie gewohnt arbeiten lässt.
- Das Aufstellen der Gleichung der Straße 3 sollte von den Schülern auf jeden Fall in selbstständiger Arbeit durchgeführt werden, da es sich hier nur um eine lineare Funktion handelt und das benötigte Wissen bereits aus Klasse 8 vorhanden sein sollte. Das Herleiten der Funktion für die Bahnlinie ist etwas schwieriger. An dieser Stelle sollte man den Schülern eventuell etwas Zeit lassen, selbst eine Lösung zu finden und nur in angeleitete Schülerarbeit übergehen, wenn sich größere Probleme zeigen sollten. Den Hinweis, dass es sich um eine Aufgabe auf Abiturniveau handelt und die Schüler die Lösung daher eigentlich selbstständig finden sollten, sollte man geben.

- Bei der Winkelberechnung ist mit den Schülern auf jeden Fall zu diskutieren, warum es sich um den größeren der beiden Komplementwinkel handelt und nicht um jenen, der sich aus der Berechnung über den Tangens ergibt. An Hand einer Skizze lässt sich dies gut erläutern.
- Bei der Lösung der Extremwertaufgabe sollte man die Schüler dahin führen, dass sie erkennen, dass auch $s(x)$ minimal wird, wenn dies für $[s(x)]^2$ zutrifft. Man kann zwar auch mit $s(x)$ weiterrechnen, jedoch handelt es sich dabei um eine nicht allzu leichte Wurzelfunktion, was den Rechenaufwand stark erhöht. Des Weiteren sollten die Schüler für das Abitur auch in der Lage sein, solche Sachverhalte zu erkennen und effektiv bei ihren Rechnungen zu nutzen.
- Bei der näherungsweisen Berechnung der Kreuzung des Zugangsweges von der Haltestelle mit der Straße 3 ist vorher mit den Schülern zu vereinbaren, auf wie viele Stellen nach dem Komma die Wurzeln gerundet werden sollen. Dies erleichtert das Vergleichen der Ergebnisse, da sich die Rundungsfehler auf das Ergebnis, d.h. den Schnittpunkt, auswirken.
- Die näherungsweise Bestimmung des Punktes Z kann auch über das Newton-Verfahren erfolgen. Sollte es die Unterrichtszeit erlauben, bietet sich hier eine gute Möglichkeit, diese Art der Nullstellenbestimmung zu wiederholen. Es ist dann die Gleichung $(4u - 2)^3 - 1936 = 0$ zu lösen.
- Da es sich bei den meisten Teilaufgaben um Anwendungsaufgaben handelt, sind durch die Schüler im Allgemeinen auch Antwortsätze zu formulieren.
- **Auswertung im Sinne der Modellbildung:**
  Im Anschluss an jede Teilaufgabe wurde mit den Schülern der Modellbildungskreislauf noch ein Mal durchgegangen. Aufgabe der Schüler war es hierbei, einen Bezug zwischen diesem Kreislauf und der eben behandelten Aufgabe herzustellen. Es zeigte sich dabei, dass die Schüler diesen Bezug nicht direkt herstellen und sich nicht von der Aufgabe lösen konnten, obwohl die Anweisung des Lehrers dies konkret vorschrieb. ("Erläutert die Phasen des Modellbildungkreislaufs an Hand der eben behandelten Aufgabe.")
  Erst nach einigen Hinweisen durch die Lehrkraft konnten die Schüler konkret erläutern, an welcher Stelle ein mathematisches Modell zum Tragen kam und welche Fehler es aufweisen könnte (z. B. Vernachlässigung der Breite der Straßen).

KAPITEL 2

Überdachung einer Tribüne

1. Aufgabenstellung

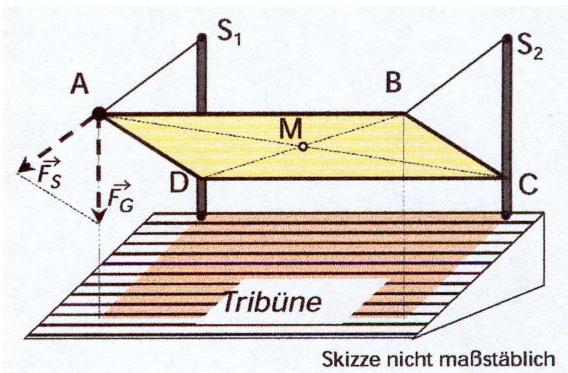
Aufgabe 1. ***In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte*** $A(6 \mid -12 \mid 22)$***,*** $B(38 \mid 4 \mid 22)$ ***und*** $M(19 \mid 2 \mid 19)$ ***sowie die Ebene*** $E_1: 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 65 = 0$ ***gegeben.***

a) ***Die Punkte A, B und M bestimmen eine Ebene*** E_2***.***
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_2 ***und bestimmen Sie das Gradmaß des Winkels, den diese Ebene mit der*** x_1x_2***-Ebene einschließt.***

(Mögliches Ergebnis zur Kontrolle: $E_2: -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 80 = 0$***)***

b) ***Die Punkte A und B seien Eckpunkte, der Punkt M sei Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms ABCD.***
Ermitteln Sie die Koordiaten der Punkte C und D und zeigen Sie, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck ist.

Das Dach über dem Teilbereich einer Tribüne sei durch das in Aufgabe b) genannte Rechteck ABCD beschrieben. Die x_1x_2***-Ebene sei die Horizontalebene. In den Punkten C und D ist das Dach an zwei senkrecht (bzgl. der Horizontalebene) stehenden Masten befestigt. Von den Punkten*** $S_1(0 \mid 0 \mid 26)$ ***und*** $S_2(32 \mid 16 \mid 26)$ ***der Masten führt jeweils ein Befestigungsseil zum Punkt A bzw. zum Punkt B. Die Tribüne liegt in der Ebene*** E_1***. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.***



c) ***Im Punkt M soll ein Kontrollgerät installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Abstand zur Tribüne von mindestens 9 m vorgeschrieben.***
Prüfen Sie, ob diese Vorschrift erfüllt wird.

d) ***Berechnen Sie den Inhalt der überdachten Fläche.***
(Hinweis: Ermitteln Sie zunächst die Eckpunkte A', B', C' und D' der überdachten Fläche.)

Erläutern Sie kurz, wie sich die Größe des Winkels zwischen Dach und Tribüne auf die überdachte Fläche auswirkt.

e) ***Aus ästhetischen Gründen soll die Dachfläche begrünt werden. Das Wachstum des Grases kann dabei durch eine Funktion der Form***

$$f_a(t) = \frac{2e^{at}}{e^{at} + 29}$$

beschrieben werden, wobei $f(t)$ ***die Höhe (in dm) des Grases zur Zeit*** t ***bedeutet. (***$a \in \mathbb{R}, a > 0, 0 \leq t \leq 200$, t ***in Tagen)***
Es ist bekannt, dass die verwendete Grassorte nach 10 Tagen im Durchschnitt eine Höhe von 1 cm aufweist.
Weisen Sie nach, dass für den Parameter $a \approx 0{,}04$ ***gilt.***

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Grases am größten ist.
(Teilergebnis zur Kontrolle: $[f_{0,04}(t)]'' = \dfrac{0{,}0928e^{0{,}04t}(29 - e^{0{,}04t})}{(e^{0{,}04t} + 29)^3}$***)***

Erläutern Sie die Grenzen dieser mathematischen Modellbildung.

f) ***Auf Grund der im Punkt A angreifenden Gewichtskraft, die einen Betrag von***
$|\vec{F}_G| = 10.000$ N ***hat, ist es erforderlich, für die Befestigungsseile eine bestimmte Materialsorte auszuwählen.***
Berechnen Sie die auf die Seile wirkende Zugkraft $\vec{F}_S$ ***und begründen Sie, für welches der folgenden Materialien Sie sich entscheiden würden.***

Material	*Zugfestigkeit (in N)*
1	10.000
2	14.000
3	15.000

(Hinweis: Die Kraft $\vec{F}_G$ lässt sich in eine Komponente, die in Richtung der Seile wirkt ($\vec{F}_S$) und in eine Komponente, die in Richtung des Punktes D wirkt ($\vec{F}_D$), zerlegen.)

2. Lernziele

Wissensziele: Die Schüler kennen...

- funktionelle Zusammenhänge und den Funktionsbegriff;
- verschiedene Darstellungen von Ebenen und Geraden;
- kennen die Modellbildung als Erkenntnismethode.

Könnensziele: Die Schüler...

- können Ebenengleichungen bestimmen;
- sind in der Lage, Winkel zu berechnen;
- können Abstände sowie Flächeninhalte berechnen;
- können den Parameter einer Funktionenschar aus gegebenen Werten ermitteln;
- können die Mittel der Analytischen Geometrie auf außermathematische Sachverhalte anwenden.

3. Fachwissenschaftliche Grundlagen

Auch bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine ehemalige Prüfungsaufgabe aus Sachsen-Anhalt. Der Teil, der sich mit analytischer Geometrie beschäftigt, stammt dabei aus dem LK-Abitur 2000, die Exponentialfunktion stammt aus dem Analysis-Teil von 2004 (ebenfalls LK).

Zur Lösung der gesamten Aufgabe müssen die Schüler hauptsächlich mit Ebenen umgehen sowie diese in verschiedenen Darstellungsformen berechnen können. Des Weiteren sollten die Schüler in der Lage sein, Abstände zu ermitteln, wobei die Hessesche Normalenform nicht unbedingt bekannt sein muss, jedoch die Berechnung eines Abstandes zwischen Punkt und Ebene erleichtert.

Die Teilaufgabe, die sch mit dem Wachstum des Grases beschäftigt, beinhaltet eine Exponentialfunktion. Zum Lösen der Aufgabe sollten also entsprechende Fähigkeiten zum Differenzieren von Exponentialfunktionen vorhanden sein.

Zum fächerübergreifenden Wissen gehört hierbei das Hintergrundwissen über Kräfte. Die Schüler müssen zwar keine genauen physikalischen Kenntnisse besitzen, sollten jedoch schon wissen, wie man mathematisch Kräfte als Vektoren behandelt und dass man Kräfte - wie auch „normale“ Vektoren - in verschiedene Komponenten, d.h. Teilkräfte, zerlegen kann.

4. Didaktische Reflexion

4.1. Stundeneinstieg - Herleitung der Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion. Da den Schülern das Wissen zur Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion bis hierhin fehlte, dies zur Lösung der Teilaufgabe e) jedoch notwendig war, wurde dies zunächst im Lehrer-Schüler-Gespräch besprochen.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} \\ &= e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} \end{aligned}$$

h	0,1	0.01	0,001	0,0001
$\frac{e^h-1}{h}$	1,0517...	1,005...	1,0005...	1,00005...

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x}}$$

Beispiele:

(1) $f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$

(2) $f(x) = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

4.2. Teilaufgabe a). Zunächst war eine Gleichung der Ebene E_2 durch die Schüler in selbstständiger Arbeit zu ermitteln. Ein Vergleich fand an der Tafel statt. Weiterhin konnten die Schüler auch den gesuchten Winkel selber bestimmen.

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 22 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ 96 \\ 240 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -48x_1 + 96x_2 + 240x_3 = -d$$

$$A \in E_2 \Rightarrow d = -3840$$

Mit Division durch 48 folgt dann die Ebenengleichung, die auch als Kontrollergebnis gegeben ist:

$$\underline{\underline{E_2 : -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 80 = 0}}$$

Der Winkel berechnet sich wie folgt:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{E_2} \bullet \vec{n}_{x_3=0}|}{|\vec{n}_{E_2}| \cdot |\vec{n}_{x_3=0}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{30} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

$$\underline{\underline{\alpha \approx 24,09^\circ}}$$

4.3. Teilaufgabe b). Die Ermittlung der übrigen Punkte des Vierecks sowie der Nachweis, dass ABCD ein Rechteck ist, erfolgte zwar im Lehrer-Schüler-Gespräch, jedoch kamen die Lösungsideen allein von den Schülern.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 22 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C(32 \mid 16 \mid 16)}}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 38 \\ 4 \\ 22 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -19 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D(0 \mid 0 \mid 16)}}$$

Das Parallelogramm ABCD ist genau dann ein Rechteck, wenn die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ senkrecht aufeinander stehen. Dies ist der Fall, wenn $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = 0$ gilt.

$$\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = 32 \cdot (-6) + 16 \cdot 12 + 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Das Parallelogramm ABCD ist ein Rechteck.

4.4. Teilaufgabe c). Da die Hessesche Normalenform den Schülern bekannt war, waren sie in der Lage, darüber den gesuchten Abstand zu berechnen.

$$E_1 : \frac{2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 65}{\sqrt{45}} = 0$$

$$d(M, E_1) = \frac{2 \cdot 19 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 19 - 65}{\sqrt{45}} = \frac{60}{\sqrt{45}} \approx 8{,}944 < 9$$

Antwort: Der Abstand erfüllt nicht die technischen Bedingungen, da er um etwa 6 cm zu klein ist.

4.5. Teilaufgabe d). Zur Berechnung des Flächeninhaltes der überdachten Fläche war es zunächst Aufgabe der Schüler, die Eckpunkte dieser Fläche zu bestimmen. Auch hier fanden die meisten Schüler einen Ansatz. Die ersten beiden Punkte wurden im Lehrer-Schüler-Gespräch bestimmt, die restlichen beiden durch die Schüler ins selbstständiger Arbeit. Die Berechnung des Flächeninhaltes selbst gelang auch den meisten Schülern, wobei verschiedene Schüler unterschiedliche Methoden verwendeten. Einige nutzten das Kreuzprodukt, einige andere berechneten zunächst zwei Seitenlängen. (Im Folgenden ist nur die Methode über das Kreuzprodukt beschrieben.)

Da die Punkte A', B', C' und D' die senkrechten Projektionen der Punkte A, B, C und D sind und in der Ebene E_1 liegen, gilt zum Beispiel für den Punkt A': $A'(6 \mid -12 \mid x_3{}') \in E_1$. Einsetzen des Punktes in die Ebene liefert $2{\cdot}6{+}4{\cdot}12{+}5x_3{}' = 65$ und somit $x_3{}' = 1$. Der Punkt B' liegt auf derselben Höhenlinie wie A' und somit ist auch die $x_3{}'$-Koordinate von B' gleich 1.

$$\Rightarrow \underline{\underline{A'(6 \mid -12 \mid 1)}}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{B'(38 \mid 4 \mid 1)}}$$

Durch die Bedingung $D'(0 \mid 0 \mid x_3{}') \in E_1$ ergeben sich dann auch die übrigen zwei Punkte.

$$\Rightarrow \underline{\underline{C'(32 \mid 16 \mid 13)}}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{D'(0 \mid 0 \mid 13)}}$$

Die Fläche ergibt sich aus

$$A = |\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'D'}| = \left| \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 192 \\ -384 \\ 480 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{414720}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A \approx 644 \text{ m}^2}}$$

Vergrößert sich der Winkel zwischen Dach und Tribüne, so nimmt die überdachte Fläche ab.

4.6. Teilaufgabe e). Da die gesamte Aufgabe in einer Doppelstunde nicht zu schaffen war, wurde in der nächsten Woche an dieser Stelle fortgesetzt.

Zunächst wurde mit den Schülern besprochen, wie man vorgehen muss, um den Zeitpunkt zu bestimmen, an dem die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist. Zwar erkannten die meisten Schüler, dass es sich hier um eine Extremwertaufgabe handelte, verstanden jedoch zunächst nicht, warum der Wendepunkt der Funktion gesucht ist. Im Lehrer-Schüler-Gespräch wurde dann geklärt, dass die maximale Wachstumsgeschwindigkeit der maximalen Änderungsrate der Höhe des Grases entspricht. Die Änderungsrate wiederum ist charakterisiert durch die erste Ableitung der Funktion. Es ist also nicht der Extremwert der Funktion selbst, sondern der Extremwert der ersten Ableitung gesucht, der aber mit

dem Wendepunkt der Funktion gleich zu setzen ist. Die Lösung der gesamten Aufgabe wurde mit den Schülern zusammen an der Tafel entwickelt.
Die Aufgabe zu den Grenzen der mathematischen Modellbildung des Graswachstums wurde mit den Schülern diskutiert. Sie erkannten dabei sehr gut, dass die gegebene Funktion nur das mittlere Wachstum beschreiben kann und das Wachstum des Grases beispielsweise wetterabhängig ist oder es sein kann, dass es zwischendurch gemäht wurde.

$$f_a(t) = \frac{2e^{at}}{e^{at}+29}$$

$$u(t) = 2e^{at} \qquad u'(t) = 2ae^{at}$$
$$v(t) = e^{at}+29 \qquad v'(t) = ae^{at}$$

$$f_a{}'(t) = \frac{2ae^{at}(e^{at}+29) - 2e^{at}ae^{at}}{(e^{at}+29)^2} = \frac{2ae^{2at}+58ae^{at}-2ae^{2at}}{(e^{at}+29)^2} = \frac{58ae^{at}}{(e^{at}+29)^2}$$

$$u(t) = 58ae^{at} \qquad u'(t) = 58a^2e^{at}$$
$$v(t) = (e^{at}+29)^2 \qquad v'(t) = 2ae^{at}(e^{at}+29)$$

$$\begin{aligned} f_a{}''(t) &= \frac{58a^2e^{at}(e^{at}+29)^2 - 58ae^{at}\cdot 2ae^{at}(e^{at}+29)}{(e^{at}+29)^4} = \frac{58a^2e^{2at}+1682a^2e^{at}-116a^2e^{2at}}{(e^{at}+29)^3} \\ &= \frac{1682a^2e^{at}-58a^2e^{2at}}{(e^{at}+29)^3} = \frac{58a^2e^{at}(29-e^{at})}{(e^{at}+29)^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{0,04}{}''(t) = \frac{0,0928e^{0,04t}(29-e^{0,04t})}{(e^{0,04t}+29)^3}$$

Die Wendestelle erhält man aus der Nullstelle der zweiten Ableitung, also

$$\begin{aligned} f_{0,04}{}''(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0,0928e^{0,04t}(29-e^{0,04t}) = 0 \Leftrightarrow 29 - e^{0,04t} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{0,04t} = 29 \Leftrightarrow 0,04t = \ln 29 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 29}{0,04} \approx 84 \end{aligned}$$

Antwort: Am 84. Tag ist die Wachstumsgeschwindigkeit maximal.

4.7. Teilaufgabe f). Zwar mangelte es den Schülern bei dieser Aufgabe nicht an Lösungsvorschlägen, jedoch zeigte sich, dass ihnen die Verknüpfung zwischen Mathematik und Physik nicht richtig gelang. Die meisten Ansätze der Schüler legten die Beziehung $F = m \cdot a$ zu Grunde, was hier jedoch nicht zur Lösung führt. Die Schüler kamen nicht auf die Idee, dass man die Gewichtskraftkraft in ihre Komponenten zerlegen und einfach wie „normale“ Vektoren behandeln kann und somit zu einem mathematischen Modell übergeht.

Daher wurde auch diese Aufgabe im Lehrer-Schüler-Gespräch unter Verwendung der Tafel gelöst.

$$\begin{aligned}\vec{F}_G &= \vec{F}_S + \vec{F}_D = \mu\overrightarrow{S_1A} + \lambda\overrightarrow{AD} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10000 \end{pmatrix} &= \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Man erhält folgendes LGS:

$$\begin{aligned} 6\mu - 6\lambda &= 0 \\ -12\mu + 12\lambda &= 0 \\ -4\mu - 6\lambda &= -10000 \end{aligned}$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung folgt $\mu = \lambda$, was in die dritte Gleichung eingesetzt

$$\begin{aligned} -4\mu - 6\mu &= -10000 \\ -10\mu &= -10000 \\ \mu &= 1000 \end{aligned}$$

liefert. Den Betrag der Kraft $\vec{F}_S$ erhält man dann aus

$$\begin{aligned} |\vec{F}_S| &= \left| 1000 \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 6000 \\ -12000 \\ -4000 \end{pmatrix} \right| \\ &= \underline{\underline{14000 \text{ N}}} \end{aligned}$$

Antwort: Material 2 würde zwar genügen, jedoch sollte man auf Nummer sicher gehen und sich für Material 3 entscheiden, da zum Beispiel die Zugkräfte auf die Seile durch Wind und Wetter verstärkt werden könnten.

5. Methodische Hinweise

- Die Aufgabe wurde gezielt aus Elementen der Analysis als auch der Analytischen Geometrie zusammengesetzt, um die Schüler auf das Abitur vorzubereiten, da sie dort ebenfalls zwischen den verschiedenen Gebieten der Mathematik umdenken müssen.
- Die ersten beiden Teilaufgaben sollten die Schüler eigentlich selbstständig lösen können, da es sich hier nur um Aufgaben aus dem Anforderungsbereich I handelt. Es genügt, die Ergebnisse im Anschluss zu vergleichen oder einen Schüler zu bitten, seine Ergebnisse an der Tafel vorzustellen. Bei Aufgabe b) sollte man mit den Schülern noch ein Mal diskutieren, warum es genügt zu zeigen, dass zwei Seiten senkrecht aufeinander stehen.
- Bei der Berechnung des Abstandes (Aufgabe c)) gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Kennen die Schüler die Hessesche Normalenform, so ist die Ermittlung des Abstandes vergleichsweise einfach. Eine zweite Möglichkeit liefert die Lösung über die Ermittlung des Lotfußpunktes, wenn man das Lot des Punktes M auf die Ebene E_1 fällt. Diese Rechnung ist zwar aufwändiger, sollte aber zumindest qualitativ besprochen werden.
- Auch bei Aufgabe d) gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Zum Einen kann man die Projektionspunkte über den Schnitt des Lotes des jeweiligen Punktes mit der Tribünenebene bestimmen. Zum Anderen gibt es aber auch die unter Punkt 3.5 angeführte Variante. In der durchgeführten Unterrichtsstunde kamen die Schüler auf beide Varianten. Als Lehrer sollte man dann die Schüler aber auch dahin führen, dass sie die elegantere Methode verwenden, um sich Rechaufwand zu sparen.
- Die gegebene Exponentialfunktion stammt aus der LK-Abiturprüfung Sachsen-Anhalt 2004. Dies war eine vergleichsweise schwere Funktion. Empfehlenswert ist daher die Lösung dieser Aufgabe im Lehrer-Schüler-Gespräch. Man sollte allerdings nicht vergessen, die Schüler darauf hinzuweisen, dass der Nachweis der Extremstelle (der ersten Ableitung) bzw. der Wendestelle eigentlich erfolgen müsste, d.h. die hinreichende Bedingung ist zu überprüfen. Dies kann entweder über die dritte Ableitung geschehen oder man nutzt das Vorzeichenwechselkriterium. Nur aus Zeitgründen wurde dieser Nachweis weggelassen.
- Bei der Bearbeitung der letzten Teilaufgabe zeigte sich, dass die Schüer die Verknüpfung zwischen Mathematik und Physik nicht richtig herstellen konnten. Der Begriff "Kraft" ist für die Schüler etwas Physikalisches und daher kamen auch nur Lösungsvorschläge über das Newtonsche Grundgesetz, d.h. das fächerübergreifende

Denken der Schüler ist nicht hinreichend ausgeprägt. Selbst die Schüler der Klasse, die auch Physik belegen, konnten sich nicht von der physikalischen Denkweise lösen. Der Ansatz über die Zerlegung der Gewichtskraft in die beiden Komponenten und das Aufstellen eines Gleichungssystems ist nämlich ein rein mathematischer, d.h. es ist ein mathematisches Modell. Nach dem Aufstellen des Gleichungssystems jedoch waren die Schüler in der Lage, den Rest der Aufgabe selbstständig zu bearbeiten.

- Da es sich bei dieser Aufgabe ebenfalls wieder um eine Anwendungsaufgabe handelte, sollten auch hier nicht die Antwortsätze vergessen werden.
- **Auswertung im Sinne der Modellbildung:**
  Auch hier wurde wieder nach jeder Teilaufgabe, die ein mathematisches Modell zu Grunde legte (also zum Beispiel nicht bei Aufgabe a) und b), die rein mathematische Aufgaben sind), versucht, eine Verknüpfung zum Modellbildungsprozess herzustellen. Anders als bei der Geländeplanung gelang es den Schülern hier deutlich besser, einen Bezug zu den einzelnen Phasen und Aktivitäten der mathematischen Modellierung herzustellen. Insbesondere bei der Aufgabe zur Begrünung des Daches waren die Schüler in der Lage, Fehler und Unzulänglichkeiten des Modells anzuführen. Bemerkenswert ist dabei vor allem die Tatsache, dass die Schüler Fehler des Modells sehr wohl erkennen, jedoch nicht das Modell selbst in Frage stellen. (“Wieso beschreibt die gegebene Funktion überhaupt das Graswachstum? Kann man mit dieser Ebenengleichung tatsächlich die Tribüne beschreiben?“) Um die Schüler zu befähigen, auch ein gesamtes Modell zu hinterfragen und gegebenenfalls selbst en neues aufzustellen, könnten kommende Unterrichtsstunden konkret auf dieses Ziel hin geplant werden.

KAPITEL 3

Vom Fliegen

1. Lernziele und didaktische Vorbetrachtungen

Lernziele: Die Schüler kennen

- die Grundlagen der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie (Gaußverfahren, Geradengleichungen, Ebenen und deren geometrische Festlegung durch Geraden oder Punkte, Skalarprodukt, Winkelbestimmung, Kreisbogen),
- physikalische Grundgesetze der Kinematik, Bewegungsgleichungen für gleichförmige Bewegung $\vec{s} = \vec{s}_0 + t\vec{v}$.

Könnensziele: Die Schüler können

- ihr mathematisches Wissen auf einen physikalischen / technischen Sachverhalt anwenden,
- Modelle in verschiedenen Repräsentationsformen aufstellen und bewerten (verbal, symbolisch, mathematisch),
- Zusammenhänge zwischen den einzelnen Modellen herstellen,
- Geradengleichungen in Parameterform aufstellen und graphisch darstellen,
- Gaußverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen anwenden.

In der Unterrichtseinheit werden die Grundbegriffe der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie auf Flugobjekte übertragen. Dabei ergeben sich neue Fragestellungen und Sachzusammenhänge, wie Flugpositionen nach Kursänderungen, Flugebenen und deren Festlegung durch Orientierungspunkte oder Geraden, Lagebeziehungen von Flugrouten und Flugebenen. So macht die Unterrichtseinheit den Sinn und die Effizienz der Fachmethoden der Analytischen Geometrie unmittelbar deutlich. Eine zusätzliche Motivation wird erreicht, indem reale Probleme des modernen Flugwesens aufgegriffen werden.

Methodisch wird besonders darauf geachtet, dass die Sachzusammenhänge auch geometrisch präsentiert werden können. So wird im Kursraum ein Koordinatensystem eingeführt, in dem Flugpositionen und Flugrouten visualisiert werden können. Damit wird den Schülern geholfen, sich über dreidimensionale Geraden- und Ebenengleichungen eine Vorstellung zu machen, welches den Schüler relativ schwierig fällt.

Die Aufgaben sind so angelegt, dass die Schüler selbstständig bzw. in Partnerarbeit die Aufgaben lösen können. Damit wird eine Gelegenheit zur eigenständigen Entwicklung von Ideen im Sinne des entdeckenden Lernens und eine Wiederholung der grundlegenden Begriffe geschaffen.

Im folgenden werden die Aufgaben dargestellt und kurz kommentiert.

AUFGABE 1. ***Nach dem Start eines Flugzeuges wird dieses durch die Leitstelle im Punkt*** A ***mit den Koordinaten*** $A(10 \mid 0 \mid 5)$ ***geortet. Nach einer Stunde befindet sich das Flugzeug im Punkt*** B ***mit den Koordinaten*** $B(10 \mid 10 \mid 5)$***. Beschreiben Sie die Route des Flugzeuges.***

Die Aufgabe 1 dient zur Festigung des Wissens der Schüler in Hinsicht auf die verschiedenen Modellbildungskategorien (verbalisiertes, symbolisches und mathematisches Modell). Die Schüler sollen die Aufgabe in diesen Kategorien lösen.
Ferner hat die Aufgabe einführenden Charakter in die Begriffe des Kursraumes, der Flugrouten und Grundlagen der Kinematik und dient als Wiederholung grundlegender Begriffe der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie (Parameterform einer Geraden, Zweipunktegleichung einer Geraden ...).

AUFGABE 2. ***Ein Flugzeug fliegt auf der Flugroute***

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei gibt der Parameter t ***die Zeit in*** s ***an.***

a) ***Die Leitstelle soll das Flugzeug im Kursraum orten.***
b) ***Geben Sie an, wo sich das Flugzeug in 2 s befindet und wo es sich vor 4 s befand.***
c) ***Am Punkt*** C ***mit den Koordinaten*** $C(6 \mid 7 \mid 8)$ ***befindet sich ein zweites Flugzeug. Kommt es zur Kollision?***

Die Aufgabe 2 dient zur Festigung der grundlegenden Begriffe, welche in der Aufgabe 1 eingeführt wurden.

AUFGABE 3. ***In dem Punkt** B **mit dn Koordinaten** $B(0 \mid 10 \mid 0)$ **sind Bergsteiger in Not geraten. Um die Bergung einzuleiten, wird ein Hubschrauber der Bergwacht angefunkt, der sich auf dem Plateau der Bergwacht im Punkt** $A(10 \mid 0 \mid 5)$ **befindet. Die Koordinaten seien in Kilometer angegeben.***

a) ***Orten Sie die Positionen des Hubschraubers und der in Not geratenen Bergsteiger im Koordinatensystem des Kursraumes und beschreiben Sie die Lagen.***
b) ***Wie weit ist der Hubschrauber von der Unglücksstelle entfernt?***
c) ***Wie lange braucht der Hubschrauber, um die in Not geratenen Bergsteiger zu erreichen, wenn er mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 220 km/h fliegt?***

Möchte man den Abstandsbegriff einführen, so bietet sich die Aufgabe 3 an. Durch ein symbolisches Modell wird zunächst die Flugroute des Hubschraubers ermittelt. Die Mathematisierung besteht nun darin, den Abstand von A nach B zu ermitteln, woraus die Flugzeit des Hubschraubers ermittelt werden kann.

AUFGABE 4. ***Ein Helikopter bewegt sich vom Punkt** $A(10 \mid 20 \mid 0.2)$ **in Richtung des Punktes** $B(40 \mid 40 \mid 0.2)$ **und gleichzeitig ein Helikopter 2 von Punkt** B **in Richtung des Punktes** $D(5 \mid 35 \mid 0.15)$**. Dabei werden die Helikopter als punktförmige Objekte angesehen und die Flugroute seien geradlinig.***
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer.

a) ***Helikopter 1 soll auf Hälfte der Strecke** $\overline{AB}$**, im Punkt** M**, seinen Kurs ändern, da sich Nebel gebildet hat. Die Lage der Nebelfront kann in dem zu betrachtenden Bereich durch die nachfolgend genannte Gleichung einer Ebene** E **beschrieben werden:***

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 14.2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Der Helikopter fliegt nun von M aus über $C(25 \mid 45 \mid 0.25)$ nach B. Berechnen Sie die Länge des durch die Kursänderung zusätzlich zurückgelegten Weges.

b) ***Ermitteln Sie das Gradmaß des Winkels zwischen dem ursprünglichen und dem geänderten Kurs im Punkt M.***

c) ***Zeigen Sie, dass ein Zusammenstoß der beiden Helikopter auf dem neuen Kurs des Helikopters 1 ausgeschlossen ist.***

Bei der Aufgabe 4 handelt es sich um eine Abituraufgabe aus dem Bundesland Sachsen-Anhalt, welche in einem Grundkurs geschrieben wurde. Es handelt sich dabei um eine komplexe Aufgabenstellung, welche unterschiedlichste Inhalte der Analytischen Geometrie miteinander verknüpft. Diese sind

- Mittelpunktsbestimmung,
- Abstandsbegriffe,
- Skalarprodukte,
- Winkelbestimmung und
- Beweisführung.

Die Schüler sollen, bei dieser Aufgabe, die Modellbildung selbstständig entwickeln. Dabei wird die Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln und die Fähigkeit verschiedener Sichtweisen auf Modellbildungsperspektiven gefestigt.

AUFGABE 5. ***Beim Besteigen eines Berges gerät eine Seilschaft in Not und funkt nach Hilfe. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer.***

a) ***Die Funksignale werden von der Bergwacht, die sich im Ursprung eines Koordinatensystems befindet, aus Richtung***

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und von einem Hubschrauber H_1 ***im Punkt*** $H_1(-2 \mid 26 \mid 1)$ ***aus der Richtung***

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgenommen. Berechnen Sie die Koordinaten S ***der Unglücksstelle!***

b) ***Die beiden Hubschrauber*** H_1 ***und*** H_2***, letzterer befindet sich im Punkt*** $H_2(0 \mid 20 \mid 1.5)$***, werden zum Unglücksort geschickt.*** H_2 ***kontrolliert an seinem Standpunkt die angegebenen Koordinaten von*** S ***und startet dann mit 30 s Verspätung.***

- ***In welcher Richtung findet*** H_2 ***die Seilschaft?***
- ***Nach welcher Zeit treffen beide bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von*** $v = 200$ ***km/h bei*** S ***ein?***

c) ***Ein dritter Hubschrauber*** H_3 ***befindet sich auf einem Routineflug und empfängt den SOS-Ruf am Punkt*** $H_{3,1}(21 \mid 17 \mid 2.65)$***. Von dort aus fliegt er mit Kurs***

$$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2.35 \end{pmatrix}$$

auf der Geraden g ***zum Punkt*** $H_{3,2}(x_1 \mid x_2 \mid 5)$***, den er nach 2 min erreicht.***

Am Punkt $H_{3,2}$ ***schwenkt er auf eine kreisförmige Kreisbahn zum Punkt*** S ***ein, um das Bergmassiv zu umfliegen. Der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve hat die Koordinaten*** $M_k(13 \mid 14 \mid 5)$***. Berechnen Sie die gesamte Flugzeit, wenn*** H_3 ***die Durchschnittsgeschwindigkeit von*** $H_{3,1}$ ***nach*** $H_{3,2}$ ***auf der gesamten Strecke beibehält!***

d) ***Während*** H_1 ***und*** H_2 ***von*** S ***aus zur Leitstelle fliegen, steuert*** H_3 ***zunächst das Basislager*** $B^\star$ ***an, welches sich in 1000 m Höhe auf einer Wiesenfläche befindet. Die Wiese hat die Form eines unregelmäßigen Vierecks mit den Eckpunkten*** $A(7.5 \mid 8 \mid 1)$***,*** $B(7.5 \mid 8.5 \mid 1)$***,*** $C(7 \mid 7.75 \mid 1)$ ***und*** $D(8.25 \mid 8.25 \mid 1)$***. Auf direktem Flug ist*** $B^\star$ ***nicht zu erreichen. Deshalb fliegt*** H_3 ***1.3 km weit zum Punkt*** P ***mit***

$$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -2.4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dort ändert er seinen Kurs zu

$$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ -2 \\ -3.5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass er auf diese Weise einen Punkt auf der Wiese erreicht!

Bei der Aufgabe 5 handelt es sich um eine komplexe Aufgabenstellung, welche verschiedenste Inhalte der Analytischen Geometrie verknüpft. Diese sind

- Geradengleichungen, Ebenengleichungen,
- Physikalische Grundbegriffe (Geschwindigkeit, Zeit),
- Skalarprodukte,
- Winkelbestimmung und
- Kreisbewegung, Kreisbogen.

Aufgabe 6. ***Auf einem Flug nach Hawai werden von einem Tower zwei Flugzeugen die folgenden Flugrouten zugewiesen:***

$$\vec{s}_r = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R} \textbf{ und } \vec{s}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) ***Zeigen Sie, dass die Flugrouten parallel verlaufen.***

b) ***Wie kann die Flugebene, die durch die Flugrouten festgelegt wird, beschrieben werden?***

c) ***Warum wird durch die Flugrouten keine Flugebene festgelegt, wenn an Stelle der zweiten Flugbahn ein Flugzeug auf der Route***

$$\vec{s}_s = \begin{pmatrix} -9 \\ -24 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

fliegt?

d) ***Welche Gefahr besteht in diesem Fall?***

<u>Hinweis:</u> Schreiben Sie bitte zu jeder Aufgabe, welche Phasen der Modellbildung Sie zum Lösen der jeweiligen Aufgabe benutzt haben (verbalisiertes Modell, mathematisches Modell, symbolisches Modell ...).

Als Abschluss kann die Aufgabe 6 dienen. In dieser werden die grundlegenden Kompetenzen der Schüler im Modellbildungsprozess überprüft. Aus diesem Grund wurde die Aufgabe mathematisch einfach gehalten, sodass keine fachlichen Schwierigkeiten auftreten und die Schüler sich auf den Modellbildungsprozess konzentrieren können. Ferner kann bei dieser Aufgabe die Entwicklung der Metareflexion über die Modellbildung überprüft werden. Die Schüler haben niveaustufencharakterisierende Fähigkeiten erworben, wenn sie die Fähigkeit besitzen,

- über Anwendungen der Mathematik zu reflektieren,
- den Modellbildungsprozess kritisch zu analysieren,
- den Anlass von Modellbildung nachvollziehen können,
- Kriterien der Modellbildungsevaluation zu charakterisieren.

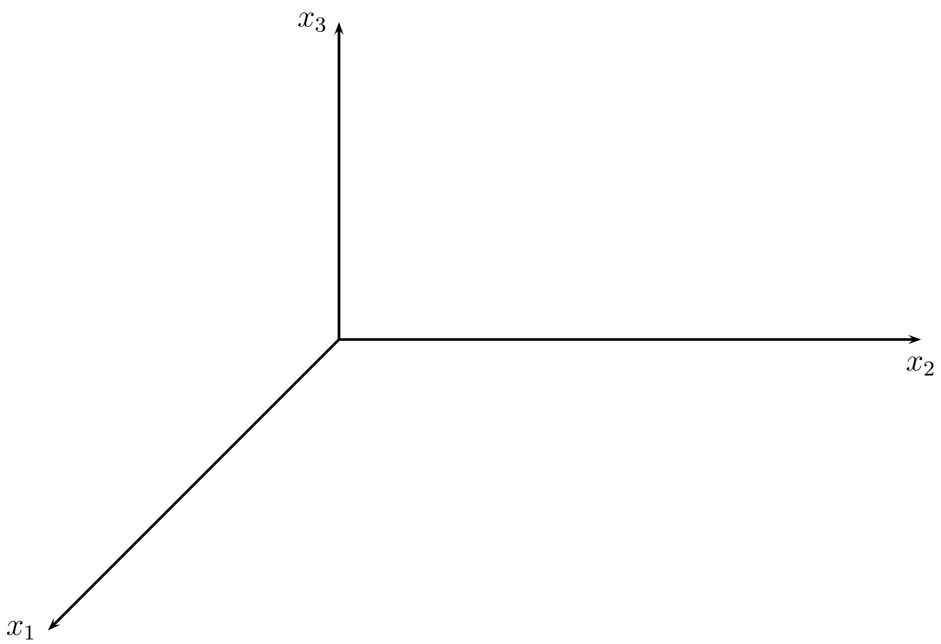
2. Didaktische Reflexion

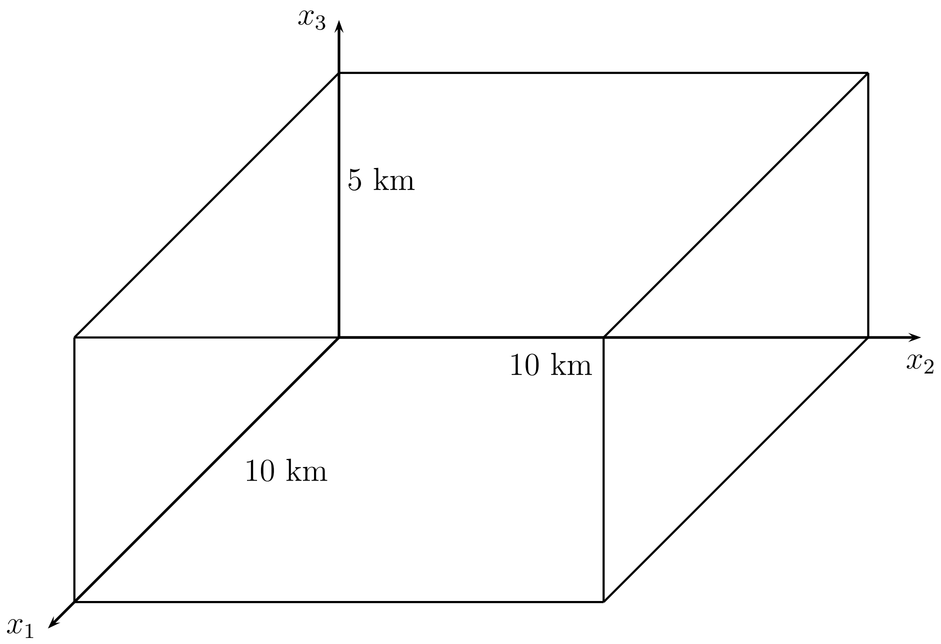
AUFGABE 1. ***Nach dem Start eines Flugzeuges wird dieses durch die Leitstelle im Punkt*** A ***mit den Koordinaten*** $A(10 \mid 0 \mid 5)$ ***geortet. Nach einer Stunde befindet sich das Flugzeug im Punkt*** B ***mit den Koordinaten*** $B(10 \mid 10 \mid 5)$***. Beschreiben Sie die Route des Flugzeuges.***

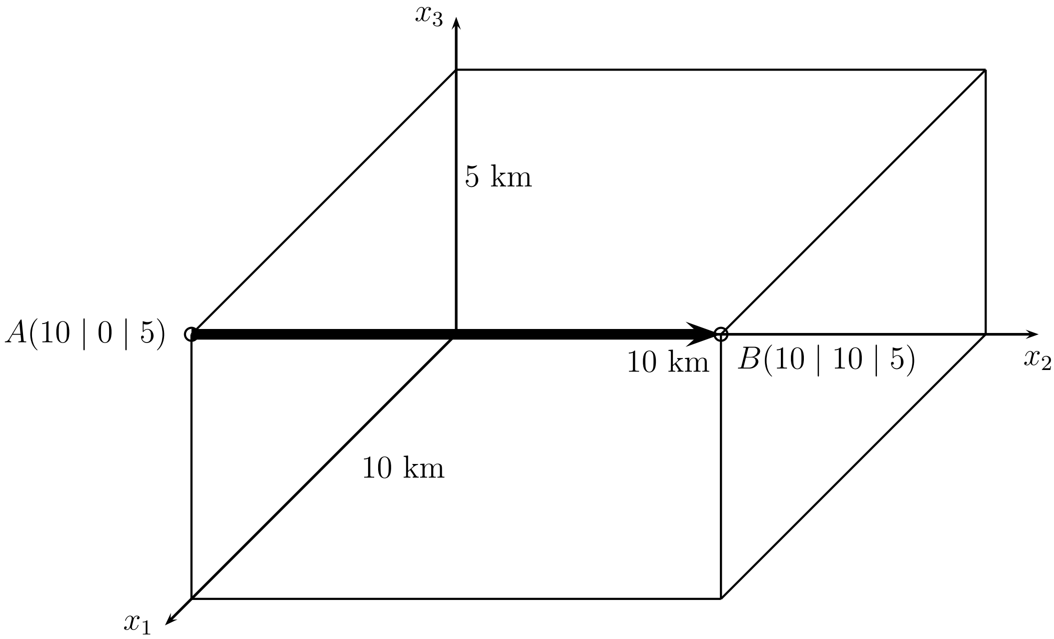
Lösung: Bevor die Aufgabe gelöst wurde, ist mit den Schülern das **verbalisierte Modell** erarbeitet worden.

verbalisiertes Modell: Das Flugzeug fliegt einen geradlinigen Kurs von dem Punkt A mit den Koordinaten $A(10 \mid 0 \mid 5)$ zum Punkt B mit den Koordinaten $B(10 \mid 10 \mid 5)$.

symbolisches Modell: Wir führen den Kursraum ein.







mathematisches Modell: Wir gehen von den Grundgesetzen der klassischen Mechanik aus. Das ***Weg-Zeit-Gesetz*** für eine gleichförmige geradlinige Bewegung lautet

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + t \cdot \vec{v}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei $\vec{s}_0$ der ***Startpunkt***, $\vec{v}$ der ***Geschwindigkeitsvektor*** und t die ***Zeit*** ist.

Formuliert man die Physik in die mathematische Sprache um, so ist $\vec{s}_0$ der *Stützvektor*, $\vec{v}$ der ***Richtungsvektor*** und t der ***Parameter der Gleichung***.

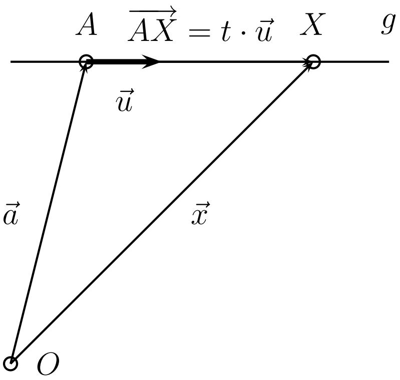
In der Mathematik unterscheidet man

Parametergleichung der Geraden

Es sei A ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ und $\vec{u}$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor. Dann bilden die Punkte X mit dem Ortsvektor

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

eine ***Gerade*** g durch den Punkt A. Dabei heißt A *Aufpunkt*, $\vec{u}$ ***Richtungsvektor*** und t ***Parameter der Geradengleichung.***



Zweipunktegleichung der Geraden

Seien zwei Punkte A und B auf einer Geraden g gegeben. Man kann den Punkt A als Aufpunkt und den Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor wählen. *Eine* der möglichen Gleichungen in Parameterform von g lautet dann:

$$g: \qquad \vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Eine solche Darstellung bezeichnet man als ***Zweipunktegleichung*** der Geraden.

Wir erhalten so

$$\begin{aligned}
\vec{s} &= \overrightarrow{OA} + t \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung der Flugroute lautet

$$\underline{\underline{\vec{s} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.}}$$

Eine weiterführende Frage kann sein:

Wie lautet die Gleichung der Flugroute von A nach B, wenn das Flugzeug diese Strecke mit der halben Geschwindigkeit zurücklegt?

Lösung:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zur Festigung der Grundbegriffe bietet sich die folgende Aufgabe an.

AUFGABE 2. ***Ein Flugzeug fliegt auf der Flugroute***

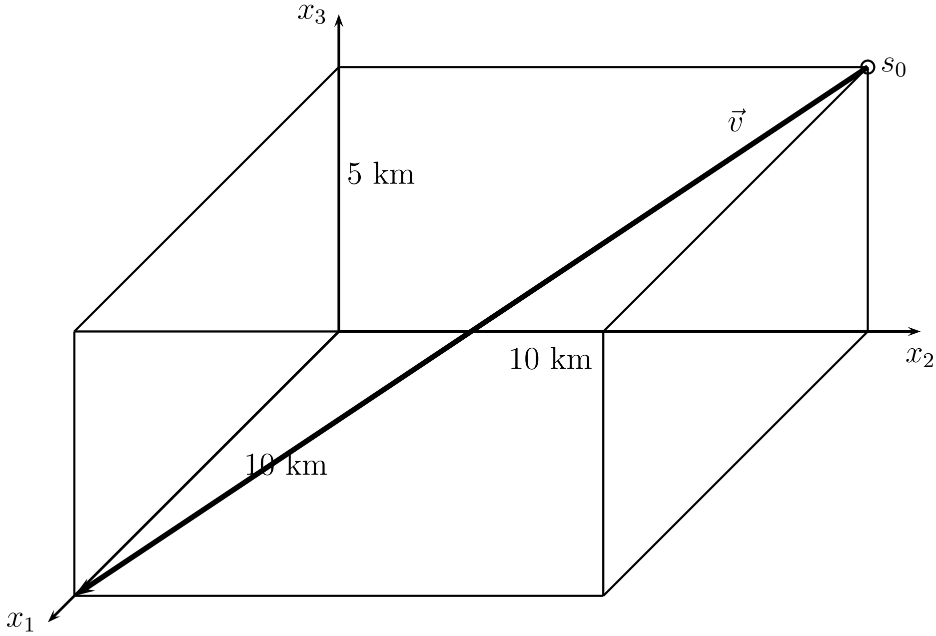
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei gibt der Parameter t die Zeit in s an.

a) ***Die Leitstelle soll das Flugzeug im Kursraum orten.***
b) ***Geben Sie an, wo sich das Flugzeug in 2 s befindet und wo es sich vor 4 s befand.***
c) ***Am Punkt C mit den Koordinaten $C(6 \mid 7 \mid 8)$ befindet sich ein zweites Flugzeug. Kommt es zur Kollision?***

Lösung:

a) **symbolisches Modell:** Kursraum



Als **verbalisiertes Modell**, nach der Lösung des symbolischen Modells, kann im Unterrichtsgespräch erhalten werden, dass die Flugroute durch eine der Raumdiagonalen im Kursraum verläuft.

b) **Mathematisches Modell**: Das Flugzeug befindet sich in 2 s im Punkt

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

und vor 4 s im Punkt

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

c) Das mathematische Modell zur Lösung der Aufgabe ist die Untersuchung, ob der Punkt C auf der Flugroute (Gerade) sich befindet. Dabei muss eine Punktprobe vorgenommen werden.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 6 &=& t \\ -3 &=& -t \\ 3 &=& -0.5t \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 6 &=& t \\ 3 &=& t \\ -6 &=& t \end{array} \quad ↯,$$

was zu einem Widerspruch führt. Damit ist das Gleichungssystem nicht lösbar und es kommt **nicht** zur Kollision.

Die folgende Aufgabe eignet sich zur Festigung des Abstandsbegriffes, wobei dieser zunächst wiederholt wurde.

Der Abstand zwischen zwei Punkten $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ und $Q(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$ im Koordinatenraum $\mathbb{R}^3$ ist vermittels der Formel

$$\begin{aligned} \text{dist }(P,Q) &:= ||\overrightarrow{PQ}|| \\ &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2} \end{aligned}$$

definiert.

Eine Gerade sei durch die Gleichung $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ gegeben und $P(x_0 \mid y_0)$ sei ein weiterer Punkt der Ebene. Dann ist der Abstand des Punktes P zur Gerade

$$\text{dist }(g,P) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Eine Ebene sei durch die Gleichung $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ gegeben und $P(x_0 \mid y_0 \mid z_0)$ sei ein weiterer beliebiger Punkt in der Ebene. Dann ist der Abstand des Punktes P zur Ebene

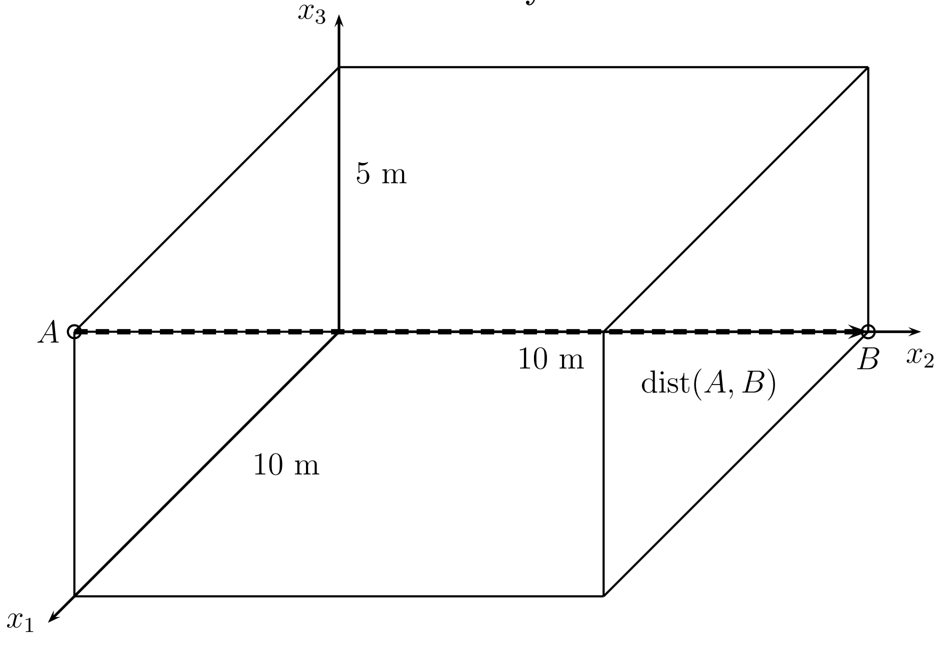
$$\text{dist }(E,P) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Aufgabe 3. ***In dem Punkt*** B ***mit dn Koordinaten*** $B(0 \mid 10 \mid 0)$ ***sind Bergsteiger in Not geraten. Um die Bergung einzuleiten, wird ein Hubschrauber der Bergwacht angefunkt, der sich auf dem Plateau der Bergwacht im Punkt*** $A(10 \mid 0 \mid 5)$ ***befindet. Die Koordinaten seien in Kilometer angegeben.***

a) ***Orten Sie die Positionen des Hubschraubers und der in Not geratenen Bergsteiger im Koordinatensystem des Kursraumes und beschreiben Sie die Lagen.***
b) ***Wie weit ist der Hubschrauber von der Unglücksstelle entfernt?***
c) ***Wie lange braucht der Hubschrauber, um die in Not geratenen Bergsteiger zu erreichen, wenn er mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 220 km/h fliegt?***

Lösung:

a) Im Kursraum befinden sich die in Not geratenen Bergsteiger und die Position des Hubschraubers an den Ecken des Raums. Als **symbolisches Modell** erhält man:



b) Die Mathematisierung des Abstandes zwischen zwei Punkten A und B erhält man über den Abstandsbegriffes.

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(A,B) &= \sqrt{(0-10)^2+(10-0)^2+(5-0)^2} = \sqrt{100+100+25}\\ &= \sqrt{225} = 15.\end{aligned}$$

Der Rettungshubschrauber ist etwa 15 km von den in Not geratenen Bergsteigern entfernt.

c)

$$\begin{aligned} 220 \text{ km} &\mathrel{\widehat{=}} 60 \text{ min} \\ 15 \text{ km} &\mathrel{\widehat{=}} 4.09 \text{ min} \end{aligned}$$

Wenn der Hubschrauber mit 220 km/h fliegt, braucht er also etwa 4.1 min, um die in Not geratenen Bergsteiger zu erreichen.

Bei der folgenden Aufgabe handelt es sich um eine Abituraufgabe aus dem Bundesland Sachsen-Anhalt, welche in einem Grundkurs geschrieben wurde. Es handelt sich dabei um eine komplexe Aufgabenstellung, welche unterschiedlichste Inhalte der Analytischen Geometrie miteinander verknüpft. Diese sind

- Mittelpunktsbestimmung,
- Abstandsbegriffe,
- Skalarprodukte,
- Winkelbestimmung und
- Beweisführung.

Aufgabe 4. ***Ein Helikopter bewegt sich vom Punkt*** $A(10 \mid 20 \mid 0.2)$ ***in Richtung des Punktes*** $B(40 \mid 40 \mid 0.2)$ ***und gleichzeitig ein Helikopter 2 von Punkt*** B ***in Richtung des Punktes*** $D(5 \mid 35 \mid 0.15)$***. Dabei werden die Helikopter als punktförmige Objekte angesehen und die Flugroute seien geradlinig.***
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer.

a) ***Helikopter 1 soll auf Hälfte der Strecke*** $\overline{AB}$***, im Punkt*** M***, seinen Kurs ändern, da sich Nebel gebildet hat. Die Lage der Nebelfront kann in dem zu betrachtenden Bereich durch die nachfolgend genannte Gleichung einer Ebene*** E ***beschrieben werden:***

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 14.2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

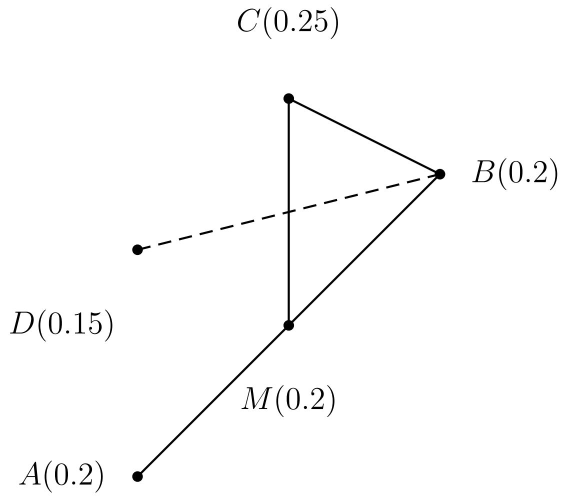
Der Helikopter fliegt nun von M aus über $C(25 \mid 45 \mid 0.25)$ nach B. Berechnen Sie die Länge des durch die Kursänderung zusätzlich zurückgelegten Weges.

b) ***Ermitteln Sie das Gradmaß des Winkels zwischen dem ursprünglichen und dem geänderten Kurs im Punkt M.***

c) ***Zeigen Sie, dass ein Zusammenstoß der beiden Helikopter auf dem neuen Kurs des Helikopters 1 ausgeschlossen ist.***

Lösung:

a) **symbolisches Modell:** Die Angaben an den Punkten sind Höhenangaben.



Die Mathematisierung der ***Länge des durch die Kursänderung zurückgelegten Weges*** erhält man aus dem ***tatsächlich zurückgelegten Weg***

$$||\overrightarrow{AM}|| + ||\overrightarrow{MC}|| + ||\overrightarrow{CB}||$$

und dem ***geplanten Weg***

$$||\overrightarrow{AM}|| + ||\overrightarrow{MB}||.$$

Dabei errechnet sich der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}10\\20\\0.2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}40\\60\\0.4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}25\\30\\0.2\end{pmatrix}.$$

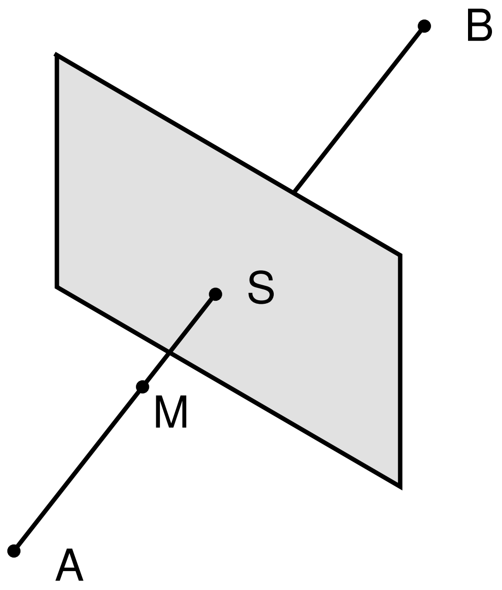
Der Mittelpunkt besitzt die Koordinaten $M(25 \mid 30 \mid 0.2)$.

Damit ergibt sich die Länge des zusätzlichen Weges u

$$\begin{aligned}
u &= ||\overrightarrow{AM}|| + ||\overrightarrow{MC}|| + ||\overrightarrow{CB}|| - (||\overrightarrow{AM}|| + ||\overrightarrow{MB}||) \\
&= ||\overrightarrow{MC}|| + ||\overrightarrow{CB}|| - ||\overrightarrow{MB}|| \\
&= \sqrt{(25-25)^2 + (45-30)^2 + (0.25-0.2)^2} \\
&\quad + \sqrt{(40-25)^2 + (45-40)^2 + (0.2-0.25)^2} \\
&\quad - \sqrt{(40-25)^2 + (40-30)^2 + (0.2-0.2)^2} \\
&= \sqrt{15^2 + 0.05^2} + \sqrt{15^2 + 5^2 + 0.05^2} - \sqrt{15^2 + 10^1} \\
&\approx 12.78
\end{aligned}$$

Damit hat der Umweg eine Länge von 12.8 km.

Kursänderung vor Erreichen der Nebelfront: Als symbolisches Modell erhält man



Mathematisches Modell: Zum Nachweis der Kursänderung vor Erreichen der Nebelfront ist zu zeigen, dass der Punkt M näher bei A liegt als der Schnittpunkt S zwischen der Geraden $g(A, B)$ und der Ebene E bzw. $|\overline{AM}| < |\overline{AS_{g_E}}|$.

Schnittpunkt S_{g_E} zwischen $g(A, B)$ und E: Die Gerade $g(A, B)$

$$g(A,B): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 14.2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Zur Ermittlung des Schnittpunktes S_{g_E} muss ermittelt man $g(A, B) \cap E$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 14.2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

und man erhält folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll} -10 + 3\eta & = & -3\lambda + 4\mu & \big| \cdot 2 \\ -10 + 2\eta & = & -2\lambda + \mu & \big| \cdot (-3) \\ -14 & = & 4\lambda - 7\mu & \\ \hline -20 + 6\eta & = & -6\lambda + 8\mu & \\ 30 - 6\eta & = & 6\lambda - 3\mu & \\ \hline 10 & = & 5\mu & \Rightarrow \mu = 2 \end{array}$$

Damit erhält man durch sukzessives Einsetzen

$$-14 = 4\lambda - 14 \Rightarrow \lambda = 0$$

und somit

$$-10 + 3\eta = 0 + 8 \Rightarrow \eta = 6.$$

Damit erhält man für den Schnittpunkt S_{g_E}

$$S_{g_E}(28 \mid 32 \mid 0.2).$$

Kommen wir nun zum Vergleich der Entfernungen $||\overrightarrow{AM}||$ und $||\overrightarrow{AS}||$

$$||\overrightarrow{AM}|| = \sqrt{(25-10)^2 + (30-20)^2 + (0.2-0.2)^2} \approx 18.03$$

$$||\overrightarrow{AS}|| = \sqrt{(28-10)^2 + (32-20)^2 + (0.2-0.2)^2} \approx 21.63.$$

Wegen $|\overline{AM}| < |\overline{AS}|$ findet die Kursänderung vor Erreichen der Nebelfront statt.

b) Winkel zwischen ursprünglichem und geändertem Kurs in M: Der Winkel ergibt sich als der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{MB}$ und $\overrightarrow{MC}$, d. h

$$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC}}{||\overrightarrow{MB}|| \cdot ||\overrightarrow{MC}||}.$$

Mit $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 40-25 \\ 40-30 \\ 0.2-0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $||\overrightarrow{MB}|| = 5\sqrt{13}$,

$\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 25-25 \\ 45-30 \\ 0.25-0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0.05 \end{pmatrix}$, $||\overrightarrow{MC}|| = \dfrac{\sqrt{90001}}{20}$ erhält man

$$\cos \sphericalangle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = 0.5547 \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \approx 56.3°.$$

Der Kursänderungswinkel beträgt etwa 56°.

c) Ein Zusammenstoß beider Helikopter kann nicht stattfinden, wenn die Geraden $g(M,C)$ und $g(D,B)$ einander sich nicht schneiden. Ein Schnitt zwischen $g(C,B)$ und $g(D,B)$ ist nicht zu untersuchen, da beide Geraden, falls nicht identisch, einzig den Punkt B gemeinsam haben. Die Geradengleichungen von $g(M,C)$ und $g(D,B)$ lauten

$$g(M,C): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

und

$$g(D,B): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 35 \\ 0.15 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -35 \\ -5 \\ -0.05 \end{pmatrix}.$$

Für ihren Schnittpunkt müsste gelten $\vec{x}_{g(M,C)} = \vec{x}_{g(D,B)}$, d. h.

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 35 \\ 0.15 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -35 \\ -5 \\ -0.05 \end{pmatrix}.$$

Man erhält folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll} 25 &=& 5-35\beta & \Rightarrow \ \beta = -\frac{20}{35} = -\frac{4}{7}, \\ 30+15\alpha &=& 35-35\cdot(-\frac{4}{7}) & \Rightarrow \ \alpha = \frac{11}{21} \\ 0.2+\frac{11}{21}\cdot 0.05 &=& 0.15+\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot(-0.05) & \Rightarrow \ \lightning \end{array}$$

Folglich gibt es zwischen $g(M,C)$ und $g(D,B)$ keine gemeinsamen Punkte.
Ein Nachweis zur Parallelität beider Kurse wäre für einen Zusammenstoß auch nicht relevant.

Bei der folgenden Aufgabe handelt es sich um eine komplexe Aufgabenstellung, welche verschiedenste Inhalte der Analytischen Geometrie verknüpft. Diese sind

- Geradengleichungen, Ebenengleichungen,
- Physikalische Grundbegriffe (Geschwindigkeit, Zeit),
- Skalarprodukte,
- Winkelbestimmung und
- Kreisbewegung, Kreisbogen.

AUFGABE 5. ***Beim Besteigen eines Berges gerät eine Seilschaft in Not und funkt nach Hilfe. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer.***

a) ***Die Funksignale werden von der Bergwacht, die sich im Ursprung eines Koordinatensystems befindet, aus Richtung***

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und von einem Hubschrauber H_1 ***im Punkt*** $H_1(-2 \mid 26 \mid 1)$ ***aus der Richtung***

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgenommen. Berechnen Sie die Koordinaten S ***der Unglücksstelle!***

b) ***Die beiden Hubschrauber*** H_1 ***und*** H_2***, letzterer befindet sich im Punkt*** $H_2(0 \mid 20 \mid 1.5)$***, werden zum Unglücksort geschickt.*** H_2 ***kontrolliert an seinem Standpunkt die angegebenen Koordinaten von*** S ***und startet dann mit 30 s Verspätung.***
   - ***In welcher Richtung findet*** H_2 ***die Seilschaft?***
   - ***Nach welcher Zeit treffen beide bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von*** $v = 200$ ***km/h bei*** S ***ein?***

c) ***Ein dritter Hubschrauber*** H_3 ***befindet sich auf einem Routineflug und empfängt den SOS-Ruf am Punkt*** $H_{3,1}(21 \mid 17 \mid 2.65)$***. Von dort aus fliegt er mit Kurs***

$$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2.35 \end{pmatrix}$$

auf der Geraden** g **zum Punkt** $H_{3,2}(x_1 \mid x_2 \mid 5)$**, den er nach 2 min erreicht.

Am Punkt** $H_{3,2}$ **schwenkt er auf eine kreisförmige Kreisbahn zum Punkt** S **ein, um das Bergmassiv zu umfliegen. Der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve hat die Koordinaten** $M_k(13 \mid 14 \mid 5)$**. Berechnen Sie die gesamte Flugzeit, wenn** H_3 **die Durchschnittsgeschwindigkeit von** $H_{3,1}$ **nach** $H_{3,2}$ **auf der gesamten Strecke beibehält!

d) ***Während** H_1 **und** H_2 **von** S **aus zur Leitstelle fliegen, steuert** H_3 **zunächst das Basislager** $B^\star$ **an, welches sich in 1000 m Höhe auf einer Wiesenfläche befindet. Die Wiese hat die Form eines unregelmäßigen Vierecks mit den Eckpunkten** $A(7.5 \mid 8 \mid 1)$**,** $B(7.5 \mid 8.5 \mid 1)$**,** $C(7 \mid 7.75 \mid 1)$ **und** $D(8.25 \mid 8.25 \mid 1)$**. Auf direktem Flug ist** $B^\star$ **nicht zu erreichen. Deshalb fliegt** H_3 **1.3 km weit zum Punkt** P **mit***

$$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -2.4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dort ändert er seinen Kurs zu

$$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ -2 \\ -3.5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass er auf diese Weise einen Punkt auf der Wiese erreicht!

Lösung:

a) Die Bergwacht befindet sich im Punkt $O(0 \mid 0 \mid 0)$ und das Funktsignal kommt aus der Richtung $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Geradengleichung b ist

$$b: \quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Der Hubschrauber 1 befindet sich im Punkt $H_1(-2 \mid 26 \mid 1)$ und fliegt in Richtung $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Geradengleichung lautet

$$g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Koordinaten der Unglücksstelle S ermittelt man aus $\{S\} = b \cap g_2$, was auf ein Gleichungssystem führt

$$\begin{array}{rcrcll} 2\lambda & = & -2 & + & 3\mu & \\ 2\lambda & = & 26 & - & 4\mu & \big| \cdot (-1) \\ \lambda & = & 1 & + & \mu & \big| \cdot (-2) \\ \hline 0 & = & -28 & + & 7\mu & \Rightarrow \mu = 4 \\ 0 & = & -4 & + & \mu & \Rightarrow \mu = 4 \end{array}$$

also $\lambda = 5$. Die Koordinaten der Unglücksstelle lauten $S(10 \mid 10 \mid 5)$.

b) Der Hubschrauber 1 befindet sich im Punkt $H_1(-2 \mid 26 \mid 1)$ und fliegt in Richtung $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Geradengleichung lautet

$$g_2: \quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Der Hubschrauber 2 befindet sich im Punkt $H_2(0 \mid 20 \mid 1.5)$ und fliegt in Richtung des Punktes $S(10 \mid 10 \mid 5)$. Die Geradengleichung lautet

$$g_2' : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Die Richtung , in der Hubschrauber 2 die Seilschaft findet, ist $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 3.5 \end{pmatrix}$.
- Wir berechnen die Flugzeit von H_1 und H_2. Allgemein gilt (gleichförmige Bewegung)

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}.$$

  - Hubschrauber 1: Der Abstand von H_1 zu S beträgt

$$\begin{aligned} \text{dist } (H_1, S) &= ||\overrightarrow{H_1S}|| \\ &= \sqrt{(10+2)^2 + (10-26)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{12^2 + (-16)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{144 + 256 + 16} = \sqrt{416} = 4\sqrt{26} \approx 20.4 \text{ km} \end{aligned}$$

und die zurückgelegte Zeit

$$t = \frac{\text{dist } (H_1, S)}{v} = \frac{20.4 \text{ km h}}{200 \text{ km}} = 0.102 \text{ h} = 6.12 \text{ min}.$$

Hubschrauber H_1 ist nach 6.12 min am Unglücksort S.

  - Hubschrauber 2: Der Abstand von H_2 zu S beträgt

$$\begin{aligned} \text{dist } (H_2, S) &= ||\overrightarrow{H_2S}|| = \sqrt{(10-0)^2 + (10-20)^2 + (5-1.5)^2} \\ &= \sqrt{10^2 + 10^2 + 3.5^2} \\ &= \sqrt{200 + 12.25} = \sqrt{212.25} \approx 14.57 \text{ km}, \end{aligned}$$

die zurückgelegte Zeit

$$t = \frac{\text{dist } (H_2, S)}{v} = \frac{14.57 \text{ km h}}{200 \text{ km}} = 0.07285 \text{ h} = 4.371 \text{ min}.$$

Unter Beachtung der Verspätung von $t = 30\,\text{s} = 0.5$ min erreicht Hubshrauber H_2 nach $t = (4.371 + 0.5)$ min=4.871 min den Unglücksort S.

c) Der Hubschrauber 3 befindet sich im Punkt $H_{3,1}(21 \mid 17 \mid 2.65)$ und fliegt in Richtung $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2.35 \end{pmatrix}$. Die Geradengleichung lautet

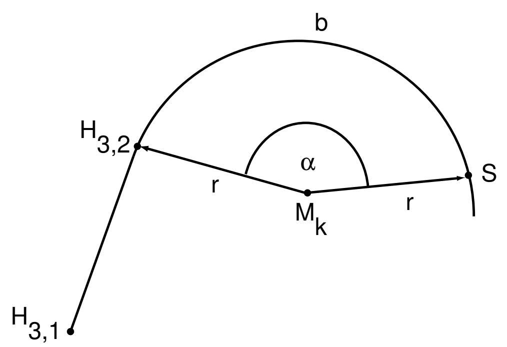
$$g_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \\ 2.65 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2.35 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Der Punkt $H_{3,2}(x_1 \mid x_2 \mid 5)$ liegt auf der Geraden g_3. Damit gilt

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & 21 & - & 2\beta \\ x_2 & = & 17 & - & 3\beta \\ 5 & = & 2.65 & + & 2.35\beta \Rightarrow \beta = 1 \end{array}$$

also $x_1 = 19$ und $x_2 = 14$. Die Koordinaten des Punktes $H_{3,2}$ lauten $H_{3,2}(19 \mid 14 \mid 5)$. Ab diesem Punkt bewegt sich die Bahnkurve auf einem Kreisbogen um den Mittelpunkt $M_k = (13, 14, 5)$ und dem Radius r.

symbolisches Modell:



Mathemtisiert erhält man den Radius

$$r = \text{dist }(M_k, H_{3,2}) = \sqrt{(19-13)^2 + (14-14)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{6^2} = 6.$$

Der Zentriwinkel errechnet sich aus

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{H_{3,2}M_k} \bullet \overrightarrow{SM_k}}{||\overrightarrow{H_{3,2}M_k}|| \cdot ||\overrightarrow{SM_k}||} = -\frac{18}{30} = -\frac{3}{5}$$

woraus sich der Zentriwinkel zu

$$\alpha = 126.87^\circ$$

ergibt.

Der Kreisbogen b errechnet sich aus dem Umfang des Kreises $U = 2\pi r = 12\pi$ und der Beziehung

$$\frac{b}{U} = \frac{\alpha}{360°}$$

woraus

$$b = \frac{\alpha \cdot U}{360°} = 13.29 \text{ km}.$$

Der Weg von $H_{3,1}$ nach $H_{3,2}$ beträgt

$$\begin{aligned} \text{dist }(H_{3,1}, H_{3,2}) &= \sqrt{(19-21)^2 + (14-17)^2 + (5-2.65)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2.35^2} \\ &= \sqrt{18.5225} \approx 4.3 \text{ km} \end{aligned}$$

Berechnen wir die Durchschnittgeschwindigkeit. Die Strecke $\overline{H_{3,1}, H_{3,2}}$ legt er in $t = 2$ min$= \frac{1}{30}$ h zurück. Damit beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{\text{dist }(H_{3,1}, H_{3,2})}{t} = \frac{4.3 \text{ km} \cdot 30}{\text{h}} = 129 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Auf dem Kreisbogen soll die Geschwindigkeit v konstant bleiben.

$$v = \frac{b}{t'} \Rightarrow t' = \frac{b}{v} = \frac{13.29 \text{ km h}}{129 \text{ km}} = 0.103 \text{ h} = 6.18 \text{ min}.$$

Die gesamte Flugzeit beträgt

$$t_{ges} = t + t' = (6.18 + 2) \text{ min} = 8.18 \text{ min}.$$

d) Hubschrauber 3 steuert das Basislager $B^\star$ an. Die Koordinaten der Ebene sind $A(7.5 \mid 8 \mid 1)$, $B(7.5 \mid 8.5 \mid 1)$, $C(8 \mid 7.75 \mid 1)$ und $D(8.25 \mid 8.25 \mid 1)$. Die Ebenengleichung ist

$$B^\star: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.25 \end{pmatrix}.$$

Damit koordinatenfreie Darstellung der Ebene

$$B^\star: \quad -0.25x_3 = -0.25 \Longleftrightarrow x_3 = 1.$$

Von $S(10 \mid 10 \mid 5)$ fliegt der Hubschrauber 3 in Richtung $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -2.4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf der Geraden

$$g_4: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2.4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbb{R}$$

und

$$\left\| \begin{pmatrix} -2.4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6.76} = 2.6.$$

Damit $\nu = \frac{1.3 \text{ km}}{2.6 \text{ km}} = \frac{1}{2}$ und es ergibt sich der Punkt P zu

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2.4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.8 \\ 10 \\ 4.5 \end{pmatrix}.$$

Von P Anflug zur Ebene in Richtung $a_5 = (-0.8, -2, -3.5)$, also

$$g_5: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8.8 \\ 10 \\ 4.5 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -0.8 \\ -2 \\ -3.5 \end{pmatrix}, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

zu zeigen: $B = g_5 \cap B^\star$
Beweis: Sei $B(8.8 - 0.8\eta \mid 10 - 2\eta \mid 4.5 - 3.5\eta)$. Einsetzen in $B^\star$ liefert $4.5 - 3.5\eta = 1$, also $\eta = 1$. Damit gibt es einen Durchstoßpunkt der Geraden g_4 mit der Ebene $B^\star$

$$B(8 \mid 8 \mid 1).$$

Als Abschluss und Zusammenfassung diente die folgende Aufgabe.

Aufgabe 6. ***Auf einem Flug nach Hawai werden von einem Tower zwei Flugzeugen die folgenden Flugrouten zugewiesen:***

$$\vec{s}_r = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R} \ \textbf{\textit{und}} \ \vec{s}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) ***Zeigen Sie, dass die Flugrouten parallel verlaufen.***
b) ***Wie kann die Flugebene, die durch die Flugrouten festgelegt wird, beschrieben werden?***
c) ***Warum wird durch die Flugrouten keine Flugebene festgelegt, wenn an Stelle der zweiten Flugbahn ein Flugzeug auf der Route***

$$\vec{s}_s = \begin{pmatrix} -9 \\ -24 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

fliegt?
d) ***Welche Gefahr besteht in diesem Fall?***

<u>Hinweis:</u> Schreiben Sie bitte zu jeder Aufgabe, welche Phasen der Modellbildung Sie zum Lösen der jeweiligen Aufgabe benutzt haben (verbalisiertes Modell, mathematisches Modell, symbolisches Modell ...).

Lösung:

a) **Zu zeigen:** Die beiden Flugrouten verlaufen parallel.
Beweis: Da wegen

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1.5) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

die Richtungsvektoren der Flugrouten kollinear sind, verlaufen die Flugrouten parallel zueinander. Hierbei wurde das **mathematische Modell** verwendet.

b) Der zweite Flieger befindet sich mit anderthalbfacher Geschwindigkeit auf dem Weg zum Startpunkt. Da die Flugrouten parallel sind, ergibt sich mit

$$\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_0^{\star} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

die Flugebene

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{s}_0 + r \cdot \vec{v} + s \cdot (\vec{s}_0^{\star} - \vec{s}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nicht linear abhängig sind, verlaufen die Flugrouten echt parallel zueinander und legen damit wirklich obige Flugebene fest. Es wurde das **mathematische Modell** verwendet.

c) Bei der zweiten Flugroute ergibt sich eine neue Startposition

$$\vec{s}_0^{\star} = \begin{pmatrix} -9 \\ -24 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Es muss untersucht werden, ob die folgende Gleichung eine Flugebene beschreibt:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{s}_0 + r \cdot \vec{v} + s \cdot (\vec{s}_0^{\star} - \vec{s}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ -24 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da der Vektor

$$\begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ 6 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

linear abhängig ist, sind die beiden Flugrouten identisch und legen damit keine Flugebene fest. Hierbei wurde das **mathematische Modell** verwendet.

d) Die Gefahr besteht, dass die Flieger, die sich aufeinander zu bewegen, zusammenstoßen. Hierbei wurde das **verbalisierte Modell** verwendet.

3. Methodische Hinweise

Für einen Modellbildungsprozess ist die Unterrichtseinheit sehr gut geeignet, da sehr viele verschiedene Modell vorkommen und die Möglichkeit somit besteht, den Modellbildungsprozess zu beschreiben und einzelne Phasen charakterisiert werden können. So kann man zunächst das **verbalisierte Modell** im Unterrichtsgespräch behandeln. Dieses wurde von den Schülern sehr gut erbracht. In diesem Zusammengang konnten auch die charakterisierenden Größen bei den einzelnen Aufgaben ermittelt werden.

Nach der jeweiligen Klärung des verbalisierten Modells wurden bei einigen Aufgaben das **symbolische Modell** zur Lösung verwendet. Dieses diente zur Veranschaulichung der Problematik und als Hilfe zur Formulierung des **mathematischen Modells**. Dabei wurden z. T. physikalische Grundgesetze verwendet.

KAPITEL 4

Der Fosbury-Flop

1. Lernziele und didaktische Vorbetrachtungen

Lernziele: Die Schüler kennen
- quadratische Funktionen und ihre Eigenschaften,
- die Lösungsformel zur Nullstellenbestimmung quadratischer Funktionen
- den Ablauf eines Hochsprungs aus dem Sportunterricht (dieses fächerübergreifende Element ist notwendig zur Erfassung der mathematischen Problemstellung).

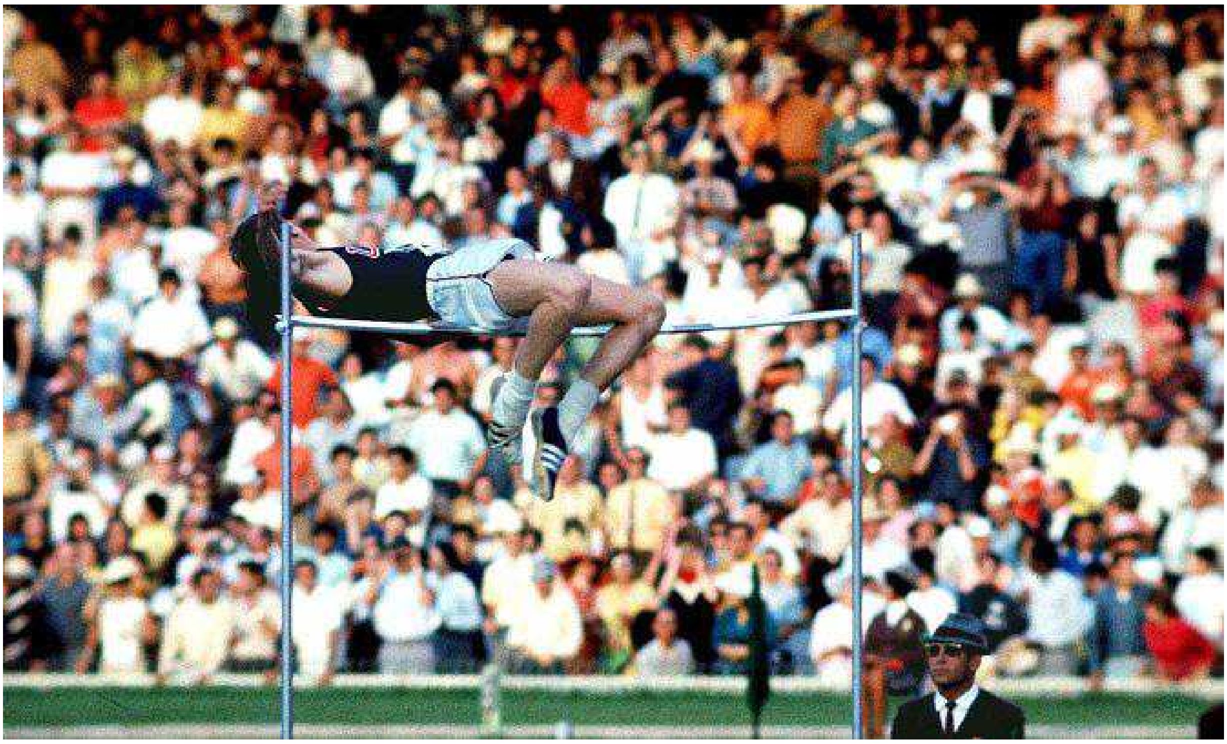
Könnensziele: Die Schüler können
- ein reales Problem auf den mathematischen Formalismus übertragen („mathematisieren“),
- quadratische Funktionen graphisch darstellen und deren charakteristische Punkte berechnen (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Scheitelpunkt),
- Zusammenhänge zwischen graphischer und rechnerischer Lösung herstellen.

Die wesentliche Anforderung dieser Aufgabe besteht darin, die Transformation einer realen Situation in die Mathematik zu bewältigen. Mit dem Hochsprung wurde hier eine Situation gewählt, die jeder Schüler im Sportunterricht selbst erlebt hat. Somit können persönliche Erfahrungen und Erlebnisse eingebracht werden, wodurch das Interesse an dieser Aufgabe steigt. Außerdem werden in Zusammenhang mit der Erarbeitung der Aufgabenstellung sporthistorische Ereignisse diskutiert und damit der Realitätsbezug weiter verstärkt. Diesem Prozess der Aufstellung eines mathematischen Modells sollte in der Unterrichtseinheit viel Zeit beigemessen werden.

Nachdem das mathematische Modell in Form einer Funktionsgleichung gefunden wurde, können die Kenntnisse über Scheitelpunkts- und Nullstellenberechnung angewendet werden. Hierbei ist wichtig, dass die erhaltenen Ergebnisse bezüglich des realen Problems interpretiert werden. Es soll also erkannt werden, welche Bedeutung die Ergebnisse in der Realität haben. Die Aufgabe ermöglicht außerdem weitergehende Diskussionen, die durch Schüler angeregt werden können.

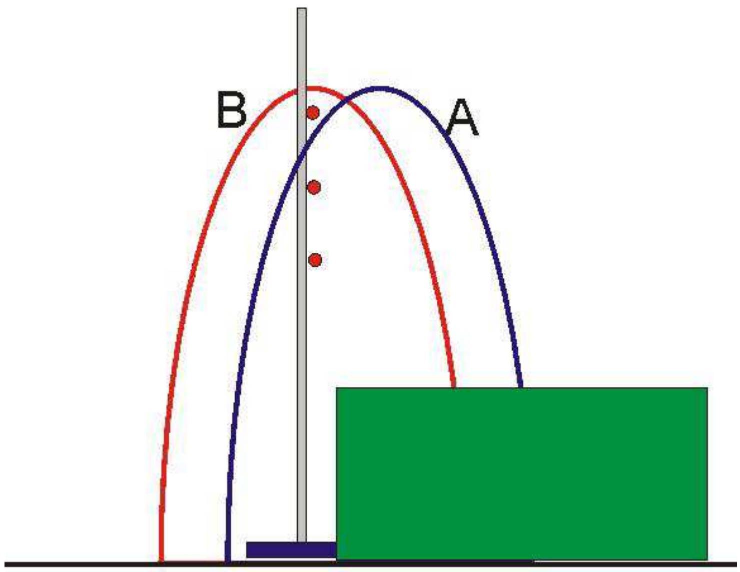
2. Didaktische Reflexion

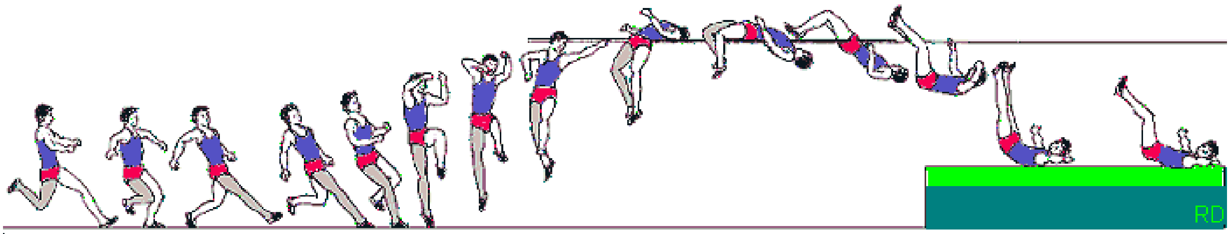
AUFGABE 1. ***Der amerikanische Leichtathlet RICHARD-DOUGLAS FOSBURY revolutionierte bei den Olympischen Spielen 1968 den Hochsprung mit einer von ihm entwickelten Technik. Der Fosbury-Flop ist eine Art Rückwärtsroller, mit dem man mit dem Rücken in der Luft „liegend", also mit dem Gesicht nach oben, die Sprunglatte überquert. Mit dieser Technik gelang ihm 1968 in Mexico City der Olympiasieg. Dadurch wurde seine Art zu springen in aller Welt bekannt und setzte sich schnell überall durch.***



Um diesen Sprung genauer zu untersuchen, betrachten wir im Folgenden anstatt des gesamten Körpers des Leichtathleten nur den Körperschwerpunkt. Dieser Punkt befindet sich bei Fosbury in 1,05 m Höhe.

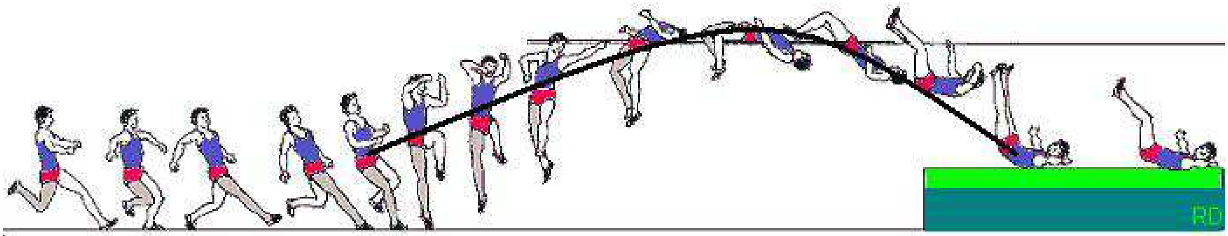
Da der berühmte Fosbury-Sprung von vielen Journalisten fotografiert wurde, konnte aus dem Fotomaterial bestimmt werden, dass es sich bei seiner Flugkurve um eine Normalparabel handelt, die um den Faktor 1,5 gestreckt ist (in der zum Boden senkrechten Richtung).





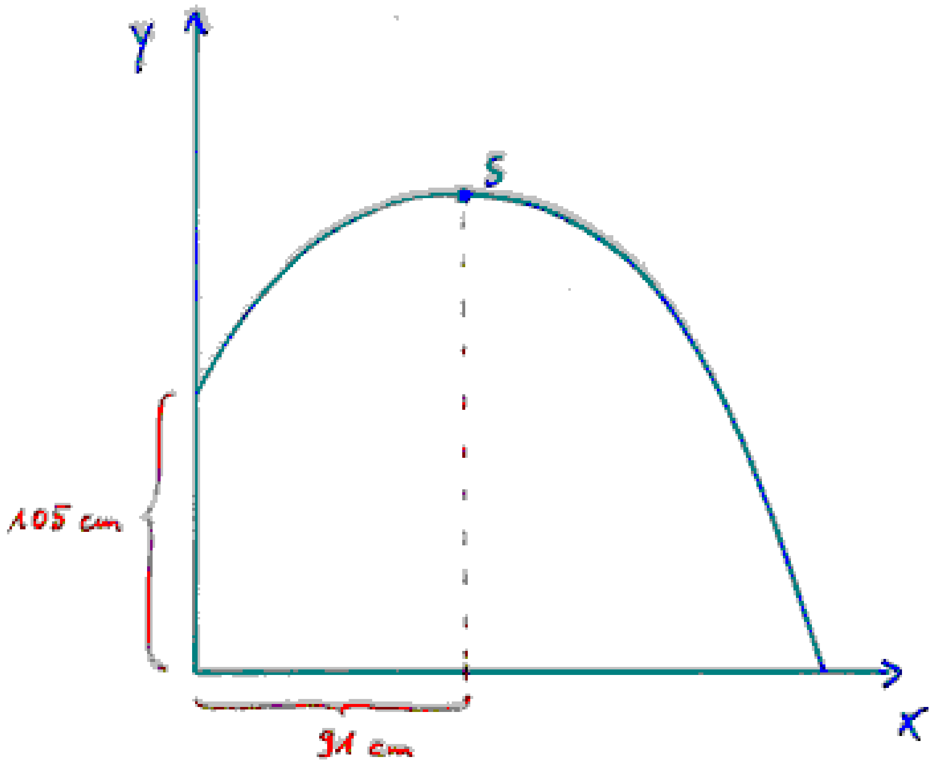
Außerdem ist bekannt, dass für den Abstand zwischen der Absprungstelle und der Sprunganlage 91 cm gemessen wurden.

a) ***Mit welcher Sprunghöhe gelang Fosbury dieser historische Olympiasieg? (Im höchsten Punkt der Flugbahn befindet sich der Körperschwerpunkt 5 cm über der Sprunglatte.)***
b) ***In welcher Höhe befand sich sein Körperschwerpunkt, als er von der Absprungstelle 0,5 m entfernt war?***
c) ***Welche Entfernung hatte der Springer von der Absprungstelle, als er wieder den Boden erreichte?***
d) ***Berücksichtige nun, dass sich auf dem Boden eine Matte befindet, die den Springer auffängt. Die Matte hatte eine Höhe von 0,6 m. Welche Entfernung zur Absprungstelle ergibt sich dann?***



Nachdem der 21-jährige die Goldmedaille für die Vereinigten Staaten von Amerika gewonnen hatte, wurde er wie ein Held gefeiert.

Lösung: Zunächst wurde mit Hilfe von Hochsprung-Fotographien erarbeitet, dass die Flugbahn des Hochspringers durch eine Parabel beschrieben werden kann. Zur Vereinfachung des mathematischen Modells wird anstelle des gesamten Springers nur der Körperschwerpunkt betrachtet. Die Schüler versuchen zunächst an einer Skizze, das Problem zu erfassen und können dann erkennen, welche Größen zur Lösung des Problems gegeben und welche gesucht sind.



Zur Lösung wird die allgemeine Form einer quadratischen Funktion benötigt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Größen $a = -1.5$ und $c = 1.05$ können direkt aus der Aufgabenstellung abgelesen werden. Zur Bestimmung von Parameter b wird die Scheitelpunktsformel benötigt:

$$S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

Da die x-Koordinate des Scheitelpunkts mit $91cm$ bekannt ist, kann daraus b bestimmt werden zu $b = 2.73$.

Die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion lautet dann:

$$f(x) = -1.5x^2 + 2.73x + 1.05$$

a) Die Sprunghöhe h entspricht der y-Koordinate des Scheitelpunkts. Es ergibt sich:

$$h = \frac{4ac - b^2}{4a} = 2.29 \text{ m}$$

Unter Berücksichtigung der Höhe der Sprunglatte erhält man für die Sprunghöhe 2.24 m.

b) Eine Entfernung von $0.5m$ von der Absprungstelle bedeutet, dass $x = 0.5$ sein muss. Um diese Teilaufgabe zu lösen, müssen die Schüler erkannt haben, dass die Absprungstelle bei $x = 0$ liegt. Die Schüler berechnen also:

$$f(0.5) = -1.5 \cdot 0.5^2 + 2.73 \cdot 0.5 + 1.05 = 2.04 \text{ m}$$

Auch hier soll das Ergebnis anhand des Graphen überprüft werden.

c) Die Schüler erkennen, dass der Springer den Boden dort erreicht, wo sich die Nullstelle der Funktion befindet. Mit der Lösungsformel werden die Nullstellen bestimmt:

$$x_1 = 2.15 \text{ m}$$

$$x_2 = -0.33 \text{ m}$$

Die Lösung x_2 entfällt, da sie vor der Absprungstelle liegt und somit nicht möglich ist.

d) Die Sprungweite unter Berücksichtigung der Matte kann bestimmt werden, indem in die Funktionsgleichung $y = 0.6$ eingesetzt wird. Somit kann wieder die Lösungsformel verwendet werden:

$$0.6 = -1.5x^2 + 2.73x + 1.05$$

Zur Anwendung der Lösungsformel wird die Normalform benötigt:

$$0 = x^2 - 1.82x - 0.3$$

Als Lösungen erhalt man:

$$x_1 = 1.97 \text{ m}$$

$$x_2 = -0.15 \text{ m}$$

Die Lösung x_2 entfällt wieder.

3. Methodische Hinweise

Die Voraussetzungen und notwendigen Vorkenntnisse für die Behandlung des Themas sind das Arbeiten mit quadratischen Funktionen (graphische Darstellung als Parabel, Berechnung von charakteristischen Punkten) und Kenntnisse über den Umgang mit Diagrammen. Dabei bilden die Schwerpunkte die Analyse der für die Mathematik interessanten Gesichtspunkte eines Hochsprungs, das Sammeln der gegebenen Größen, daraus die benötigten Größen zu erarbeiten und die Funktionsgleichung aufzustellen. Außerdem sollen mit Hilfe dieser Funktionsgleichung Berechnungen durchgeführt werden. Als Hintergrund für diese Aufgabe dienen die Sporthistorie und die persönlichen Erfahrungen aus dem Sportunterricht.

In dem Prozess der Modellbildung findet eine Transformation dieser realen Situation in die mathematische Sprache statt. Das Finden eines mathematischen Modells wird als „mathematisieren“ bezeichnet. Voraussetung dafür ist eine kritische Auseinandersetzung mit der Problemstellung. Erst nachdem die Schüler das Problem vollständig verinnerlicht haben, sollten entsprechende Vereinfachungen diskutiert werden, um ein Modell zu finden. Erst in diesem Stadium sollte begonnen werden, mathematische Begriffe zu verwenden. Von entscheidender Bedeutung für die Unterrichteinheit ist die Motivation durch ein tatsächlich stattgefundenes sporthistorisches Ereignis. Außerdem sollte die Relevanz für den Sportler verdeutlicht werden (es muss die optimale Absprungstelle gefunden werden, um sportlichen Erfolg zu erlangen). Desweiteren wird während der Erarbeitung der Lösung die Fähigkeit entwickelt, unwichtige Informationen „auszublenden“. Diese Fähigkeit ist besonders wichtig für in höheren Klassenstufen folgende noch komplexere Aufgaben.

KAPITEL 5

Die Straße von Mosambik

1. Lernziele und didaktische Vorbetrachtungen

Lernziele: Die Schüler kennen
- die Eigenschaften linearer, quadratischer und kubischer Funktionen,
- die Berechnungsmöglichkeiten der Nullstellen dieser Funktionen,
- die graphische Darstellung dieser Funktionen

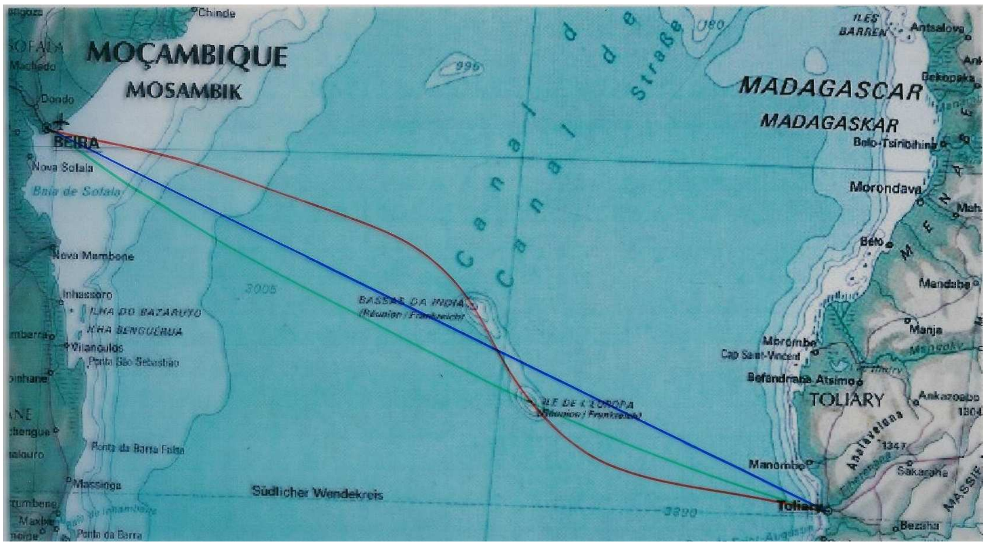
Könnensziele: Die Schüler können
- ein geographisches Problem auf die Mathematik übertragen (im Modellbildungsprozess werden die verschiedenen Routen durch Funktionen angenähert),
- Gleichungssysteme mit Hilfe verschiedener Verfahren lösen (Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Gaußsches Eliminationsverfahren),
- Schnittpunkte von Funktionsgraphen bestimmen.

Den Ausgangspunkt bei der Behandlung dieser Aufgabe stellt eine geographische Karte vom afrikanischen Kontinent dar. Die Schüler sollen zunächst die relevanten Länder aus der Aufgabenstellung in der Karte wiederfinden. Um die Übersichtlichkeit für die Schüler zu erhöhen, wird nun ein Kartenausschnitt verwendet, der vornehmlich die beiden Länder Mosambik und Madagaskar enthält. Dort können die Schüler schnell erkennen, dass es sich bei der Straße von Mosambik um die zwischen Festland und Insel liegende Meeresenge handelt. Die in der Aufgabenstellung enthaltenen Routen können die Schülern bereits qualitativ beschreiben und in die Karte einzeichnen.

Die Schüler erkennen, dass eine qualitative Beschreibung der Routen zur weiteren Untersuchung nicht ausreicht. Die Routen werden durch nun durch lineare, quadratische und kubische Funktionen beschrieben. Der mathematische Begriff der Funktion wurde zuvor noch nicht genutzt, da er zum Verständnis der Aufgabe nicht notwendig war. Erst in diesem Arbeitsschritt ist einzusehen, dass eine funktionale Beschreibung der Routen nötig ist, um die Schnittpunkte bestimmen zu können.

2. Didaktische Reflexion

AUFGABE 1. ***Um auf dem Meeresweg von Madagaskar nach Mosambik zu kommen, kann man die Hafenstädte TOLIARY und BEIRA nutzen.***



Dabei hat man als Reisender die Wahl zwischen den folgenden 3 Schifffahrtslinien:

- ***direkte Verbindung TOLIARY - BEIRA***
- ***Zwischenstation auf der Insel ILE DE L´EUROPA***
- ***Zwischenstationen auf den Inseln ILE DE L´EUROPA und BASSAS DA INDIA***

a) ***Um die Routen genauer untersuchen zu können, soll der Verlauf dieser 3 Seewege bestimmt werden.***

b) ***Um Kollisionen auszuschließen, muss untersucht werden, wo sich die Routen kreuzen. Bei welchen Routen ist das der Fall? Berechne den Ort einer möglichen Kollision.***

Lösung:

a) I. Direkte Verbindung TOLIARY - BEIRA

Die Strecke, auf der sich das Schiff bewegt, kann durch den Graphen einer **linearen Funktion** beschrieben werden.

Die allgemeine Form lautet:

$$y = f(x) = mx + n$$

Wenn man das Koordinatensystem so wählt, dass die x-Achse nach Norden und die y-Achse nach Westen zeigt, so können folgende Punkte aus der Landkarte abgelesen werden:

$$A(0 \mid 0) \quad B(630 \mid 1290)$$

Wenn man die Punkte in die allgemeine Form der Funktionsgleichung einsetzt, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcl} 0 & = & m \cdot 0 & + & n \\ 1290 & = & m \cdot 630 & + & n \\ \hline n & = & 0 & & \\ m & = & \frac{1290}{630} = \frac{43}{21} & & \end{array}$$

$$\boxed{f_1(x) = \frac{43}{21} \cdot x}$$

II. Zwischenstation auf der Insel ILE DE L´EUROPA
Die Strecke, auf der sich das Schiff bewegt, kann durch den Graphen einer **quadratischen Funktion** beschrieben werden.
Die allgemeine Form lautet:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Folgende Punkte können aus der Landkarte abgelesen werden:

$$A(0 \mid 0), \quad B(630 \mid 1290), \quad C(180 \mid 490).$$

Wenn man die Punkte in die allgemeine Form der Funktionsgleichung einsetzt, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 0 & = & a \cdot 0^2 & + & b \cdot 0 & + & c \\ 1290 & = & a \cdot 630^2 & + & b \cdot 630 & + & c \\ 490 & = & a \cdot 180^2 & + & b \cdot 180 & + & c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned}
c &= 0 \\
a &= \frac{1290 - 630b}{630^2} \\
490 &= \frac{1290 - 630b}{630^2} \cdot 180^2 + 180b \\
490 &= \frac{5160}{49} - \frac{180^2}{630}b + b \cdot 180 \\
\frac{18850}{49} &= \frac{900}{7}b \\
131950 &= 44100b \\
b &= \frac{377}{126} \\
a &= -\frac{17}{11340}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f_2(x) = -\frac{17}{11340} \cdot x^2 + \frac{377}{126} \cdot x}$$

III. Zwischenstationen auf den Inseln ILE DE L´EUROPA und BASSAS DA INDIA
Die Strecke, auf der sich das Schiff bewegt, kann durch den Graphen einer **kubischen Funktion** beschrieben werden.
Die allgemeine Form lautet:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Folgende Punkte können aus der Landkarte abgelesen werden:

$$A(0 \mid 0), \quad B(630 \mid 1290), \quad C(180 \mid 490), \quad D(340 \mid 590)$$

Somit ergibt sich hier folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
0 & = & a \cdot 0^3 & + & b \cdot 0^2 & + & c \cdot 0 & + & d \\
1290 & = & a \cdot 630^3 & + & b \cdot 630^2 & + & c \cdot 630 & + & d \\
490 & = & a \cdot 180^3 & + & b \cdot 180^2 & + & c \cdot 180 & + & d \\
590 & = & a \cdot 340^3 & + & b \cdot 340^2 & + & c \cdot 340 & + & d \\ \hline
\end{array}$$

Wegen $d = 0$ reduziert sich das Gleichungssystem auf 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Eine Lösungsmöglichkeit ist das Gaußsche Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{ccc|c}
630^3 & 630^2 & 630 & 1290 \\
180^3 & 180^2 & 180 & 490 \\
340^3 & 340^2 & 340 & 590
\end{array}$$

Erzeugung von Nullen durch Multiplikation der 1. Zeile mit $\frac{180^3}{630^3}$ bzw. $\frac{340^3}{630^3}$ und anschließender Subtraktion von der 2. bzw. 3. Zeile.

$$\begin{array}{ccc|c}
630^3 & 630^2 & 630 & 1290 \\
0 & 23142.86 & 165.31 & 459.91 \\
0 & 53212.70 & 240.97 & 387.23
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
630^3 & 630^2 & 630 & 1290 \\
0 & 23142.86 & 165.31 & 459.91 \\
0 & 0 & -139.13 & -670.25
\end{array}$$

Also ergibt sich für a, b, c:

$$\begin{aligned}
-139.13c &= -670.25 \\
c &= 4.82 \\
\\
23142.86b + 165.31c &= 459.91 \\
b &= -0.0146 \\
\\
630^3 a + 630^2 b + 630c &= 1290 \\
a &= 1.62 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f_3(x) = 1.62 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0.0146 \cdot x^2 + 4.82 \cdot x}$$

b) Es gibt relevante Schnittpunkte bei folgenden Routen:

i) I. und III.

ii) II. und III.

i) $f_1(x) = f_3(x)$

$$\frac{43}{21} \cdot x = 1.62 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0.0146 \cdot x^2 + 4.82 \cdot x$$

$$0 = 1.62 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0.0146 \cdot x^2 + 2.77 \cdot x$$

$$0 = x^3 - 901.23 \cdot x^2 + 170987.65 \cdot x$$

Es gibt bereits 2 bekannte Schnittpunkte: Toliary und Beira. Wir suchen uns Toliary aus, da die Stadt im Koordinatenursprung liegt und somit die Berechnugen leichter werden. Durch Ausklammern von x können dann weitere Schnittpunkte berechnet werden:

$(x^2 - 901.23 \cdot x + 170987.65) \cdot x = 0$

$$\Rightarrow 0 = x^2 - 901.23 \cdot x + 170987.65$$

Die Lösungsformel liefert:

$x_1 = 629.69$

$x_2 = 271.54$

Schnittpunkt, an dem es zu Kollisionen kommen könnte:

$P_1(271.54 \mid 556.02)$

ii) $f_2(x) = f_3(x)$

$$-\frac{17}{11340} \cdot x^2 + \frac{377}{126} \cdot x = 1.62 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0.0146 \cdot x^2 + 4.82 \cdot x$$

$$0 = 1.62 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0.0131 \cdot x^2 + 1.828 \cdot x$$

$$0 = x^3 - 808.64 \cdot x^2 + 112839.51 \cdot x$$

$$(x^2 - 808.64 \cdot x + 112839.51) \cdot x$$

$\Rightarrow 0 = x^2 - 808.64 \cdot x + 112839.51$

Die Lösungsformel liefert:
$x_1 = 629.34$
$x_2 = 179.30$

Der Schnittpunkt entspricht hier der Insel Ile D´Europa:
$P_2(179.30 \mid 488.29)$

3. Methodische Hinweise

Die notwendigen Vorkenntnisse für die Behandlung des Themas sind das Arbeiten mit linearen, quadratischen und kubischen Funktionen und das Lösen von Gleichungssystemen. Die Struktur des Stoffes gliedert sich in eine geographische Betrachtung der Aufgabenstellung, das Suchen von Beschreibungsmöglichkeiten der einzelnen Routen, eine Beschreibung der Routen durch Funktionen und die Durchführung der notwendigen Berechnungen mit Hilfe der Funktionsgleichungen. Dabei stellen die Nutzung von geographischem Kartenmaterial und das Arbeiten mit Maßstäben den übergreifenden Stoffzusammenhang dar.

Die behandelte Aufgabe ist exemplarisch für die Methode der Modellbildung. Dabei wird eine reale Situation in die mathematische Sprache übersetzt, also werden die einzelnen Routen als Funktionen betrachtet. Mit den Schülern ist zu diskutieren, welche Vernachlässigungen zulässig sind. Außerdem ist der Prozess der Rücktransformation wichtig, in dem die errechneten Ergebnisse wieder auf das reale Problem bezogen und deren Sinn erkannt werden.

Die Schüler lernen auch für spätere Anwendungen, wie Funktionen als Möglichkeit einer näherungsweisen Beschreibung beliebiger Linien eingesetzt werden können. Desweiteren wird die Einschätzung von Entfernungen anhand von Kartenmaterial geübt. Im Vordergrund des Rechenweges stehen das Aufstellen von Funktionsgleichungen und der Vergleich von graphischen Darstellungen und rechnerischen Lösungen. Dabei sollte stets der Realitätsbezug hergestellt werden, also bei dieser Aufgabe der Bezug zu Navigationssystemen, die auf funktionale Beschreibungen von Routen angewiesen sind. Das Ziel der Aufgabe muss den Schülern während der gesamten Erarbeitung präsent sein, um das Interesse aufrecht zu erhalten. Die Relevanz der Berechnung des Ortes einer möglichen Kollision ist hier also besonders hervorzuheben.