Niveaustufenorientierte Herausbildung von Modellbildungskompetenzen im Mathematikunterricht

Mike Keune

Ökumenisches Domgymnasium Magdeburg
Hegelstraße 5
39104 Magdeburg

Herbert Henning, Christian Hartfeldt

Institut für Algebra und Geometrie
Fakultät für Mathematik
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Postfach 4120
39016 Magdeburg
Germany

Technical Report Nr. 1
2004

Fakultät für Mathematik

Niveaustufenorientierte Herausbildung von Modellbildungskompetenzen im Mathematikunterricht

Christian Hartfeldt, Herbert Henning, Mike Keune

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort **3**

1 Niveaustufenorientierte Herausbildung von Modellbildungskompetenzen (Mike Keune) **5**

1.1 Mathematische Grundbildung und mathematische Kompetenz 5
1.2 Der Modellbildungskreislauf 6
1.2.1 Phasen der Modellbildung 6
1.3 Werkzeuge im Modellbildungskreislauf 8
1.3.1 Aufgabenklassifikation 10
1.4 Realitäts- und Alltagsbezug von Problemen (für Schüler) 11
1.5 Modellbildungskompetenzen 11
1.6 Niveaustufen von Modellbildungskompetenzen 12
1.7 charakterisierende Fähigkeiten der Niveaustufen 12
1.7.1 Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes 13
1.7.2 Selbständige Modellbildung 13
1.7.3 Metareflexion über Modellbildung 13

2 Unterrichtsreihe und Beispiele **14**

2.1 Unterrichtliche Inhalte 14
2.2 Unterrichtlicher Zugang zur Modellbildung 15
2.3 Unterrichtsbeispiele für den Analysisunterricht 15
2.3.1 „Kalkulierter“ Fallschirmsprung (Christian Hartfeldt) 16
2.3.2 Ganz schön extrem! (Steffen Hammermeister) 25
2.3.3 Die Straße mit dem „Knick“ (Frank Grundmann) 33
2.3.4 „Der Sprung von der Schanze“ (Aileen Schröder) 39
2.3.5 Straßenbau mit „Hosenträger“ (Mirka Stankewitz) 48
2.3.6 Der Schokoladen-Mann (Herbert Henning) 58
2.3.7 Das Waschmittel „Strahleweiß“ (Claudia Riebel) 66

Literaturverzeichnis **71**

0 Vorwort

Nach PISA wurde mathematische Grundbildung (Mathematical Literacy) unter dem Aspekt der Anwendung mathematischen Wissens zur Lösung verschiedener lebensweltbezogener Probleme betrachtet. Bei der Konstruktion der Aufgaben wurde davon ausgegangen, dass sich mathematische Kompetenz „... im verständnisvollen Umgang mit Mathematik und in der Fähigkeit, mathematische Begriffe als „Werkzeuge" in einer Vielfalt von Kontexten einzusetzen ... zeigt.

Es ist notwendig, die mathematischen Kenntnisse für das Erfassen der mathematischen Grundstrukturen von Aufgaben und die Übertragung in mathematische Operationen heranzuziehen. Mathematische Konzepte und Modelle müssen auf alltägliche Problemstellungen angewendet werden. Typische Anforderungen dafür sind Interpretationen von Diagrammen und Grafiken sowie das Analysieren von Sachsituationen.

Mathematische Modellbildung wird zur charakteristischen „Größe" mathematischer Grundbildung.

Die „Fähigkeit zur mathematischen Modellierung" umfasst dabei den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, zu strukturieren; „Mathematisierung" (Übersetzung der „Realität" in mathematische Strukturen); „De-Mathematisierung" (mathematische Modelle im Rahmen der modellierten „Realität" zu interpretieren); mit einem mathematischen Modell zu arbeiten; das Modell zu validieren; das Modell und seine Ergebnisse zu reflektieren, zu analysieren und kritisch zu beurteilen; über das Modell und seine Ergebnisse (einschließlich der Grenzen dieser Ergebnisse) zu kommunizieren; den Prozess der Modellbildung zu beobachten und zu steuern.

Verständiges Umgehen mit Modellbildung muss Teil der Allgemeinbildung sein, die nötige Kompetenz nur dann aufgebaut werden, wenn die Schülerinnen und Schüler während der Schulzeit die Grunderfahrung des Modellierens unserer Welt an einfachen Beispielen selbst erfahren und darüber reflektieren können.

Bei der Herausbldung von Modellbildungskompetenzen machen die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht die Grunderfahrungen.

„*Erscheinungen der Welt um uns*, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, *in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen*, mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbole, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine *deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,* in Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (*heuristische Fähigkeiten*), die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben [19].

Im Rahmen eines Forschungsprojektes wurde im Analysisunterricht einer 12. Klasse eine Unterrichtsreihe konzipiert und von Studentinnen und Studenten realisiert, die auf die Herausbildung von Modellbildungskompetenzen abzielten.

Modellbildung wird in den Rahmen eines allgemeinbildenden Unterrichts, der das Ziel verfolgt, mathematische Kompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern auszubilden, eingeordnet. Es wird eine niveaustufenorientierte Einteilung von Modellbildungskompetenzen in drei Stufen vorgenommen. Das Stufenmodell kann als deskriptives, normatives, und meta-kognitives Hilfsmittel (Beschreibung von Fähigkeiten, Auswahl und Zuordnung von unterrichtlichen Inhalten, kriteriumsorientierte Interpretation von Schülerleistungen, Operationalisierung von Zielsetzungen) Verwendung finden. Eine auf dem Niveaustufenmodell basierende Unterrichstreihe der Sekundarstufe II wurde erarbeitet.

An der Erarbeitung und unterrichtlichen Erprobung der Konzepte waren beteiligt:

Christian Hartfeldt	**Steffen Hammermeister**
Frank Grundmann	**Aileen Schröder**
Mirka Stankewitz	**Claudia Riekel**

Wir bedanken uns bei den Schülerinnen und Schülern der **Klasse 12 c** des Ökumenischen Domgymnasiums Magdeburg für ihre aktive Mitarbeit im Unterricht:

Martin Bulka	**Marcus Futterlieb**	**Sören Hildebrecht**
Stefanie Koch	**Inga Orschinski**	**Daniel Schenk**
Dana Suchold	**Stephanie Gürth**	**Sophia Czerney**
Katharina Grunau	**Juliane Hillmann**	**Leona Kreiser**
Romina Pechau	**Carsten Sichting**	**Frederike Walter**
Monique Vorsprach	**Philipp Freese**	**Julia Heinrich**
Anne Hollstein	**Christoph Neubüser**	**Thomas Pietzsch**
Wiebke Solaß	**Marina Zelenina**	

Unser besonderer Dank für die Unterstützung gilt dem Schulleiter des Ökumenischen Domgymnasiums Magdeburg **Dr. Lührs**.

Herbert Henning Christian Hartfeldt Mike Keune

1 Niveaustufenorientierte Herausbildung von Modellbildungskompetenzen (Mike Keune)

1.1 Mathematische Grundbildung und mathematische Kompetenz

Ziel und Aufgabe des Mathematikunterricht ist es, den Schülerinnen und Schülern Mathematische Grundbildung (mathematical literacy) zu vermitteln. Die Schülerinnen und Schüler sollen allgemeine Kompetenzen erwerben, die die Mathematische Grundbildung charakterisieren. Mathematische Grundbildung im Sinne der OECD bedeutet die „[...] Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundiert mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagierten und reflektierendem Bürger entspricht“ [2, S. 47]
Der Modellbildung ordnet Lamon [13] die Funktion eines Verbindungsgliedes des mathematischen Inhalts, realer Kontexte, mathematischer Kultur und mathematischen Denkens zu.

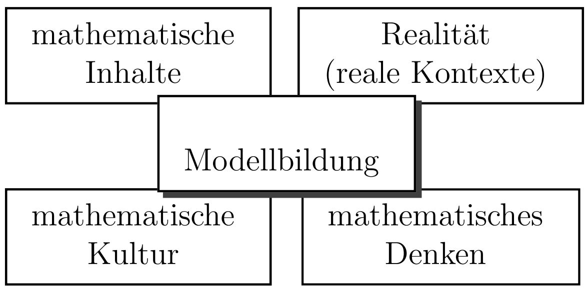


Abbildung 1: Modellbildung als Verbindungsglied

Im Sinne dieses Bindegliedes zwischen (schul-)mathematischen Inhalten, Realität, mathematischer Kultur und mathematischen Denkens ordnet sich Modellbildung in den Rahmen eines allgemeinbildenden Unterrichts ein.
Eine Konkretisierung des Begriffs „Mathematische Kompetenz“ gibt Niss [17] und beschreibt diese als Fähigkeiten in einer Vielfalt inner- und außermathematischer Kontexte und Situationen, in denen Mathematik ein Rolle spielt oder spielen könnte, mathematisch zu handeln (zu verstehen, zu entscheiden und zu denken).
Zur Identifikation und Untersuchung obiger Fähigkeiten unterscheidet Niss acht charakteristische mathematische Kompetenzen. [17]
Unter Modellbildungskompetenz wird in dieser Arbeit eine Gruppe von Kompetenzen (in gradueller Ausprägung) beschrieben, die sich dem Konzept der mathematischen Kompetenz unterordnet. Auch hier wird unter Modellbildungskompetenz eine Überlappung von Kompetenzen verstanden die sich auf Modellbildung beziehen. Es kann somit von einem

Kompetenzmodell für die Domäne mathematische Modellbildung gesprochen werden [16, S. 61ff.].

1.2 Der Modellbildungskreislauf

Im Laufe der vollständigen Bearbeitung eines realen Problems wird ein als Kreislauf darstellbarer Prozess, der als Modellbildung[1] (Modellbildungsprozess) bezeichnet wird, ein oder mehrmals durchlaufen. Es existieren verschiedene Darstellung des Modellbildungskreislaufes in unterschiedlicher Detailliertheit bzw. aus unterschiedlichen Betrachtungsweisen (vgl. [10]). Eine sehr einfache schematische Darstellung der Modellbildung ermöglicht die Unterscheidung von drei Hauptphasen:

- Erstellung des mathematischen Modells,
- Analyse/Lösung des Modells,
- Interpretation und Validierung der Modelllösung in Bezug auf die Problemstellung.

Die einzelnen Phasen sind durch das jeweilige Ergebnis als Zwischenstufen des Modellbildungskreislaufes charakterisierbar. Ebenso können Handlungsmerkmale oder durchzuführende Operationen als charakterisierende Größen für einzelne Phasen herangezogen werden.

1.2.1 Phasen der Modellbildung

1. Phase: Modellbildung beginnt idealtypischer Weise mit dem Vorliegen eines realen Problems bzw. mit dem Interesse an einem Phänomen der uns umgebenden Realität. Üblichweise wird im Mathematikunterricht dieses Problem in Textform vorliegen bzw. das Phänomen verbal beschrieben, die Schülerinnen und Schüler sind aufgefordert, die Problemstellung zu lösen bzw. sich mit dem Phänomen auseinander zusetzen. Während des Prozesses der Untersuchung des Problems werden Mathematisierungen vorgenommen die auf Abstraktionen und Idealisierungen beruhen. Am Ende dieser Phase steht ein mathematisches Modell. Die Darstellungsform des Modells kann variieren und z. B. durch Gleichungen oder Gleichungssysteme, Wertetabellen, graphischen Darstellungen usw. erfolgen. Die Phase des Mathematisierens ist für Schülerinnen und Schüler sicher die Schwierigste im Modellbildungsprozess, da zum einen ein Sachverhalt aus der natürlichen Sprache der Schüler in eine künstliche Sprache der Mathematik übersetzt werden muss. Zum anderen ist die Phase schwierig, da von vornherein nicht feststeht wann und ob überhaupt eine ausreichende Beschreibung (Modell) der Realität für die Problemstellung erreicht ist. Die Phase der Modellfindung erfordert Kreativität, vorausschauendes Handeln, die Verwendung

[1] Im Rahmen dieser Arbeit wird Modellbildung synonym für Modellbildungsprozess verwendet und umfasst immer den gesamten Kreislauf-Prozess. Alternativ hierzu wird auch in anderen Arbeiten der Schritt vom Problem zum Modell als Modellbildung bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit wird diese Handlung als Mathematisieren bzw. Modellieren bezeichnet.

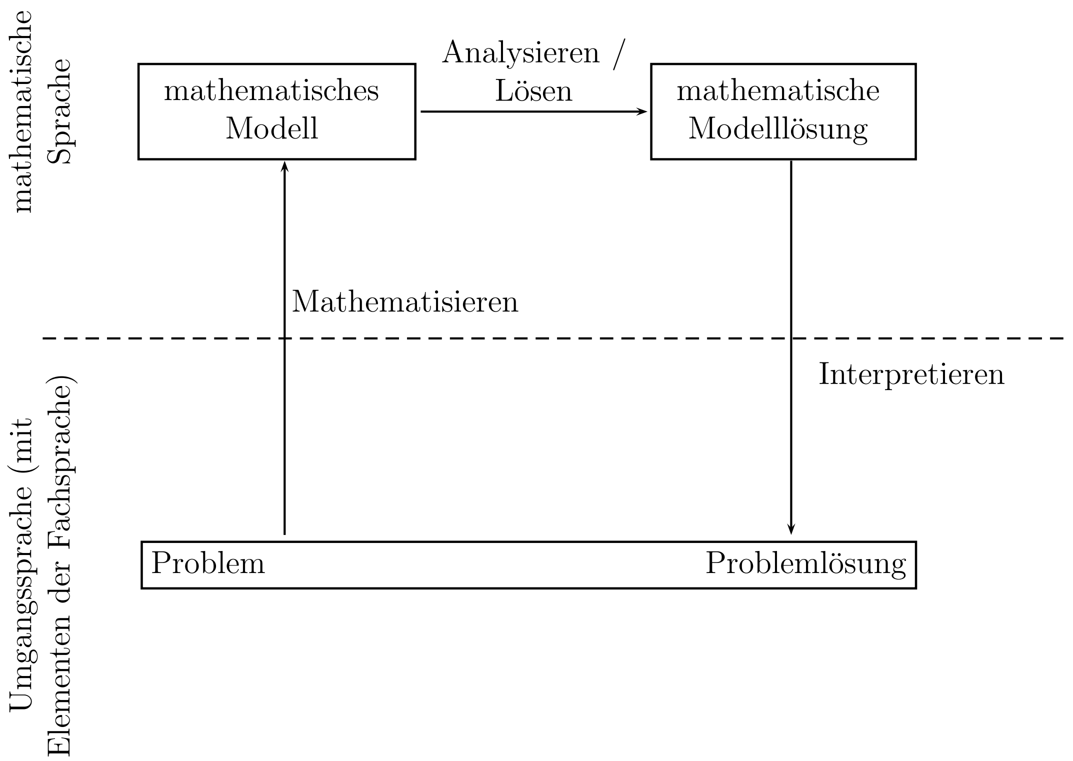


Abbildung 2: einfache Phasendarstellung des Modellbildungskreislaufes

von Basiswissen sowie eine bewusste Reflexion des Prozesses um das Ziel (das aufzustellende Modell) nicht aus den Augen zu verlieren.
In diesem Sinne kontraproduktiv ist die Verwendung von Problemstellung in Form von „eingekleideten Aufgaben“. Bei eingekleideten Aufgaben müssen die Schülerinnen und Schüler nur die „unnötige Hülle“ entfernen und stoßen auf ein zu verwendendes Modell. Häufig werden im Schulunterricht solche eingekleideten Aufgaben als Aufgabenserie verwendet, bei der auch noch immer das gleiche Modell zum Vorschein kommt. Hier kann bei den Schülerinnen und Schüler schnell der falsche Eindruck entstehen, dass man bei realen Problemen nur etwas intensiver suchen muss, um das zugrundliegende „richtige“ (und einzig mögliche) Modell zu finden. Demgegenüber stehen Problemstellungen im Sinne der Modellbildung, die von den Schülerinnen und Schüler die Fähigkeit erfordert selbständig Modelle aufzustellen. Nicht ausgeschlossen ist hierbei, dass auch bei realen Problemen ein „einfaches“ Modell (ähnlich den eingekleideten Aufgaben) zugrundegelegt werden kann.

2. Phase: Ist die Phase des Mathematisierens abgeschlossen und ein (erstes) Modell gefunden, beginnt die Phase der Analyse/Lösung des Modells an deren Ende eine Erkenntnis z. B. in Form einer mathematischen Lösung des Modell steht. Möglich ist als Ergebnis aber auch das Aufstellen von Schlussfolgerungen oder das Abgeben qualitativer Urteile. In dieser Phase sind Werkzeuge wie CAS oder Tabellenkalkulation häufig hilfreich, da sie die den Schülerinnen und Schüler helfen können schnell die

Lösung des Modells zu finden oder z. B. graphische Darstellungen zu erzeugen. Reale Problem sind meist durch ein komplexes Beziehungsgeflecht charakterisiert, welches in der mathematischen Formulierung nicht die im herkömmlichen Schulunterricht häufig anzutreffenden „glatten" Lösungen erlauben.

3. Phase: Es schließt sich die Phase der Interpretation der mathematischen Ergebnisse an. Bezogen auf den Kontext der Problemstellung muss geprüft werden, ob und in wie weit die gefundenen mathematischen Darstellungen brauchbar für die Beantwortung der Problemstellung sind. Wenn man nicht wie bei eingekleideten Aufgaben von der Richtigkeit des gewählten Modells ausgeht, kann man bei der Modellbildung auch nicht von der Brauchbarkeit der mathematischen Ergebnisse von vornherein überzeugt sein.
Es ist ein Prozess des Überprüfens der Schlussfolgerungen und somit auch eine Validierung der Güte des verwendeten Modells notwendig. Didaktisch besonders interessant können hier Problemstellungen sein, die auch nach durchlaufenem Modellbildungsprozess nicht eine Überprüfung in der Form „stimmt bis auf zwei Kommastellen mit der Realität überein" erlauben sondern andere Kriterien erfordern.
Häufig steht am Ende des erstmaligen Durchlaufens des Modellbildungsprozesses die Erkenntnis, dass das Modell noch nicht den Anforderungen entspricht und der Prozess ein weiteres Mal, auf Basis des vorhandenen ersten Ergebnisses, durchlaufen werden muss. Hierbei liegt dann die Annahme zugrunde, dass ein zweiter (oder jeder weitere) Durchlauf eine Verbesserung erbringt.
Auch hier sollte aus didaktischen Gründen eine Problemstellung bearbeitet werden, in der diese Annahme nicht per se als richtig betrachtet werden kann und gezeigt wird, dass ein mehrmaliger Durchlauf des Prozesses auch zur Verschlechterung des Modells führen kann.

Ein schematische Darstellung des Problemlöseprozesses durch Modellbildung welche die Validierung der Ergebnisse, sowie den mehrmaligen Prozessdurchlauf darstellt, ist Abbildung 3. Diese Darstellung unterteilt die 3. Phase in interpretieren der Modelllösung und validieren anhand der gegebenen Situation. Hierbei wird Terminologie von Schupp [15] verwendet und die Darstellung um mehrere Modellstufen erweitert.

1.3 Werkzeuge im Modellbildungskreislauf

Reale Problem und Phänomene zeichnen sich häufig dadurch aus, eine Vielzahl von Einflussgrößen zu besitzen. Ein Bungee-Sprung zum Beispiel scheint in erster Näherung nur von der Masse des Springers, der Elastizität des Seils und der Absprunghöhe abzuhängen. Genauer betrachtet kommen Einflussfaktoren wie Körperhaltung, Bewegungen des Springers, Absprungverhalten, usw. hinzu. Der Versuch einer möglichst genauen Abbildung der Realität in Form eines Modells führt dann dazu, dass dieses Modell aus schulmathematischer Sicht schnell zu kompliziert ist, um von Schülern in der zur Verfügung stehen Zeit bearbeitet zu werden. Häufig wird dann eine zu starke Abstraktion angewandt wie zum Beispiel die Vernachlässigung des Luftwiderstandes beim Sprung. Das Phänomen erscheint

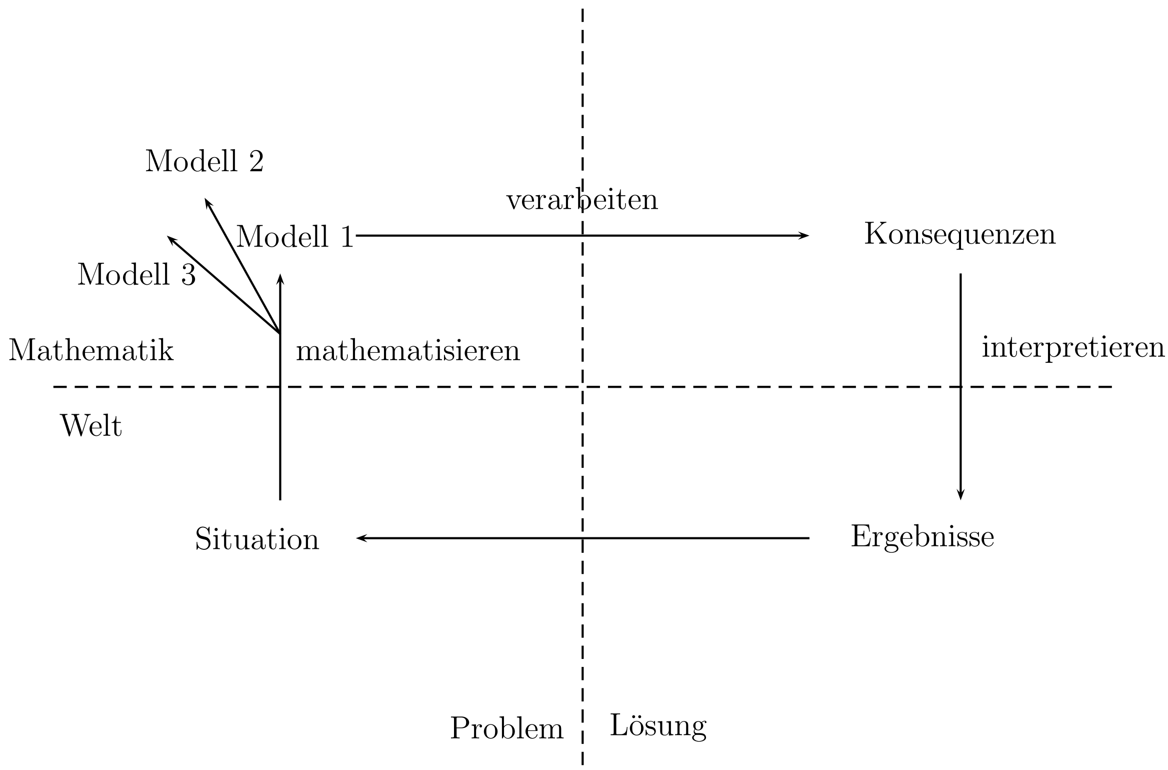


Abbildung 3: Modellbildungskreislauf

dann leicht modellierbar und führt im Beispiel des Bungee-Sprung zum Standardmodell des freien Falls. Allerdings hat dieses Modell dann nur noch wenig mit der Realität gemeinsam, da hier dann auch von der Masse des Springers abgesehen würde, was das Modell nicht mehr brauchbar macht.
Die Verwendung von Werkzeugen ermöglicht die Betrachtung auch komplizierterer Beschreibungen, da z. B. die Ordnung eines Gleichungssystems oder „krumme“ Koeffizienten praktisch keine Rolle spielen. Auch die graphische Darstellung von Funktionen benötigt praktisch keine Zeit. Hinzu kommt der nicht zu vernachlässigende Aspekt der relativen Fehlerfreiheit (zumindest was die technische Ausführung betrifft).
Unterstützend wirken Werkzeuge auch im Sinne des Probierens und Simulierens von Einflussfaktoren. Die Schülerinnen und Schüler können schnell den Einfluss von Faktoren untersuchen und Ausprobieren wie sich einzelnen Veränderungen auswirken. Kritisch muss bemerkt werden, dass es hierbei häufig dazu kommt, dass ein „sinnlose“ Genauigkeit erreicht werden möchte oder „blind“ und ohne Systematik probiert wird. Dabei werden notwenige Intervalle oder Grenzen missachtet. Hier ist es erforderlich einzuwirken und die Schülerinnen und Schüler zu reflektierendem Arbeiten anzuhalten. Grobe Abschätzungen und die ständige bewusste Kontrolle der Arbeitsschritte und Ergebnisse ist erforderlich. Denkbar erscheint hier z. B. in der Sozialform der Gruppenarbeit die Funktion einer „Qualitätsprüfung“. Einem Schüler der Gruppe kann die Aufgabe übertragen werden, die Schritte, Festlegungen und Annahmen sowie die Ergebnisse kritisch zu hinterfragen und nach möglichen Fehler zu suchen. Dies fördert die Kommunikation innerhalb der Gruppe und zwingt die „Modellierer“ ihre Annahmen zu begründen und Ergebnisse zu belegen.
Hauptsächlich erfolgt der Einsatz von Werkzeugen in der Phase der Lösung/Untersuchung des Modells. Aber auch schon bei der Formulierung des Modells und bei der Interpretation bzw. Validierung des Modells können Werkzeuge zum Einsatz kommen. Beispiele hierfür findet man in [12].

1.3.1 Aufgabenklassifikation

Schülerinnen und Schüler haben häufig das Problem ihre Annahmen und Ideen mathematisch (z. B. algebraisch) zu formulieren. Der Transfer von der gesprochenen Sprache der Schüler in die theoretische Sprache der Mathematik bereit häufig Problem bzw. ist fehlerbehaftet. Ebenso bereitet es Schwierigkeiten die mathematischen Modell zu untersuchen und Lösungen zu erhalten. Bei der Verwendung von Werkzeugen im Modellbildungsprozess können diese Schwierigkeiten verringert werden. Zum Beispiel ist es bei der Verwendung einer Tabellenkalkulation als Modellbildungswerkzeug nicht zwingend notwendig Variablen zu definieren und Gleichungen oder Ungleichungen aufzustellen. Die mögliche intuitive Nutzung und eine mögliche Modularisierung kann helfen, oben aufgeführte Schwierigkeiten zu verringern.
Finden Werkzeuge im Modellbildungsprozess Anwendung, können die zu bearbeitenden Problem/Aufgaben und die daraus resultierenden Modelle hinsichtlich der Verwendung von Werkzeugen klassifiziert werden:

- Modelle, in denen große Datenmengen *elementar* verarbeitet werden,

- Modelle, deren Lösung durch *systematisches Probieren* ermittelt werden,
- Modelle, die auf Iteration und *Rekursion* aufbauen, Daten und Datenstrukturen *diskretisiert* werden,
- Modelle als Repräsentation qualitativer und quantitativer Auswertung von Daten, die *funktionalen* Zusammenhängen genügen,
- Modelle durch *Situationssimulation* als dynamisch-prozessuale Betrachtungsweise von Vorgängen, aus denen sich die mathematischen Modelllösungen ableiten lässt.

Beispiele und Erläuterungen zu den Modellklassen findet man in [3, 4, 5] oder [11, 12].

1.4 Realitäts- und Alltagsbezug von Problemen (für Schüler)

Was sind gute Modellbildungsaufgaben? Charakteristisch für gute Aufgaben sind offene Probleme, die im Schritt des Mathematisierens mehr als ein Modell denkbar erscheinen lassen. Probleme, die in der Formulierung bereits das zu verwendende Modell implizieren, bzw. den Prozess des Mathematisierens (als Prozess des Übergangs von der Problemformulierung zum mathematischen Modell) vorwegnehmen, berauben die Aufgabe einer wichtigen Größe. Gerade die Erkenntnis, dass es nicht genau ein richtiges Modell geben muss ist von besonderem Wert für Schülerinnen und Schüler. Die weitverbreitet Sichtweise von Mathematik in einem Schwarz/Weiß-Bild mit nur richtigen oder falschen Ergebnissen bzw. Lösungen entspricht nicht der Realität von Anwendung der Mathematik im Sinne von Modellbildung.
Vielmehr die Einsicht, dass ein aufgestelltes Modell für den Benutzer sinnvoll und nützlich ist, wobei ein anderes Modell für einen anderen Betrachter derselben Problematik ebenso nützlich und sinnvoll sein kann, ist ein wichtiges Element mathematischer Kompetenz. Es gibt so gesehen kein richtiges oder falsches Modell, besser ist hier die Sichtweise von nützlichen oder weniger nützlichen Modellen. Insbesondere kommt dieser Aspekt bei so genannten offenen Aufgabenstellungen zum Tragen. Didaktisch wertvoll erscheinen Aufgaben bzw. Problemstellungen die kein „nachprüfbares" Ergebnis im Sinne eines direkten, messbaren Realitätsvergleichs ermöglichen. Ist den Schülerinnen und Schüler von vornherein klar, dass es keine richtige Lösung (im Sinne von exakt mit der Realität übereinstimmend) gibt, werden sie die Güte des Modells anhand anderer Kriterien bestimmen müssen. Eine Entwicklung eines angemessenen Kriterienkatalogs zur Evaluation des Modellbildungsprozesses gehört zu den erwünschten Fähigkeiten im Modellieren.

1.5 Modellbildungskompetenzen

Unter Modellbildungskompetenz wird eine Gruppe von Kompetenzen (in gradueller Ausprägung) beschrieben, die sich dem Konzept der mathematischen Kompetenz unterordnet. Hier wird unter Modellbildungskompetenz eine Überlappung von Kompetenzen verstanden die sich auf Modellbildung beziehen. Es kann somit von einem Kompetenzmodell für die Domäne mathematische Modellbildung gesprochen werden [17, S. 61ff.].
Es stehen bei der vorgenommen Beschreibung von Modellbildungskompetenzen und deren

charakterisierenden Fähigkeiten hauptsächlich kognitive Merkmale im Vordergrund. Das unten dargestellte Konzept der *Niveaustufen von Modellbildungskompetenzen* (Stufenmodell) verfolgt folgende Ziele (bezüglich der Domäne):

- Beschreibung von Fähigkeiten und ihre graduelle Ausprägung
- Auswahl und Zuordnung von unterrichtlichen Inhalten (Aufgaben)
- kriteriumsorientierte Interpretation von Schülerleistungen
- Operrationalisierung von Zielsetzungen (Erwerb mathematischer Kompetenz/ Modellbildungskompetenz).

Das Stufenmodell kann somit als deskriptives, normatives, und meta-kognitives Hilfsmittel Verwendung finden (vgl. [17]).

1.6 Niveaustufen von Modellbildungskompetenzen

Wir nehmen eine niveaustufenorientierte Einteilung von Modellbildungskompetenzen vor (Niveaustufenmodell):

1. Stufe: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes
2. Stufe: Selbständige Modellbildung
3. Stufe: Metareflexion über Modellbildung

Die vorgenommene Einteilung korrespondiert dabei mit den Kompetenzklassen der PISA-Studie (vgl. [2, S. 50]) bzw. mit dem Kompetenz-Cluster Modell (vgl. [18]). Die OECD charakterisiert in den theoretischen Überlegung zur PISA-Studie drei Kompetenzklassen:

- Kompetenzklasse 1: Wiedergabe, Definition und Berechnung
- Kompetenzklasse 2: Querverbindungen und Zusammenhänge herstellen, um Probleme zu lösen
- Kompetenzklasse 3: Einsichtsvolles mathematisches Denken und Verallgemeinern

1.7 charakterisierende Fähigkeiten der Niveaustufen

Zur Charakterisierung der Stufen werden die folgenden (durch punktuelle unterrichtliche Untersuchungen später noch weiter zu differenzierenden) Fähigkeiten zugeordnet.

1.7.1 Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

Die Niveaustufe des Erkennens und Verstehens des Modellbildungskreislaufs wird charakterisiert durch

- die Fähigkeit den Modellbildungsprozess zu beschreiben
- die Fähigkeit einzelne Phasen zu charakterisieren
- die Fähigkeit einzelne Phasen zu unterscheiden bzw. während eines Modellbildungsprozesses zu lokalisieren.

1.7.2 Selbständige Modellbildung

Die selbständige Modellbildung wird charakterisiert durch

- die Fähigkeit verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln
- die Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven (z. B. Algebra, Geometrie, Stochastik)
- die Fähigkeit zur selbständigen Modellbildung (Informationen abstrahieren; Auswahl und Verknüpfung von Größen; Mathematisieren; Modelllösung; Interpretation)

Der Grad der Kompetenzerweiterung liegt darin, dass die Schüler selbständig ihr Wissen differenziert anwenden, um die einzelnen Phasen der Modellbildung zu durchlaufen.
Ein geringer Grad innerhalb dieser Stufe ist das bloße Ausprobieren verschiedener Lösungsansätze. Bei Änderung oder Erweiterung des Problemkontextes müssen die Schülerinnen und Schüler zu einer Änderung des bisher aufgebauten Modells fähig sein [7].
Ein höherer Grad innerhalb dieser Stufe ist gegeben, wenn selbständig neue Lösungsverfahren (die nicht zum bisherigen Wissensumfang der Schülerinnen und Schüler gehört haben) entwickelt werden.
Eine Kompetenzerweiterung ist darin zu sehen, dass für ein Problem mehrere Modelle gefunden werden bzw. ein Modell mittels Dynamischer Modellbildung verfeinert wird [3].

1.7.3 Metareflexion über Modellbildung

Metareflexion über Modellbildung wird charakterisiert durch

- die Fähigkeit (unabhängig vom konkreten Problem) über Anwendungen der Mathematik zu reflektieren
- die Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses
- die Fähigkeit über den Anlass von Modellbildung (insbesondere ergebnisorientierter Modellbildung) zu reflektieren

- die Fähigkeit Kriterien der Modellbildungsevaluation zu charakterisieren

Auf dieser Stufe werden allgemeine Probleme der Modellbildung erkannt, die Fähigkeit entwickelt kritisch zu beurteilen und allgemeine Zusammenhänge zu erkennen. Es findet eine Reflexion über die Rolle von Modellen innerhalb der Wissenschaft statt. Auf dieser Stufe ist es nicht unbedingt notwendig zuvor ein Problem mittels Modellbildung bearbeitet zu haben. Denkbar ist hier die Analyse von Problemlöseprozessen. D. h. ein fertiges Modell wird untersucht und die gezogenen Schlussfolgerungen bewertet [10, S. 163]. Es werden Kriterien der Modellevaluation untersucht [5].
Das vorgeschlagene Stufenmodell ist unabhängig von der jeweiligen Schul-/ Bildungsstufe und kann zur Untersuchung eines Längsschnittes über Bildungsstufe (Primarstufe, Sekundarstufe (I/II), usw.) eingesetzt werden.
Als weitere Dimension kann zu den Niveaustufen das jeweilige Anforderungs-/Schwierigkeitsniveau der zugrundeliegenden Aufgabe betrachtet werden.

2 Unterrichtsreihe und Beispiele

Zu beantworten sind im Rahmen theoretisch-konzeptioneller Untersuchungen mit punktueller Erprobung in Unterrichtsreihen unter anderem folgende Fragen.

- Was sind Modellbildungskompetenzen?
- Welche Fähigkeiten charakterisieren Kompetenzen?
- Wie lassen sich Niveaustufen der Kompetenzen charakterisieren?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Kompetenzstufen der Modellbildung und den Inhalten der Schulstufen? (vgl. [9])

Bei den unterrichtlichen Beispielaufgaben lassen sich zwei Gruppen unterscheiden:

- Aufgaben die sich nur auf jeweils eine Niveaustufen beziehen
- Aufgaben die sich alle auf alle drei Niveaustufen beziehen.

2.1 Unterrichtliche Inhalte

Ein Vergleich von Modellbildungsbeispielen, skizzierten Unterrichtsreihen, Testreihen etc. in der aktuellen didaktischen Diskussion[2] (vgl. [14]) lassen für die Sekundarstufe die folgenden Problemkreise (aus Sicht realer Anwendungsprobleme) für die schulische Behandlung als interessant erscheinen:

[2]Beispielsweise die Publikationen und Untersuchungen der ICTMA (The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications) welche sich seit nunmehr 20 Jahren mit den Grundlagen, Methoden und Zielen der mathematischen Modellbildung befassen, liefern eine Vielzahl von Beispielen.

- Probleme rund um den Verkehr auf Straße, Schiene, Wasser und Luft
    - Stau, Sicherheitsabstand, Transportkapazität, Energieverbrauch, Routenplanung, Straßen- und Wegeplanung, Straßenüberquerung, Ampelschaltung, Güterverlagerung von der Straße auf die Schiene/das Wasser
- Probleme rund um den Sport
    - Ballspiele, Rekorde
- Probleme rund um die Gesellschaft
    - Ernäherung, Ressourcen, Klima, Geburten- Todesraten, Zukunftsplanung
- Verpackungsprobleme
    - optimale Verpackung, Verpackung für den Konsum/ Transport
- Probleme rund um Preise und Geld
    - Preiskrieg, Preismodelle, Gebühren, Kredite, Rabatte, Sparen
- physikalische Probleme
    - Freie Fall, gebremste Fall, Geschwindigkeit, nichtlineare Probleme
- biologische Probleme
    - Wachstum, Symmetrie

Nicht aufgeführt sind hier Aufgaben- und Problemkreise „innermathematischer Modellbildung“.

2.2 Unterrichtlicher Zugang zur Modellbildung

Ikeda und Stephens [8] unterscheiden zwei Möglichkeiten des unterrichtlichen Zugangs zur Modellbildung. Den ersten Zugang bezeichnen sie als Analytischer Zugang (analytical approach) und charakterisieren ihn durch die Schülertätigkeit der Analyse und Interpretation eines einfachen mathematischen Modells. Einen zweiten Zugang sehen Ikeda und Stephens in der selbständigen Konstruktion eines mathematischen Modells zur Untersuchung eines Problems. Diesen zweiten Zugang bezeichnen sie als Konstruktiven Zugang (constructive approach).

2.3 Unterrichtsbeispiele für den Analysisunterricht

2.3.1 „Kalkulierter“ Fallschirmsprung (Christian Hartfeldt)

Problemstellung

Ein Fallschirmspringer wiegt 100 kg und springt aus dem Flugzeug.
Beschreiben Sie mit verschiedenen Modellen diesen Vorgang und lösen Sie die entsprechenden Aufgaben.

Ziele

Wissensziele: Die Schüler kennen

- die Grundlagen des Arbeitens mit Funktionen,
- physikalische Grundgesetze der Kinematik, Reibungsgesetze, Bewegungsgleichungen für den freien Fall, Newtonsche Axiome,
- den Umgang mit Tabellenkalkulationen (Excel).

Könnensziele: Die Schüler können

- ihr mathematisches Wissen auf einen physikalischen Sachverhalt anwenden,
- mit Excel umgehen, d. h. wissen wie man Daten eingibt, wie man Formeln erstellt und wie man Diagramme erstellt,
- Modelle in verschiedenen Repräsentationsformen aufstellen und bewerten (verbal, symbolisch, algorithmisch),
- Zusammenhänge zwischen den einzelnen Modellen herstellen,
- Numerische Lösungen kontextbezogen interpretieren.

Fachwissenschaftliche Grundlagen

Die Tabellenkalkulation hat in diesem Zusammenhang den Zweck, dass die Schüler vom Rechnen entlastet werden und sich auf die eigentliche Problemstellung konzentrieren können. Das Programm übernimmt somit die Rechnungen. Damit kann ein experimenteller Einstieg in die Problematik gefunden werden.

Physikalischer Hintergrund des Fallschirmsprunges

Zunächst verlässt der Fallschirmspringer in einer bestimmten Höhe (ca. 2000-5000 m) das Flugzeug und besitzt zunächst eine große potentielle Energie. Diese wandelt sich beim Fallen in kinetische Energie um. Hätte man *keinen* Luftwiderstand, so würde die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ betragen. Diese Geschwindigkeit berechnet man aus $a(t) = \ddot{x}(t) = -g \Rightarrow v(t) = \dot{x}(t) = -gt + v_0 \Rightarrow x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$. Unter Beachtung der Anfangsbedingungen ist $v_0 = 0$ und $x_0 = h$. Damit ist $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h$. Die Fallzeit errechnet man aus $x(t) = 0$ und ist $0 = -g/2t^2 + h \Rightarrow t = \sqrt{2h/g}$ und somit die Endgeschwindigkeit $|v| = |-g \cdot \sqrt{2h/g}| = \sqrt{2gh}$.

Nun herrscht im Allgemeinen **Luftreibung** und diese bremst jedoch die Bewegung des Springers mit zunehmender Geschwindigkeit immer stärker ab. Durch den Fallschirm (große Angriffsfläche) wird der Luftwiderstand erheblich vergrößert.

Ein **verbalisiertes Modell** zur Realisierung des Fallschirmsprunges könnte, durch das Unterrichtsgespräch, wie folgt entstehen:

1. Absprung: Fallschirm noch geschlossen. In dieser Phase verrichtet die Gewichtskraft am Springer Beschleunigungsarbeit.
2. Geschwindigkeit nimmt zu, auch der Luftwiderstand nimmt zu. Dadurch verrichtet die Gewichtskraft zunehmend mehr Reibungsarbeit.
3. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit sind die Beträge von Gewichtskraft und Reibungskraft gleich groß. Die Geschwindigkeit nimmt dann nicht weiter zu. Durch den Luftwiderstand wird die potentielle Energie in thermische Energie umgewandelt. Die Gewichtskraft verrichtet ausschließlich Reibungsarbeit.
4. Öffnung des Fallschirmes. Verringerung der Geschwindigkeit durch größere Widerstandskraft. Dabei wird zusätzlich auch der überwiegende Teil seiner kinetischen Energie in thermische Energie umgewandelt.

Folgende Größen sind beim Fallschirmsprung interessant:

- Sprunghöhe des Springers,
- Geschwindigkeit,
- Beschleunigung,
- Grenzgeschwindigkeit beim freien Fall mit ungeöffneten Fallschirm,
- Geschwindigkeit bei der Landung,
- Masse des Fallschirmspringers,
- Fläche des Fallschirmes,
- Aerodynamik,
- Form des Fallschirmspringers,
- Luftdruck,
- Zeitpunkt des Öffnens des Fallschirmes,
- Luftverhältnisse (Wind etc.),
- ...

Didaktische Reflexion

Physikalische Herleitung der zu untersuchenden Größen

Zunächst muss das **mathematische Modell** erstellt werden. Dabei gehen wir von den Grundgesetzen der klassischen Mechanik aus.

Auf den Fallschirmspringer wirkt die konstante Gewichtskraft $F_{\mathrm{G}} = mg$ und die geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft F_{R}. Für große Geschwindigkeiten benutzt man Reibungskräfte, die proportional zu v^2 sind. In guter Näherung gilt

$$F_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2} c_{\mathrm{W}} \rho_{\mathrm{L}} A v^2 \tag{2.1}$$

wobei

- c_W: Widerstandsbeiwert (Zahl), hier $c_W = 1.11$ (hängt vom Profil des umströmten Körpers ab)
- ρ_L: Luftdichte $\rho_L = 1.23\ \mathrm{kg/m^3}$ (bei $p_0 = 1013\ \mathrm{hPa}$),
- A: Fläche des fallenden Gegenstandes
  - Fallschirm zusammengepackt: $A = 1\ \mathrm{m}^2$,
  - Fallschirm entpackt: $A = 40\ \mathrm{m}^2$,
- v: Fallgeschwindigkeit.

Um die Bewegungsgleichung zu ermitteln, benutzt man das 3. Newtonsche Axiom (actio = reactio)[3] und erhält für die resultierende Kraft

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{R}} = mg - \frac{1}{2} c_{\mathrm{W}} \rho_{\mathrm{L}} A v^2,$$

also

$$ma = mg - \frac{1}{2} c_{\mathrm{W}} \rho_{\mathrm{L}} A v^2 \qquad \Big| : m$$

$$\Rightarrow a = \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} = g - \frac{1}{2} \frac{c_{\mathrm{W}} \rho_{\mathrm{L}} A v^2}{m}. \tag{2.2}$$

Damit hat man eine explizite Darstellung der Geschwindigkeit (rechnerisches Modell).

Aus (2.2) kann man einer der interessierenden Größen, nämlich die **Endgeschwindigkeit** v_t berechnet. Fällt der Körper lange genug, so gleichen sich F_R und F_G aus, d. h. dann ist $a = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Dann folgt

$$0 = mg - \frac{1}{2} c_{\mathrm{W}} \rho_{\mathrm{L}} A v_t^2 \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{2mg}{c_{\mathrm{W}} \rho_{\mathrm{L}} A}}.$$

Um den Geschwindigkeitsverlauf zu berechnen, benötigt man die Integralrechnung, da eine Differentialgleichung zu berechnen ist. Dieses konnten die Schüler noch nicht. Deshalb wurde ein numerisches Modell verwendet.

[3] Bei zwei Körpern, die nur miteinander, aber nicht mit anderen Körpern wechselwirken, ist die Kraft $\vec{F}_1$ auf den einen Körper entgegengesetzt gleich der Kraft auf den anderen Körper. Newton formuliert

$$\textit{actio} = \textit{reactio} \Leftrightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Einführung in EXCEL anhand der Aufgabe

Die Schüler benötigen zur Lösung der Aufgabe Kenntnisse und Fertigkeiten im

- Eingeben von Daten,
- Eingeben von Formeln,
- Felder umbenennen,
- Felder automatisch ausfüllen lassen,
- Graphen erstellen,

Es werden gemeinsam die Ausgangsdaten zunächst einmal eingeben:

$x(0)$	$=$	0.0	m
$v(0)$	$=$	0.0	m/s
Δt	$=$	0.1	s
g	$=$	9.81	$\mathrm{m/s^2}$
m	$=$	100	kg
A	$=$	1	$\mathrm{m^2}$
ρ_L	$=$	1.23	$\mathrm{kg/m^3}$
c_W	$=$	1.11	

Feste Daten sind g, $v(0)$, $x(0)$, ρ_L und c_W.
Variiert werden kann an m, A, Δt.
Die Felder können dann umbenannt werden, sodass die gleichen Bezeichnungen wie in Formel (2.2) vorhanden sind.

Lösungsalgorithmus in Excel

In EXCEL soll nun die folgende Tabelle erstellt werden:

t in s	a in $\mathrm{m/s^2}$	$v(t)$ in m/s	$x(t)$ in m
0	9.81		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Zahl	0	Konstante	weiter steigend

Dieses ist das **numerisches Modell**.

Eingabe der Formeln in den Spalten und anschließend automatisches Ausfüllen:

- t in s: 0 muss eingegeben werden (erstes Feld). Dann kann dieses Feld mit Δt addiert werden und automatisch ausfüllen.
- a in m/s^2: Einfügen der Formel (2.2) und ausfüllen.
- $v(t)$ in m/s: Hier wird **Halbschrittverfahren** verwendet. Man wählt als Schätzwert für die Geschwindigkeit im Intervall nicht den Anfangswert sondern den Wert zur Mitte des Schrittes. Die Beschleunigung wird gemittelt aus Anfangs- und Endwert. Mit diesen Schätzwerten ergibt sich eine wesentliche Verbesserung der Vorhersage. Die Formel lautet:
$$v(t) = \text{Anfangsgeschwindigkeit} + \frac{\text{zugehörige Beschleunigung} \cdot \Delta t}{2}.$$
- $x(t)$ in m: Anfangsweg eingeben. Weitere Felder füllen sich aus nach
$$x(t) = \text{Anfangsweg} + \text{zugehörige Geschwindigkeit} \cdot \Delta t.$$

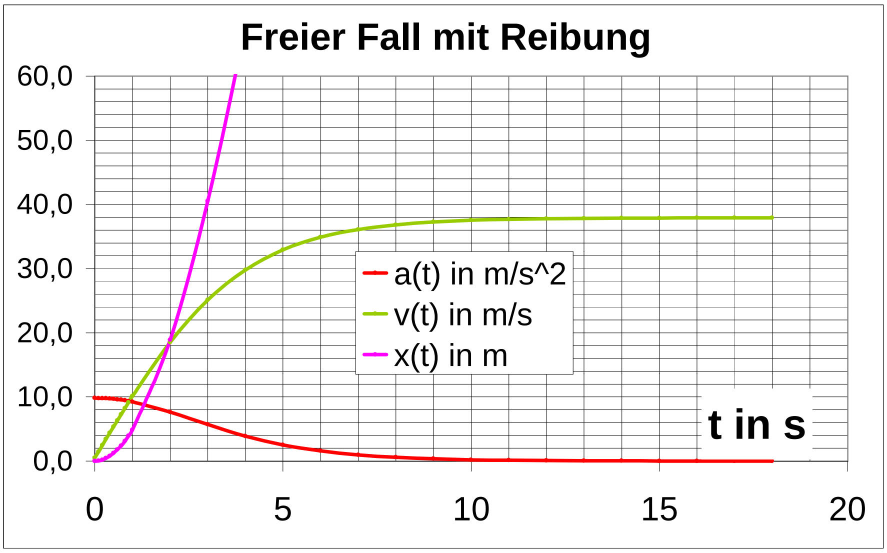
$$\boxed{\begin{aligned}
v'_{\text{alt}} &= v_{\text{alt}} + \frac{a \cdot \Delta t}{2} \\
t_{\text{neu}} &= t_{\text{alt}} + \Delta t \\
F &= m \cdot g - 0.5 \cdot c_{\text{W}} \cdot A \cdot \rho_{\text{L}} \cdot (v'_{\text{alt}})^2 \\
a &= \frac{F}{m} \\
x_{\text{neu}} &= x_{\text{alt}} + v'_{\text{alt}} \cdot \Delta t \\
v_{\text{neu}} &= v'_{\text{alt}} + a \cdot \Delta t
\end{aligned}}$$

Variation der Ausgangsdaten: Verändern von m, A, Δt.

Folgende Ergebniss müssen aus der Tabelle ersichtlich werden:

- Es gibt eine Grenzgeschwindigkeit für große Zeiten, welche von der Masse und Fläche abhängen.
- Körper fällt schneller, je kleiner die Fläche ist.
- Körper fällt bei konstanter Fläche schneller, je schwerer dieser ist.

Graphische Auswertung: Mittels EXCEL kann dieses auch graphisch ausgewertet werden.



Methodische Hinweise

Die Stoffeinheit ist wegen des physikalischen Themas für eine Behandlung im Mathematikunterricht relativ schwierig. Für einen Modellbildungsprozess ist sie aber sehr gut geeignet, da sehr viele verschiedene Modelle vorkommen und die Möglichkeit somit besteht, den Modellbildungsprozess zu beschreiben und einzelne Phasen charakterisiert werden können. So kann man zunächst das **verbalisierte Modell** im Unterrichtsgespräch behandeln. Dieses wurde von den Schülern auch sehr gut erbracht. In diesem Zusammenhang konnten auch die charakterisierenden Größen ermittelt werden. Nach Klärung des verbalisierten Modells konnte anschließend die Fallgeschwindigkeit eines Körpers im freien Fall berechnet werden. Hierbei benutzten die Schüler eine Formelsammlung. Diese Geschwindigkeit ist deshalb berechnet worden, um nämlich später damit die Endgeschwindigkeit im freien Fall mit Reibung zu vergleichen und Modellkritik auszuführen (Kompetenzklasse 2).
Das **mathematische Modell** wurde anschließend aus dem 3. Newtonschen Axiom hergeleitet. Dieses war für die Schüler schwierig, da diese Betrachtungen im Physikunterricht nicht mehr ausführlich behandelt wurden. Man erhielt die Beschleunigung und somit eine Differentialgleichung. Diese können die Schüler nicht lösen, Deshalb wurde dann ein **numerisches Modell** verwendet, wozu zur Durchführung Excel bereitstand. Da die Schüler im Umgang mit Excel unsicher waren, wurde dieses gemeinsam durchgeführt. Das viele Schüler die Thematik nicht verstanden haben, wurde klar, als die Ergebnisse grafisch

veranschaulicht wurden. So wollten einige hier ein Balkendiagramm verwenden. Richtig wäre ein funktionaler Zusammenhang und somit ein Funktionsdiagramm. Dieses wurde anschließend noch gezeichnet. Dennoch wurde in der anschließend foglenden Zusammenfassung der verschiedenen Modelle festgestellt, dass die Schüler den Modellbildungsgang verstanden hatten, aber in der Thematik und Reflexion zwischen der Mathematik und Physik Defizite zeigte (Metareflexion über die Modellbildung).

Weitere Unterrichtsmittel

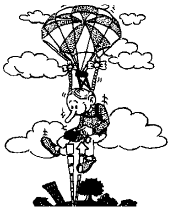
Freier Fall - mit Reibung

Methode der kleinen Schritte - Halbschrittverfahren

Anfangswerte

x(0) =	0,0	m
v(0) =	0,0	m/s
Δt =	0,1	s
g=	9,81	m/s^2
m=	100	kg
A=	1,0	m^2
ρ=	1,23	kg/m^{-3}
c_w=	1,11	

Variation der Anfangswerte in der blauen Spalte



Algorithmus

$v_{alt}' = v_{alt} + a*\Delta t/2$

$t_{neu} = t_{alt} + \Delta t$

$F = m*g - 0{,}5*c_w*A*\rho*(v_{alt}')^2$

$a = F/m$

$x_{neu} = x_{alt} + v_{alt}'*\Delta t$

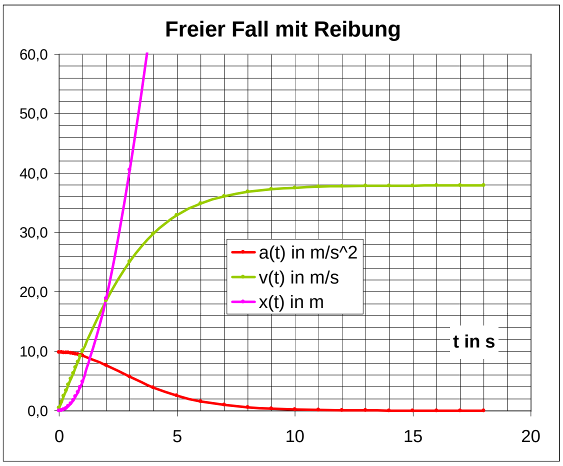
$v_{neu}' = v_{alt}' + a*\Delta t$

t in s	a in m/s^2	v(t) in m/s	x(t) in m
0	9,8	0,5	0,0
0,1	9,8	1,5	0,0
0,2	9,8	2,5	0,2
0,3	9,8	3,4	0,4
0,4	9,7	4,4	0,8
0,5	9,7	5,4	1,2
0,6	9,6	6,3	1,8
0,7	9,5	7,3	2,4
0,8	9,4	8,2	3,1
0,9	9,3	9,2	3,9
1	9,2	10,1	4,9
2	7,7	18,5	18,9
3	5,7	25,1	40,5
4	3,9	29,8	67,9
5	2,5	32,9	99,2
6	1,6	34,9	133,1
7	1,0	36,1	168,5
8	0,6	36,8	205,0
9	0,3	37,3	242,0
10	0,2	37,5	279,4
11	0,1	37,7	317,0
12	0,1	37,8	354,8
13	0,0	37,8	392,6
14	0,0	37,9	430,4
15	0,0	37,9	468,3
16	0,0	37,9	506,2
17	0,0	37,9	544,1
18	0,0	37,9	582,0

<u>Hinweis</u>

Nur jeder 10. berechnete Wert

wird in der Tabelle dargestellt!



2.3.2 Ganz schön extrem! (Steffen Hammermeister)

Problemstellung(en)

1. Jedem Bewohner der Erde soll ein Stück Land zugeteilt werden. Wie groß kann dies maximal sein?
2. Das von der Sonne ausgesandte Licht braucht bis zur Erde eine Zeit von 500 Sekunden. Welche Strecke legt die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne innerhalb eines Jahres zurück?
3. Von einer handelsüblichen Dose (z. B. Coladose) mit einem Volumen von $V = 0,33\ell$ ist diejenige Form zu berechnen, die einen minimalen Blechverbrauch garantiert.
4. Ein Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach oben geworfen. Nach wie viel Sekunden erreicht er seinen höchsten Punkt?

Ziele

Wissensziele: Die Schüler kennen

- die Grundlagen des Arbeitens mit Funktionen,
- die Modellbildung als Erkenntnismethode,
- das Verfahren zur Lösung von Extremwertaufgaben.

Könnensziele: Die Schüler können

- Extrem- und Wendestellen ganzrationaler Funktionen selbstständig bestimmen,
- ihr mathematisches Wissen auf einen außermathematischen Sachverhalt anwenden,
- Modelle in verschiedenen Repräsentationsformen aufstellen und bewerten (verbal, symbolisch, algorithmisch),
- Zusammenhänge zwischen den einzelnen Modellen herstellen,
- ihr Wissen über die Differentialrechnung auf Extremwertaufgaben anwenden.

Fachwissenschaftliche Grundlagen

- Das erste in dieser Stunde behandelte Problem (Problem der Landmasseverteilung) sollte keine großen Voraussetzungen benötigen. Unter der Annahme, dass die Erde eine Kugel ist, müssen die Schüler die Formel zur Berechnung der Oberfläche einer Kugel kennen, also $A = 4\pi r^2$.

- Die Frage nach dem Weg, den die Erde während eines Jahres um die Sonne zurücklegt, fordert den Schülern ein wenig physikalisches Wissen ab. Man nimmt an, die Bahn sei kreisförmig, sodass sich $\ell = 2\pi r$ als Bahnlänge ergibt und man den benötigten Radius r aus dem Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung erhält, hier also $r = ct$ (c - Lichtgeschwindigkeit, t - Zeit, die das Licht von der Sonne zur Erde benötigt).
- Problem 3 führt die Schüler in das Gebiet der Extremwertaufgaben ein. Sie müssen in diesem Fall erkennen, dass es eine Größe gibt (hier die Oberfläche der Dose), die ein Extremum annimmt. Um dieses bestimmen zu können, müssen sie in der Lage sein, eine Hauptbedingung, eine oder mehrere Nebenbedingungen sowie die daraus resultierende Zielfunktion aufzustellen. Von dieser Zielfunktion sollten die Schüler dann mit Hilfe des Kalküls der Differentialrechnung das Extremum der Dosenoberfläche bestimmen können.

Didaktische Reflexion

Zur Reaktivierung des Wissens der Schüler über die Differentialrechnung wurde zu Beginn der Stunde folgende Aufgabe gerechnet.

Gegeben sei die ganzrationale Funktion dritten Grades

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8.$$

1. Was lässt sich aus dem Grad des Polynoms auf die Anzahl der Extrem- und Wendestellen schließen?
2. Berechnen Sie die lokalen Extrempunkte der Funktion.
3. Weisen Sie nach, dass der Punkt $W(1,5|1)$ der Wendepunkt dieser Funktion ist.

Die Schüler lösten diese Aufgabe in der vorgegebenen Zeit von etwa 10 Minuten. Die Ergebnisse wurden anschließend an der Tafel zusammengefasst und der Graph dieser Funktion als Folie aufgelegt (siehe weitere Unterrichtsmittel).

$$f'(x) = 12x^2 - 36x + 24$$
$$f''(x) = 24x - 36$$
$$f'''(x) = 24$$
$$\underline{\underline{H(1/2)}}$$
$$\underline{\underline{T(2/0)}}$$

Problem der Landmasseverteilung

Die Bearbeitung von **Problem 1** führte zu folgenden Erkenntnisse:

1. Einflussgrößen
   - Erdradius r
   - Bevölkerung B
   - Erdoberfläche f
   - Fläche der zugeteilten Landparzelle l
2. Modellannahmen
   - $r = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
   - $B = 6 \cdot 10^9$
   - Erde ist kugelförmig
3. Modell
$$\ell = \frac{f}{B} = \frac{4\pi r^2}{B}$$
4. Lösung
$$\ell = \frac{4\pi(6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6 \cdot 10^9} = \frac{4\pi 40,5769 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}{6 \cdot 10^9}$$
$$\underline{\underline{\ell = 84.984 \text{ m}^2 = 8,5 \text{ ha}}}$$
5. Modellfehler
   - Erde keine Kugel
   - Gebirge unbewohnbar
   - nur 25 Prozent Landmasse
$$\Rightarrow \ell = \frac{\frac{1}{4}4\pi r^2}{6 \cdot 10^9} = 21.246 \text{ m}^2 = 2,1 \text{ ha}$$

Weg der Erde um die Sonne

Zur Beantwortung der Frage, welchen Weg die Erde im Verlauf eines Jahres um die Sonne zurücklegt (**Problemstellung 2**), wurde den Schülern zunächst 5 Minuten Zeit eingeräumt, um selbstständig eine Lösung dieses Problems zu finden. Auf Grund einiger Unklarheiten darüber, wozu die Zeit von 500 Sekunden gegeben war und die Schüler den mittleren Bahnradius Erde-Sonne im Tafelwerk nachschlugen, wurde die Aufgabe im Endeffekt im Lehrer-Schüler-Gespräch gelöst.

1. Einflussgrößen
   - Lichtgeschwindigkeit c
   - Zeit t
   - mittlerer Erdbahnradius r
   - Länge der Erdbahn l
2. Modellannahmen
   - Erde bewegt sich auf Kreisbahn
   - $c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
3. Modell

$$\ell = 2\pi r$$
$$r = ct$$
$$\Rightarrow \ell = 2\pi ct$$

4. Lösung

$$\ell = 2\pi ct = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 500 \text{ s}$$
$$\underline{\underline{\ell = 9,4 \cdot 10^{11} \text{ m}}}$$

5. Modellfehler
   - Erdbahn ist eine Ellipse
   - r ist nur mittlerer Erdbahnradius

Minimaler Materialverbrauch bei einer Dose

An Hand dieser Aufgabe (**Problemstellung 3**) wurde den Schülern eine Einführung in die Lösung von Extremwertaufgaben geboten. Zur Vermittlung der Vorgehensweise beim Lösen solcher Aufgaben wurde den Schülern ein Arbeitsblatt ausgehändigt (siehe weitere Unterrichtsmittel). Die Aufgabe wurde anschließend im Lehrer-Schüler-Gespräch gelöst.

1. Hauptbedingung

$$A_O = A_O(r,h) = 2\pi r(r+h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

2. Nebenbedingung

$$V = 330ml = 330cm^3$$
$$330 = \pi r^2 h \Rightarrow \underline{h = \frac{330}{\pi r^2}}$$

3. Zielfunktion

$$A_O(r) = 2\pi r \frac{330}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$
$$\Rightarrow A_O(r) = 660r^{-1} + 2\pi r^2$$

4. Extremwertbestimmung

$$A_O'(r) = -660r^{-2} + 4\pi r$$
$$A_O''(r) = 1320r^{-3} + 4\pi$$
$$A_O'(r) = 0 = -660r^{-2} + 4\pi r$$
$$660r^{-2} = 4\pi r \Rightarrow \underline{r = \left(\frac{660}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3,75}$$
$$A_O''(3,75) = 37,6 > 0$$

$\Rightarrow$ lokales Minimum

5. Ergebnis

$$\underline{\underline{r = 3,75 \text{ cm}}}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{h = 7,49 \text{ cm}}}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{A_O = 264,8 \text{ cm}^2}}$$

Wurf nach oben

Die Lösung von **Problem 4** führte zu folgendem Modellansatz:

„Wurf nach oben“

$$s(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$$
$$s'(t) = v_0 - gt$$
$$s''(t) = -g$$
$$0 = s'(t) = v_0 - gt$$
$$gt = v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} = 2s$$
$$s''(2s) = -g < 0$$

$\Rightarrow$ Lokales Maximum
Nach 2 Sekunden erreicht der Körper seinen höchsten Punkt. Er fliegt $s(2s) = 20$ m hoch.

Methodische Hinweise

Das Problem der Verteilung der Landmasse unter allen Erdbwohnern war als Einstiegsaufgabe konzipiert. Die Schüler erkannten schnell die nötigen Voraussetzungen und konnten selbstständig ein Modell aufstellen und lösen. Auch die Fehler des Modells wurden sehr gut erkannt und trugen zu dessen Verbesserung bei. An Hand dieser Aufgabe wurde den Schülern auch noch einmal der Modellbildungsprozess nahe gebracht (vgl. Kapitel 1 von Mike Keune).

Die Berechnung der Länge der Erdbahn bereitete den Schülern ebenfalls keine Probleme. Jedoch ist darauf hinzuweisen, dass man bei dieser Aufgabe das Tafelwerk nicht erlauben sollte. Es zeigte sich, dass die meisten Schüler den mittleren Abstand Erde-Sonne nachschlugen und sich ihnen daher die Notwendigkeit des gegebenen Zeitwertes nicht erschloss. Dieser war jedoch dazu gedacht, mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit den Erdbahnradius zu berechnen. Nach Besprechung der Aufgabe konnten die Schüler an Hand dieser die Modellbildungsphasen selbstständig erkennen und auch charakterisieren.

Zur Einführung von Extremwertproblemen eignet sich die Aufgabe zur Bestimmung des minimalen Blechverbrauchs einer Dose besonders. Ein Verfahren zur Lösung solcher Extremwertaufgaben wurde den Schülern in Form eines Arbeitsblattes gegeben und dieses dann an Hand der Aufgabenstellung ausführlich besprochen. Auch bei dieser Aufgabe konnten die Lernenden die Modellbildungsphasen nachvollziehen und selbstständig erläutern. Des

Weiteren erkannten die Schüler an der Lösung, dass es sich nur um ein Modell handelte, denn die errechnete Form trifft auf tatsächliche Dosen nicht zu.

Weitere Unterrichtsmittel

Folie

1. Gegeben sei die ganzrationale Funktion dritten Grades

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8.$$

   (a) Was lässt sich aus dem Grad des Polynoms auf die Anzahl der Extrem- und der Wendestellen schließen?

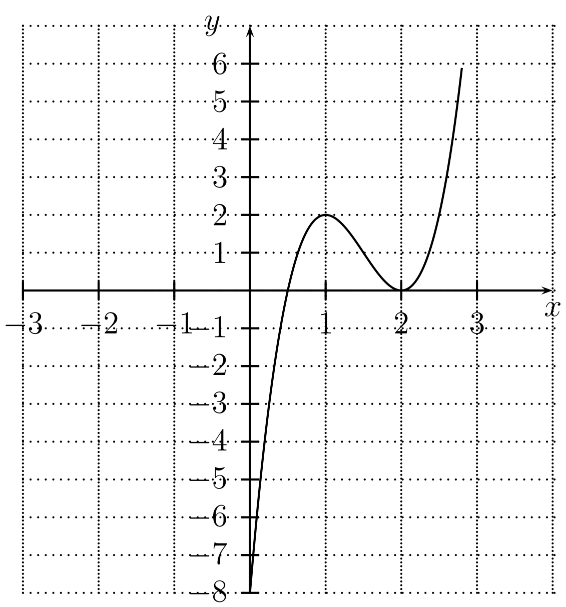
   (b) Berechnen Sie die lokalen Extrempunkte der Funktion.

   (c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $W(1,5|1)$ der Wendepunkt dieser Funktion ist.

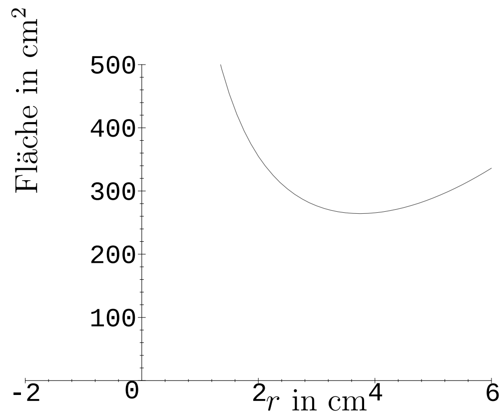
2. Jedem Bewohner der Erde soll ein Stück Land zugeteilt werden. Wie groß kann dies maximal sein?

3. Das von der Sonne ausgesandte Licht braucht bis zur Erde eine Zeit von 500 s. Welche Strecke legt die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne innerhalb eines Jahres zurück?

Folie



Folie



Schrittfolge zum Lösen von Extremwertaufgaben:

Arbeitsblatt

1. Aufstellen der **Hauptbedingung**
   Welche Größe soll einen Extremwert annehmen? (z. B. Volumen, Oberfläche...)

2. Aufstellen der **Nebenbedingung(en)**
   Zwischen den Variablen, die in der Hauptbedingung vorkommen, wird eine Beziehung hergestellt. (z. B. Satz des Pythagoras, Strahlensätze, Flächen- und Volumenformeln...)

3. Aufstellen der **Zielfunktion**
   Mit Hilfe der Nebenbedingung(en) wird die Hauptbedingung so umgeformt, dass sie nur noch die Abhängigkeit von einer Variablen aufweist. Die Definitionsmenge ist zu beachten.

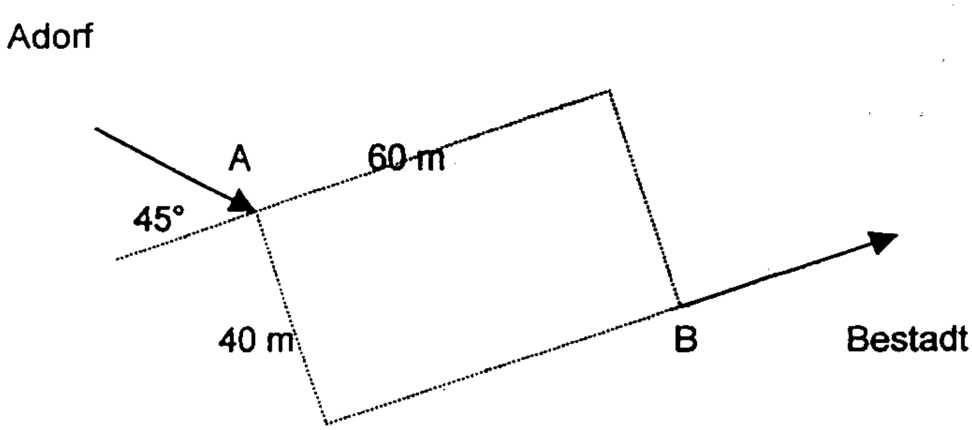
4. **Bestimmen der Extremwerte** der Zielfunktion

5. Formulieren der **Ergebnisse**
   (Einheiten beachten!)

2.3.3 Die Straße mit dem „Knick“ (Frank Grundmann)

Problemstellung

Im Planungsbüro der Firma STRABAKUCK trifft ein Auftrag ein: Eine aus Richtung Adorf kommende Straße endet zur Zeit im Punkt A. Sie muss in einem Bogen in die Straße nach Bestadt übergeleitet werden; ab dem Punkt B ist diese Straße schon fertig gestellt. Die Anschlussstellen A und B liegen an den Ecken eines Rechtecks von 40 m × 60 m, wobei die Straße nach Bestadt sich im Punkt B um 45 Grad nach links wendet.



Ziele

Wissensziele: Die Schüler kennen

- die Modellbildung als Erkenntnismethode
- die Phasen der Modellbildung

Die Schüler erkennen

- die Problematik der Modellgrößen, -genauigkeit und -übersichtlichkeit

Könnensziele: Die Schüler können

- Modelle aus verschiedenen Zusammenhängen ableiten
- Modelle überarbeiten

Fachwissenschaftliche Grundlagen

Zur Behandlung der Straßen - Planung ist es notwendig eine Funktion an gegebene Werte anzupassen. Im Ergebnis erfolgt eine Koeffizientenbestimmung für eine gegebene Funktion in Abhängigkeit von deren Gestalt.

Die gegebenen Werte beziehen sich im ersten Schritt auf Funktionswerte $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$. Die Anzahl und die Qualität der Werte lassen sich beliebig erhöhen (z.B. Berücksichtigung der Fliehkraft zur Bestimmung der maximalen Krümmung $[f''(x)]$, Berücksichtigung einer angewinkelten Bauweise der Fahrbahn zur Erhöhung der zulässigen Krümmung). Bei den behandelten und am einfachsten zu parametrisierenden Funktionen der Polynome n-ten Grades ist zur Lösung des Problems ein Gleichungssystem $(n+1)$-ter Ordnung zu lösen.

Didaktische Reflexion

Die Bestimmung der Größen hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab. Zur Vereinfachung wird hier der Punkt A als Koordinatenursprung definiert. Die zu Adorf führende Straße fällt unter einem Winkel von 135° auf die positive x-Achse. Der Maßstab wird mit 1 LE : 10 m festgelegt.

Unter diesen Annahmen ergeben sich die folgenden Größen, die von den Schülern selbst zu ermitteln sind:

$$f(0) = 0, \quad f(6) = -4, \quad , f'(0) = -1, \quad f'(6) = 0.$$

Bei diesen Werten ist es notwendig eine Funktion dritter Ordnung für die Lösung des Problems zu verwenden. Ein schrittweises Herangehen durch das zeitweilige Vernachlässigen von Größen ist im Hinblick auf die Modellreflektion und Modellverbesserung sinnvoll.

Berechnung der Modelle

<u>1. Schritt: Lineares Modell</u>

Als Ansatzfunktion wird eine Gerade y_1 gewählt:

$$y_1 = a_1 \cdot x + a_0.$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet unter Verwendung der beiden Funktionswerte:

$$\begin{aligned} -4 =& a_1 \cdot 6 + a_0 \\ 0 =& a_1 \cdot 0 + a_0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$y_1 = -\frac{2}{3} \cdot x + a_0.$$

Das Eintragen dieser Funktion in das gewählte Koordinatensystem verdeutlicht zwei Knicke (Stellen an denen die Funktion nicht differenzierbar ist) an den Übergängen.

<u>2. Schritt: Quadratisches Modell</u>

Als Ansatzfunktion wird eine Quadratische Funktion y_2 gewählt:

$$y_2 = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet unter Verwendung der beiden Funktionswerte und der Ableitung im Punkt A (Version a):

$$\begin{aligned}-4 &= a_{2a} \cdot 6^2 + a_{1a} \cdot 6 + a_{0a} \\ 0 &= a_{2a} \cdot 0^2 + a_{1a} \cdot 0 + a_{0a} \\ -1 &= 2 \cdot a_{2a} \cdot 0 + a_{1a}\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$y_{2a} = \frac{1}{18} \cdot x_2 - x.$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet unter Verwendung der beiden Funktionswerte und der Ableitung im Punkt B (Version b):

$$\begin{aligned}-4 &= a_{2b} \cdot 6^2 + a_{1b} \cdot 6 + a_{0b} \\ 0 &= a_{2b} \cdot 0^2 + a_{1b} \cdot 0 + a_{0b} \\ 0 &= 2 \cdot a_{2b} \cdot 6 + a_{1b}\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$y_{2b} = \frac{1}{9} \cdot x^2 - \frac{4}{3} \cdot x.$$

Eine dritte Möglichkeit besteht, indem die beiden Ableitungen sowie ein Funktionswert vorgegeben werden. Da diese Variante jedoch das Ziel (den Ort) verfehlt wird sie hier nicht berechnet.

<u>3. Schritt: Kubische Funktion</u>

Als Ansatzfunktion wird eine Quadratische Funktion y_3 gewählt:

$$y_3 = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet unter Verwendung der beiden Funktionswerte und der Ableitungen in den Punkten A und B:

$$\begin{aligned}-4 &= a_3 \cdot 6^3 + a_2 \cdot 6^2 + a_1 \cdot 6 + a_0 \\ 0 &= a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 \\ -1 &= 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 2 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + a_1 \\ 0 &= 3 \cdot a_3 \cdot 6^2 + 2 \cdot a_2 \cdot 6 + a_1\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$y_3 = \frac{1}{108} \cdot x^3 - x.$$

Die Graphen zu den Funktionen sind im Anhang verfügbar.

Im Zusammenhang mit der Lösung der Aufgabe können verschiedene Fachbegriffe wiederholt und hinsichtlich des Verständnisses überprüft werden.

- Bei der Bildung der Ableitungen sind die Ableitungsregeln anzuwenden.

- Bei der Ermittlung der gegebenen Größen sind die Begriffe Nullstelle und Extremum mit den hierfür notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen notwendig.
- Bei der Lösung der Gleichungssysteme können Begriffe wie Lösbarkeit und Eindeutigkeit wiederholt werden.

Verwendung von Begriffen der Modellbildung

Die Begriffe der Modellbildung und der Modellbildungskreis wurden in den vorangegangenen Stunden bereits eingeführt und genutzt. Jedoch zeigten die Schüler noch Schwächen in der konsequenten Abgrenzung der Phasen.

Mit Hilfe einer Aufteilung der zu lösenden Aufgabe in die entsprechenden Phasen ist eine Verdeutlichung möglich.

Abgrenzung der Phasen:

1. Ermittlung des mathematischen Modells durch Abstraktion aus der Wirklichkeit
   - Bestimmung der gegebenen Größen
   - Bestimmung der Ordnung der zu ermittelnden Gleichung
2. Lösung des mathematischen Problems
   - Bestimmung der Koeffizienten
3. Interpretation der Ergebnisse
   - Eintragen der ermittelten Funktion in das Koordinatensystem
   - Bestimmung von Schwachpunkten in der Lösung
4. Verbesserung des Modells
   - Erhöhung der Anzahl der gegebenen Größen
   - Erhöhung der Ordnung der zu ermittelnden Gleichungen
   - Diskussion weiterer Verbesserungsansätze

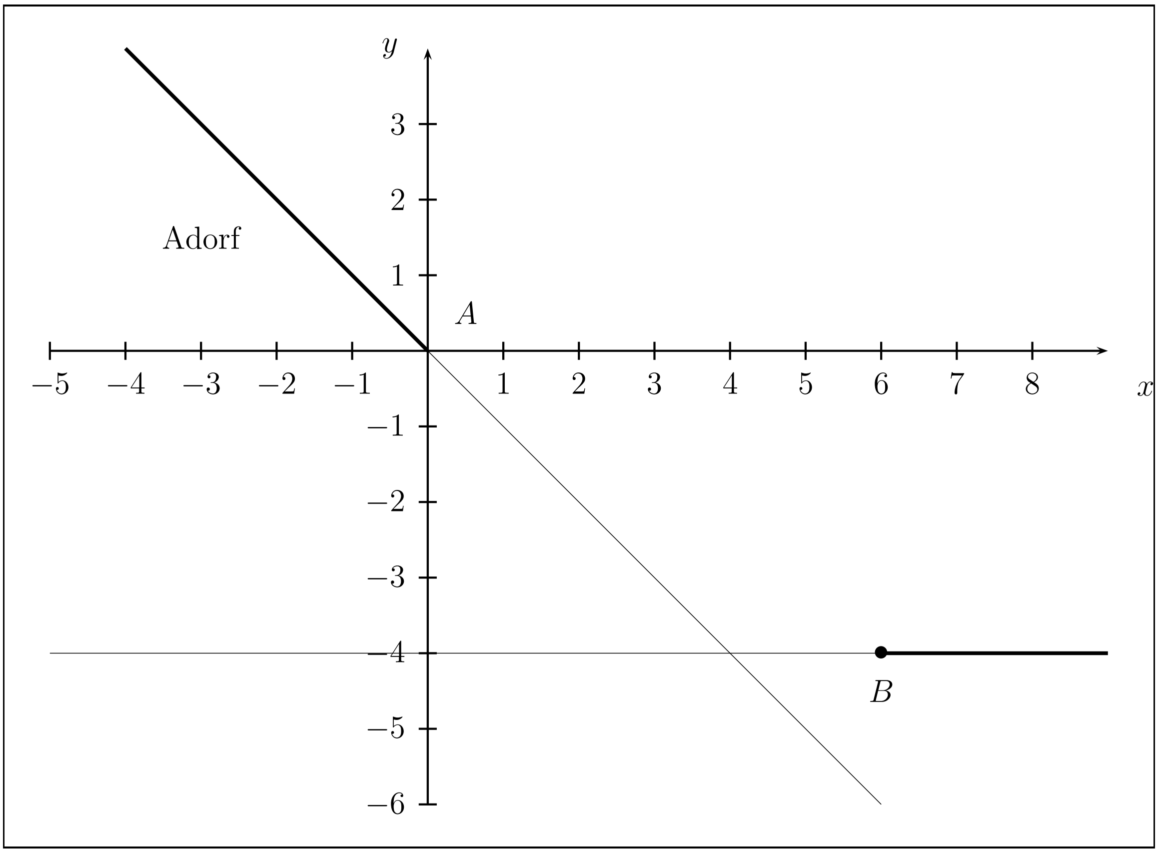
Methodische Hinweise

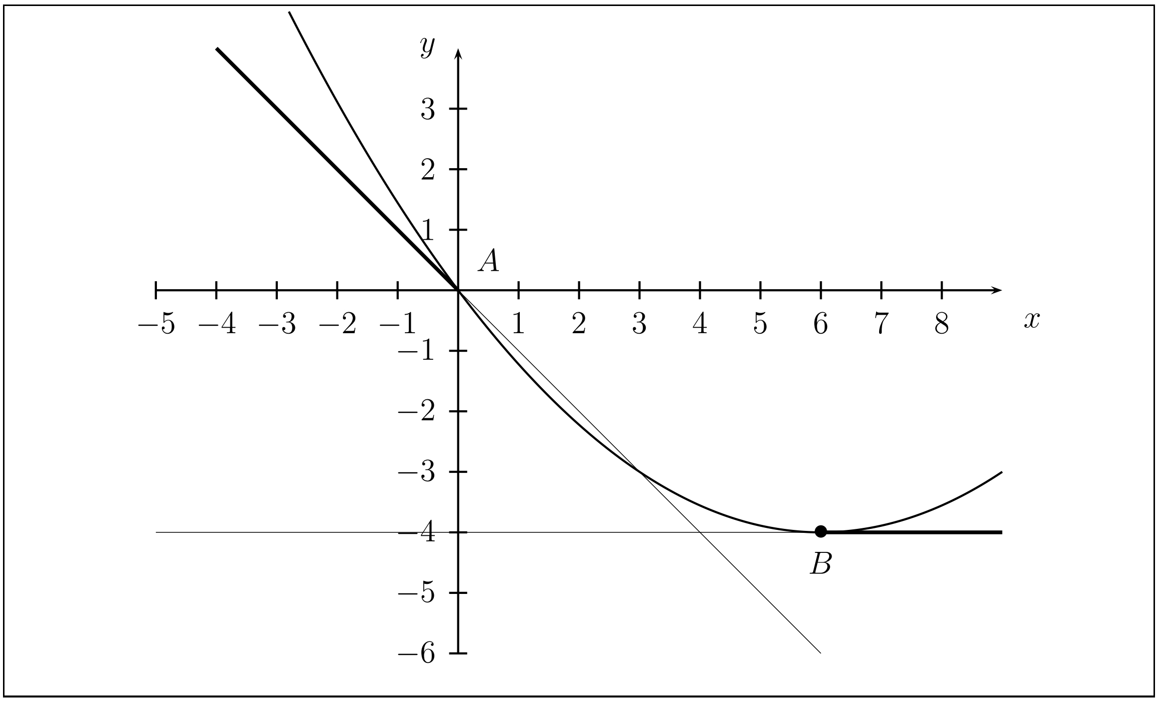
Der überwiegende Teil der Stunde war der Problematik der Verfeinerung von Modellen gewidmet. Ausgehend von der Aufgabenstellung eines Straßenbauprojektes sollten die SchülerInnen zuerst selbständig eigene Lösungen suchen. Nachdem die SchülerInnen die erste Stufe der Mathematisierung, die Nutzung eines Koordinatensystems, erfolgreich absolviert hatten, wurden erste mögliche Straßenverläufe eingezeichnet und mit bekannten Funktionen verglichen. An dieser Stelle wurde die selbständige Arbeit der SchülerInnen unterbrochen und der Lösungsprozeß an der Tafel / Folie fortgesetzt. Ausgehend von der kürzesten

Verbindung einer Gerade (lineare Teil - Funktion mit fehlender Differenzierbarkeit an den Anschlußpunkten [Knicke]) wurden für den Straßenverkehr günstigere Funktionen gesucht und in Funktionen höherer Ordnung gefunden. Die Anforderungen an derartige Funktionen hinsichtlich der Ableitungen und Funktionswerte wurden erarbeitet. Die Bestimmung der Parameter der Funktion selbst wurde aus Gründen der Zeitersparnis nicht realisiert, die Parameter und die Graphen wurden in der Vorbereitung bestimmt und lagen somit vor. Im Zusammenhang mit der Thematik Parameterbestimmung stellt diese Aufgabe eine sehr gute Verknüpfung von Modellbildung und Stoffvermittlung / Stofffestigung dar. Zum hier separat anvisierte Zweck der Verfeinerung von Modellen ist die Aufgabe sehr gut geeignet, jedoch bleiben die für die Lösung notwendigen Zwischenschritte und die damit verbundenen Probleme der Mathematik aus zeitlichen Gründen auf der Strecke.

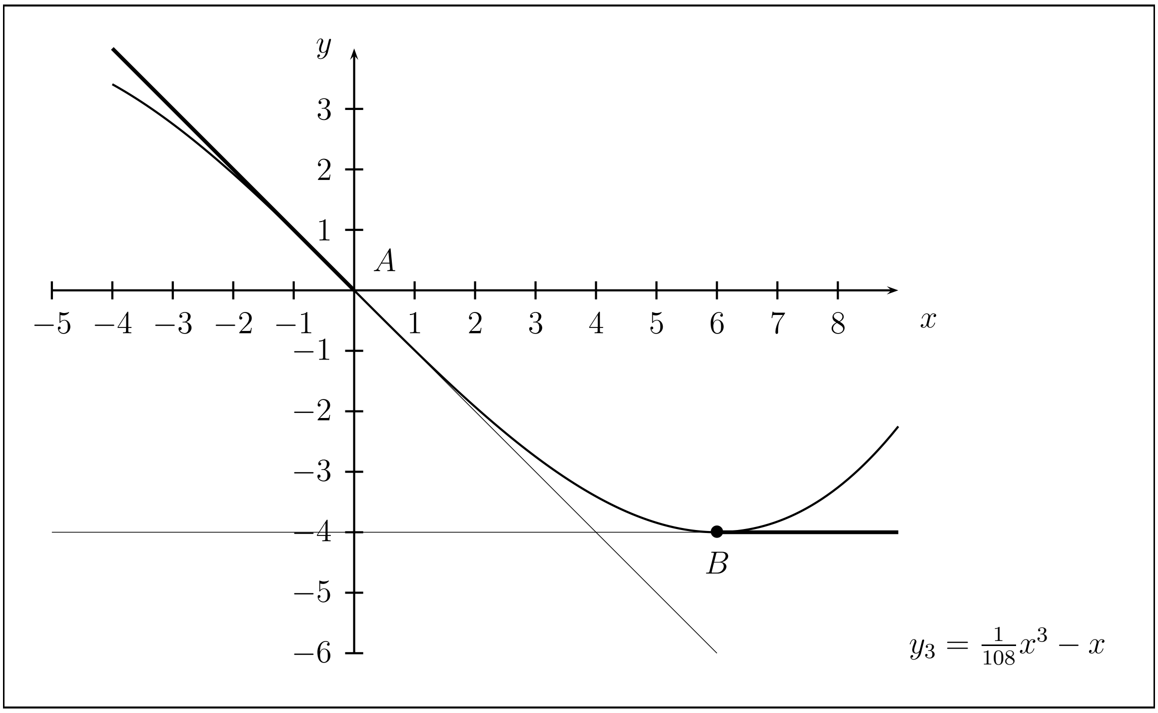
Mit der Funktion dritter Ordnung konnten die Bedingungen (Differenzierbarkeit an den Anschlußpunkten) erfüllt werden. Weitere Verfeinerungen hinsichtlich einer maximalen Krümmung (Geschwindigkeitsbegrenzung) wurden angesprochen aber nicht konkretisiert.

Weitere Unterrichtsmittel





y
x
A
B
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8
3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6



y
x
A
B
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8
3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6
$y_3 = \frac{1}{108}x^3 - x$

2.3.4 „Der Sprung von der Schanze“ (Aileen Schröder)

Problemstellung

Einem Skispringer ist bekannt, dass ihm bei seinem Sprung eine Weite von 120 Metern gelang. Der Schanzentisch liegt auf einer Höhe von 42 Metern. Seine höchsten Punkt erreichte er 35 Meter nach seinem Absprung. Sportler analysieren ihre Sprünge nach einem Wettkampf um anschließend eine Fehlerkorrektur vornehmen zu können. Aus diesem Grund lässt er sich von uns seine Flugbahn annähernd bestimmen.

Nach Angaben der Spezialisten beträgt der ideale Winkel beim Absprung exakt $45°$.

a) Analysiere diesen Aspekt bei der Flugkurve unseres Springers!

b) Welche Auswirkung hätte ein idealer Absprungwinkel auf die Flugbahn unseres Springers?

Ziele

Wissensziele: Die Schüler kennen

- die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Funktion n-ten Grades,
- die Grundlagen bezüglich des Arbeitens mit Funktionen und deren Zusammenhänge,
- den Prozess der Modellbildung.

Könnensziele: Die Schüler können

- einen realen Vorgang in ein mathematisches Modell übertragen,
- auf Grundlage gegebener Informationen Gleichungen aufstellen und diese lösen
- die numerische Lösung kontextbezogen interpretieren.

Soziale Ziele: Die Schüler scheuen sich nicht, Ansichten zu hinterfragen und eigene Standpunkte zu verteidigen.

Fachwissenschaftliche Grundlagen

Die Schüler benötigen für die Bearbeitung der Aufgabe lediglich die Grundlagen der Differentialrechnung. Wenn Funktionsplotter zum Einsatz kommen, sollten der Umgang mit diesem Hilfsmittel zur graphischen Darstellung der Funktionen aus Zeitgründen bekannt sein.

Physikalischer Hintergrund des Skisprunges

Die Komplexität eines Skisprunges in ganzheitlicher Betrachtung stellt den Schüler vor ein unlösbares Problem, da in physikalischer sein Sicht Wissen und Können nicht ausreicht um die Aufgabe korrekt lösen zu können. Daher wählt der Schüler sich ein Modell, das dem realen Vorgang unter bestimmten Bedingungen annähert und dem Schüler eine Möglichkeit beitet eine Lösung zu ermitteln. In unserem Fall bietet es sich an die komplexe sportliche Bewegung in unterschiedliche Teilbewegungen zu zergleidern und unsere Aufmerksamkeit lediglich auf die Hauptphase - Flugphase zu richten. Wir nehmen an, dass die Flugbahn unseres Skispringers aufgrund der physikalischen Gesetzmäßigkeiten einer Flugparabel gleicht, ähnlich eines Wurfes. Somit ist eine quadratische Funktion gesucht.

$$\text{Flugparabel} \longrightarrow \text{Quadratische Funktion}$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Dabei lassen wir bestimmte Faktoren, deren Bedeutung in diesem Zusammenhang nicht widersprochen wird, jedoch unberücksichtigt um unser Modell zu vereinfachen.

vernachlässigte Faktoren

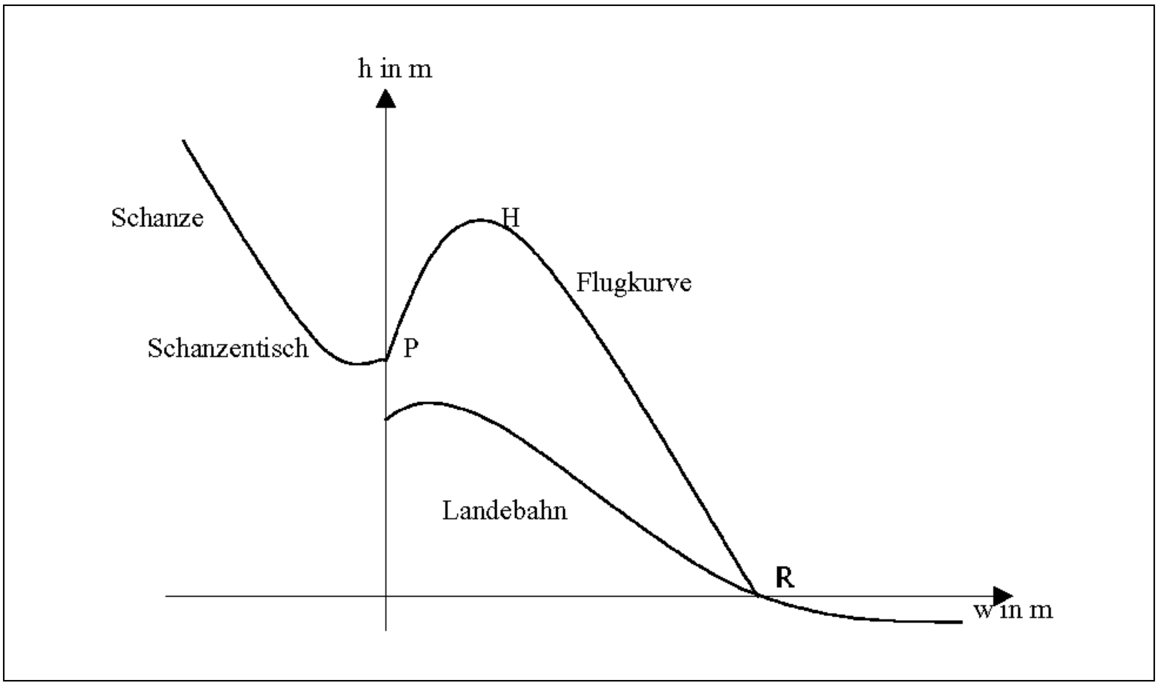
- Masse des Springers
- Geschwindigkeit des Springers
- Technik des Springers
- Material
- Windverhältnisse
- Schanzenbau (Anlauf und Landebahn)
- Individualität des Sportlers

Didaktische Reflexion

Verstehen des realen Vorgangs

Zunächst muss dem Schülern ein Zugang zur Thematik „Skispringen“ geschaffen werden, um ein einheitliches Ausgangsniveau zu sichern. Hierfür bieten sich Hilfsmittel wie Videoaufzeichnungen beziehungsweise Bilder von Skisprüngen an.
Eine gemeinsam erarbeitete Skizze mit Sprungturm, Landehügel und ersten Überlegungen von Schülern hinsichtlich der Flugkurve verschafft ein erstes visuelles Modell.

Die Schüler müssen in erster Linie die Flugkurveneigenschaften diskutieren um sich auf ein Modell zu einigen. Außerdem müssen die vernachlässigten Faktoren unseres Modells erarbeitet werden. Anschließend sollten die Schüler diskutieren, wie sie die Informationen aus der Aufgabenstellung in unsere Skizze übertragen. Schwerpunkte sind dabei die Festlegung des Koordinatenursprunges und das korrekte Einzeichnen der gegebenen Werte beziehungsweise das Ablesen der Punkte.



geg.: $P = (0;42)$ ges.: $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$

$Q = (35;y)$ Q lokales Maximum $f'(x) = 2ax + b$

$R = (120;0)$

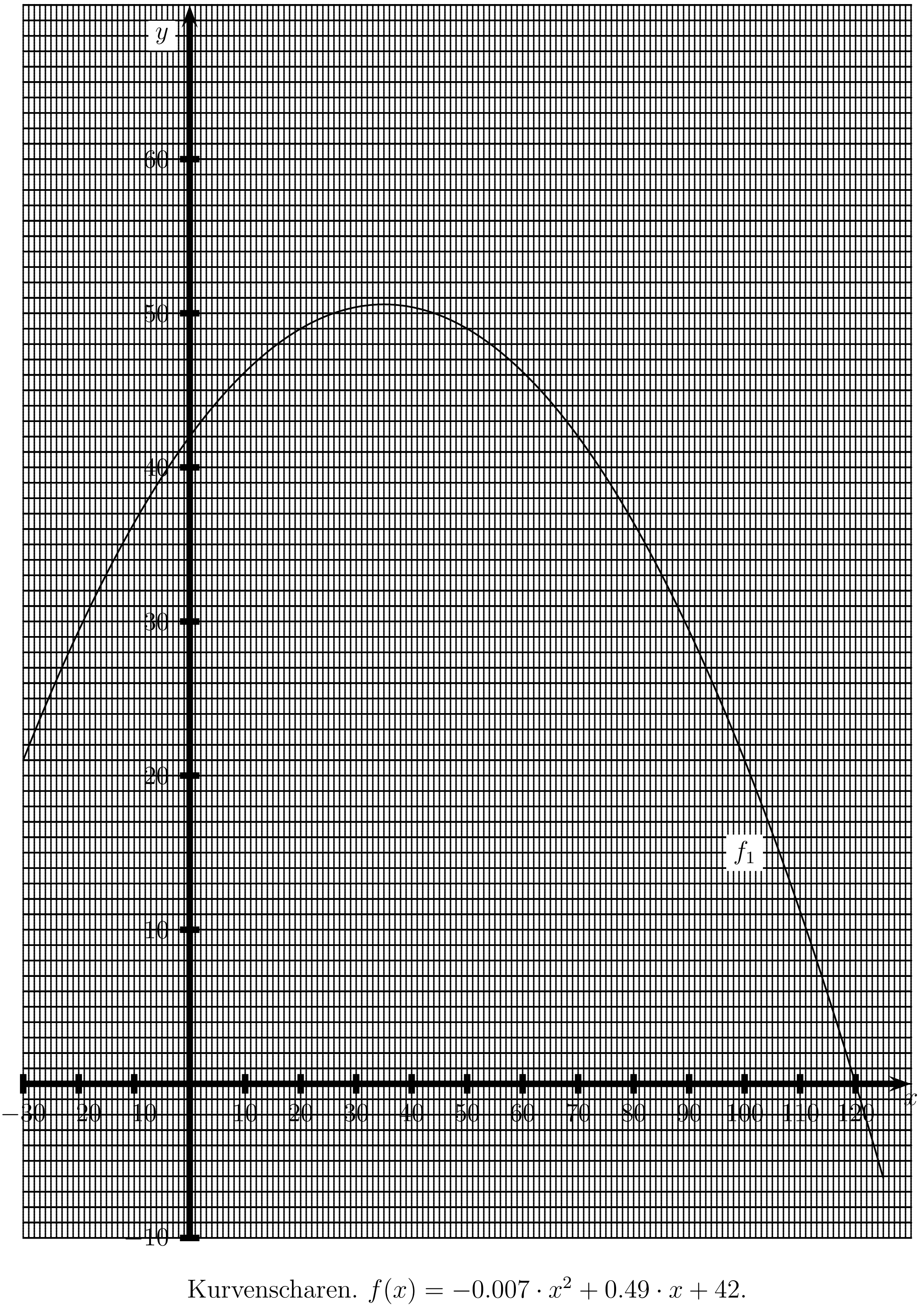
Lsg: Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{crcl} I & 42 & = & c \\ II & y & = & 35^2a + 35b + c \\ III & 0 & = & 120^2a + 120b + c \\ IV & 0 & = & 2 \cdot 35x + b \end{array}$$

Zielfunktion:

$$\boxed{f(x) = -0,007x^2 + 0,49x + 42}.$$

Die ermittelte Funktion zweiten Grades kann mit einem Funktionsplotter leicht veranschaulicht werden. Die ermittelte Flugkurve wird nun unter einem weiteren Aspekt diskutiert.



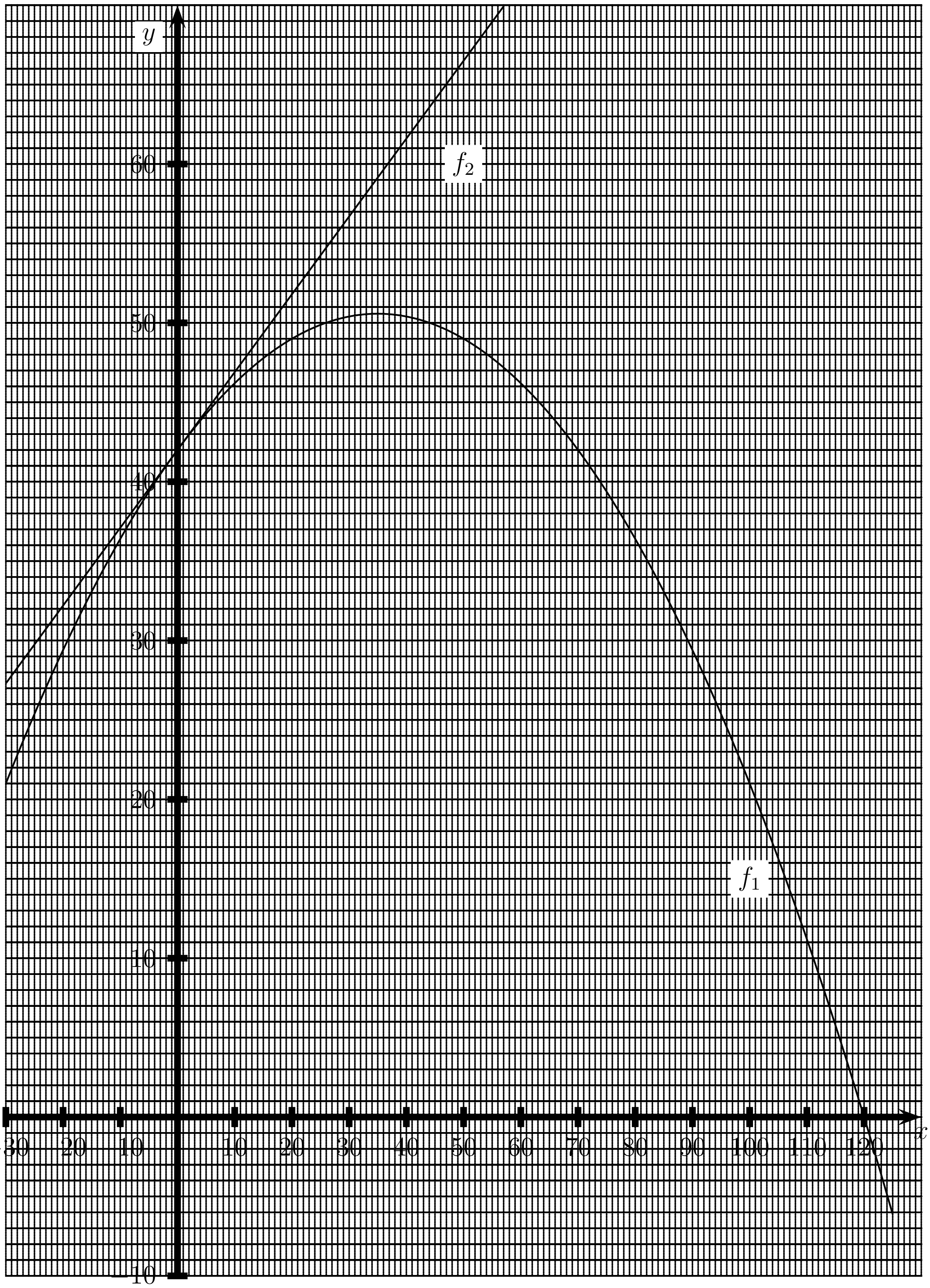
Kurvenscharen. $f(x) = -0.007 \cdot x^2 + 0.49 \cdot x + 42.$

Die Erweiterungsaufgabe a) beschäftigt sich vertieft mit der Flugparabel unseres Springers, indem wir einen neuen Aspekt hinzuziehen- seinen Absprung. Das Vorgehen zur Bearbeitung ist analog der vorherigen Aufgabe. Wichtig ist dabei, dass dem Schüler zu jedem Zeitpunkt bewusst ist, welche praktische Bedeutung diese Problematik hat und er diese Teilaufgabe mit einem Fazit beendet. Das ermittelte Ergebnis dient dabei tatsächlich nur dem eigentlichem Zweck- der Beurteilung des Springers hinsichtlich seines Absprungwinkels.

Es bietet sich folgendes Vorgehen an:

- Verstehen der Problemlage
  Veranschaulichung des „Anstiegswinkel“ in der Skizze
  Diskussion der Bedeutung des Absprungswinkels für die Flugbahn des Springers

- Mathematisierung des Realvorgangs
  Anstiegswinkel zum Zeitpunkt des Absprungs
  $\Rightarrow$ Zusammenhang zur Tangente herstellen
  $\Rightarrow$ Winkel beim Absprung = Tangentenanstiegswinkel im Punkt P
  Einzeichnen der Tangente im Punkt $P(0;42)$



Kurvenscharen. $f_1(x) = -0.007 \cdot x^2 + 0.49 \cdot x + 42$ und $f_2(x) = 0.49 \cdot x + 42$.

- Lösen des Modells
  Bestimmung des Anstieges der Tangenten zum Zeitpunkt des Absprunges

Lösung:

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= f'(x) && \text{in } P(0;42) \\ &= 2ax+b \\ &= b && \text{mit } b=0,49 \\ & && \Rightarrow \alpha = 26,1^\circ \end{aligned}$$

- Interpretation des Ergebnis
  Auswertung des Ergebnisses hinsichtlich unseres Realvorgangs
  → Kritik am Springer, Diskussion der möglichen Gründe

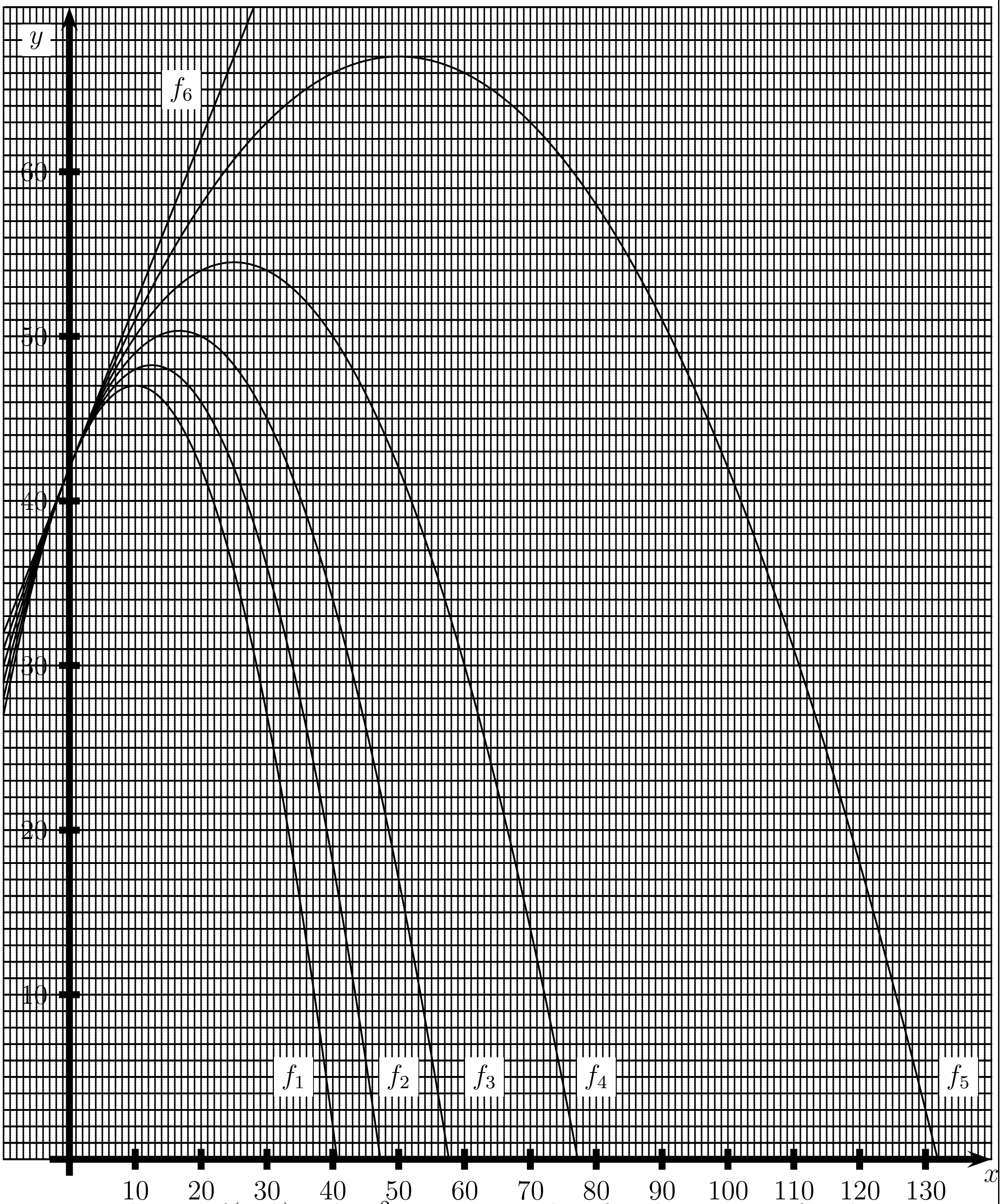
Fazit: „Der Anstiegswinkel unseres Skispringers zum Zeitpunkt des Absprungs war zu klein. Er hat somit nicht seine ideale Weite erreicht.“

Die Teilaufgabe b) folgt als logischer Schritt unseres Springers bezüglich der Teilaufgabe a). Dieser weiß durch Berechnung, dass sein Absprungwinkel nicht ideal war. Somit gelangt man zum nächsten Schritt der motorischen Lernreihe - die Fehlerkorrektur am Absprungwinkel unseres Springers, d. h. Korrektur des Anstiegswinkels zum Zeitpunkt des Absprunges. Dabei zeigen wir unserem Springer, welche Auswirkungen ein Absprungwinkel von 45° auf seinen absolvierten Sprung *hätte*. Dabei nehmen wir an, dass die Ausgangsbedingungen unverändert sind, da wir über keine weiteren Informationen verfügen. Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe ist es wesentlich, die Schüler auf die praxisnahe Bedeutung ihrer Ergebnisse hinzuweisen. Nur dann erfolgt eine kritische Beleuchtung und in Fragestellung einiger Funktionen (Flugkurven) unter praktischer Relevanz und Realisierbarkeit.

Auswirkungen auf unsere Parameter: $a = ?$, $b = 1$, $c = 42$
Aufstellen der Kurvenschar/ Funktionsschar:

$$\boxed{f_a(x) = a \cdot x + 1 \cdot x + 42 \text{ für } a < 0}$$

Mit Hilfe des Funktionsplotters können Flugkurven für verschiedene Parameterwerte a gezeichnet werden. Diese visuelle Darstellung hilft dem Schüler die ermittelte Kurvenschar kritisch zu beleuchten.



Kurvenscharen. $f(x, k) = k \cdot x^2 + x + 42$, wobei $f_1: \; k = -0.05$, $f_2: \; k = -0.04$, $f_3: \; k = -0.03$, $f_4: \; k = -0.02$, $f_5: \; k = -0.01$, $f_6: \; k = 0$.

Methodische Hinweise

Die Bearbeitung des Problems eignet sich für den Modellbildungsprozess sehr gut. Das Zusammenspiel der Unterrichtsfächer Mathematik, Physik und Sport sollte den Schüler im

Allgemeinen nicht überfordern. Der praktische Bezug bietet vielmehr einen Anreiz mathematische Kompetenzen auf andere Gebiete zu übertragen und unterstreicht einmal mehr die weitreichende Bedeutung der Thematik Differentialrechnung und Funktionen. Die einzelnen Phasen des Modellbildungskreislaufes können während der Bearbeitung der Aufgabe außerordentlich gut beobachtet werden, so dass bei mehrmaligem Durchlaufen des Kreises in den Teilaufgaben das Arbeiten im Modell geschult wird.

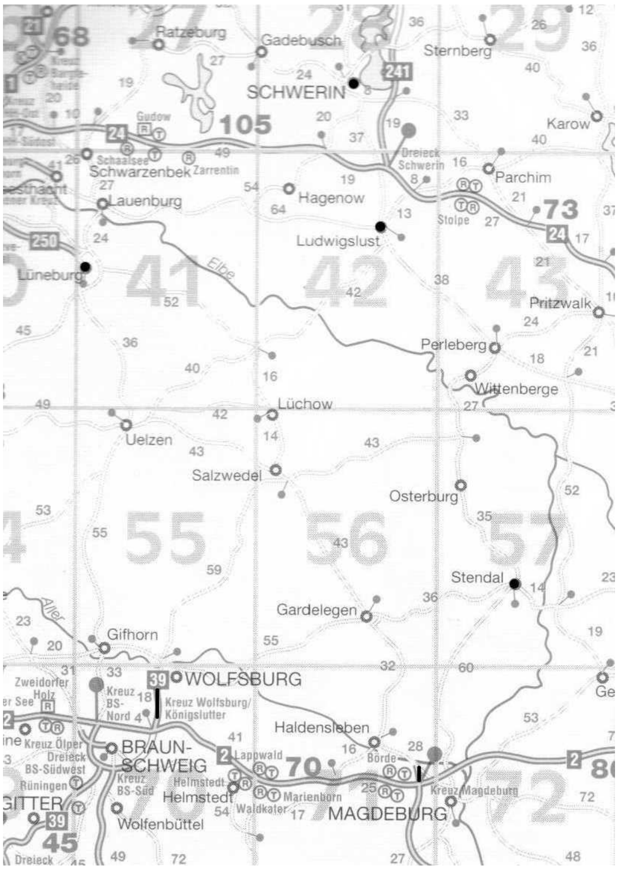
2.3.5 Straßenbau mit „Hosenträger“ (Mirka Stankewitz)

Problemstellung

Bei der Nordverlängerung der A 14 wurden in den vergangenen Jahren mehrere Verlaufsmöglichkeiten diskutiert. Zum jetzigen Zeitpunkt wird die sogenannte Hosenträgervariante favorisiert. Diese Version sieht vor, die A 14 von Magdeburg nach Schwerin und die A 39 von Wolfsburg nach Lüneburg zu verlängern. Dabei sollen die Städte Stendal und Ludwigslust von der A 14 passiert werden. Weiterhin ist geplant, die beiden Autobahnen unterein-ander durch eine gut ausgebaute Bundesstraße in Ost-West-Richtung im Raum Salzwedel zu verbinden. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine mathematische Beschreibung für einen, an konkreten Punkten orientierten, möglichen Straßenverlauf zu finden.

Nordverlängerung der A 14: Hosenträgervariante

Diese Variante sieht vor, die A 14 von Magdeburg nach Schwerin und die A 39 von Wolfsburg nach Lüneburg zu verlängern. Dabei sollen die Städte Stendal und Ludwigslust von der A 14 passiert werden. Weiterhin ist geplant, die beiden Autobahnen untereinander durch eine gut ausgebaute Bundesstraße in Ost-West-Richtung im Raum Salzwedel zu verbinden.



(nicht maßstabsgerecht)

a) Versuchen Sie für die Trassenführung beider Autobahnen ein mathematisches Modell in Form einer Funktionsgleichung aufzustellen.
Beachte: Die Trassenführung darf keine Knicke und Unterbrechungen aufweisen.

b) Aus Kostengründen soll die Bundesstraße eine möglichst kurze Verbindungsstrecke zwischen den beiden Autobahnen sein. Untersuchen Sie mit Hilfe der in a) gefundenen Funktionsgleichungen, wo sich die kürzeste Verbindung befindet und ob diese für die bisherigen Planungskriterien relevant ist.

Ziele

Wissensziele:

- Die Schüler kennen die Grundlagen des Arbeitens mit Funktionen (allgemeines Schaubild von Funktionen verschiedenen Grades, allgemeine Funktionsgleichungen, Ableitungsregeln, ...)
- Die Schüler wissen, wie man ein Gleichungssystem mit Hilfe von gegebenen Punkten bzw. von Eigenschaften der Funktion an entsprechenden Punkten aufstellt und sie kennen die Schrittfolge des Gaußverfahren beim Lösen des Gleichungssystems.
- Die Schüler kennen den Ablauf zum Lösen einer Extremwertaufgabe.

Könnensziele: Die Schüler können ihr mathematisches Wissen auf einen realen Sachverhalt anwenden, d.h.

1. Finden von Modellannahmen (Einflussgrößen im realen Kontext; Welche Faktoren können und sollen im mathematischen Modell berücksichtigt werden?; ...)
2. Mathematisierung und Lösung
   - Die Schüler können die Lage der Städte durch Punkte in einem Koordinatensystem darstellen.
   - Die Schüler sind in der Lage mit Hilfe der allgemeinen Funktionsgleichungen bzw. deren Ableitungen sowie den gegebenen Informationen (Punktkoordinaten, Tangentenanstieg in einem Punkt) ein Gleichungssystem aufzustellen und dieses anschließend zu lösen, um die Funktionsgleichung zu ermitteln.
   - Die Schüler sind in der Lage, ein Extremwertproblem zu erkennen und die Aufgabe entsprechend zu lösen.
3. Interpretation ihrer gefundenen Lösung und dem gewählten Modell.

Didaktische Reflexion

Für die Arbeit an dieser Aufgabe sollte man etwa zwei bis drei Unterrichtsstunden einplanen. Durch die Hinzunahme von zusammengesetzten Funktionen kann die Aufgabenstellung darüber hinaus erweitert werden. Die Zeitplanung ist jedoch zudem immer von der gewählten Sozialform abhängig (Frontalunterricht; Einzel-, Partner- bzw. Gruppenarbeit). Die folgende Darstellung kann als Orientierung genutzt werden:

Die Schüler haben größtenteils in Gruppen von vier bis sechs Personen zusammengearbeitet, wobei die Ergebnisse jeweils nach bestimmten Arbeitsphasen präsentiert, im Schüler-Lehrer-Gespräch diskutiert und zusammengefasst wurden, damit die Schüler immer eine Orientierung und eine etwa einheitliche Grundlage für die Weiterarbeit hatten.

Modellannahmen für Problem a)

- Vernachlässigung des Reliefs (Höhenunterschiede, ...)
- Vernachlässigung der Landschaft (Naturschutzgebiete, Seen, Flüsse, Städte, Bodenver-hältnisse, andere Straßen, Städte, ...)
- Vernachlässigung der Baukosten
- Verwendung der Koordinaten (gerundet) der im Text der Aufgabenstellung angegebenen Städte als Fixpunkte für den Autobahnverlauf
- Straße als Kurve (keine Straßenbreite)

Mathematisierung und Lösung des Modells

1. Ermitteln des Grades einer möglichen Funktion (keine zusammengesetzte Funktion) durch Skizzieren der allgemeinen Funktionsgraphen sowie durch Überprüfen der Funktions-eigenschaften hinsichtlich der geforderten Bedingungen.
   Drehen der Karte um 90° *im Uhrzeigersinn, so dass die eigentliche Süd- Nord- Richtung jetzt zur West- Ost- Richtung wird.*

   Autobahn A 39

   - lineare Funktion → entfällt, weil Knick an der Anschlussstelle Wolfsburg
   - quadratische Funktion → möglich mit dem Minimum an der Anschlussstelle Wolfsburg

   Autobahn A 14

   - lineare Funktion → entfällt, weil entweder nicht alle Städte erreicht werden oder es eine zusammengesetzte Funktion mit Knicken bei den jeweiligen Städten ergeben würde
   - quadratische Funktion → entfällt, da nicht alle Städte erreicht werden können oder es würde sich um eine zusammengesetzte Funktion handeln
   - kubische Funktion → entfällt (siehe Begründung davor)
   - Funktion 4. Grades → möglich mit einem Maximum an der Anschlussstelle Magdeburg

2. Ermitteln der Koordinaten der Städte sowie der jeweiligen Anschlussstelle.
   Als Hilfsmittel wurde ein Koordinatensystem (Achseneinteilung: 1 cm entspricht 1 LE) auf Folie gebracht, welches die Schüler auf ihre Karte legen konnten. Der Koordinatenursprung wurde für Magdeburg festgelegt.

   A 39
   Anschlussstelle bei Wolfsburg: $(2,15; 5,75)$
   Lüneburg: $(10,3; 7,2)$

   A 14
   Anschlussstelle bei Magdeburg: $(0,7; 0,6)$
   Stendal: $(4,25; -1,2)$
   Ludwigslust: $(11,2; 1,45)$
   Schwerin: $(14; 2)$

3. Aufstellen der Gleichungssysteme
   A 39
   allgemeine Gleichung: $g(x) = ax^2 + bx + c$, $g'(x) = 2ax + b$

$$\begin{array}{rcccc} I: & g(2,15) & = & 5,75 & = & 2,15^2a + 2,15b + c \\ II: & g(10,3) & = & 7,2 & = & 10,3^2 + 10,3b + c \\ III: & g'(2,15) & = & 0 & = & 4,3a + b \end{array}$$

   Ermitteln der Parameter a, b und c mit dem Gauß-Verfahren

$$a \approx 0,022; \qquad b \approx -0,094 \text{ und } c \approx 5,851.$$

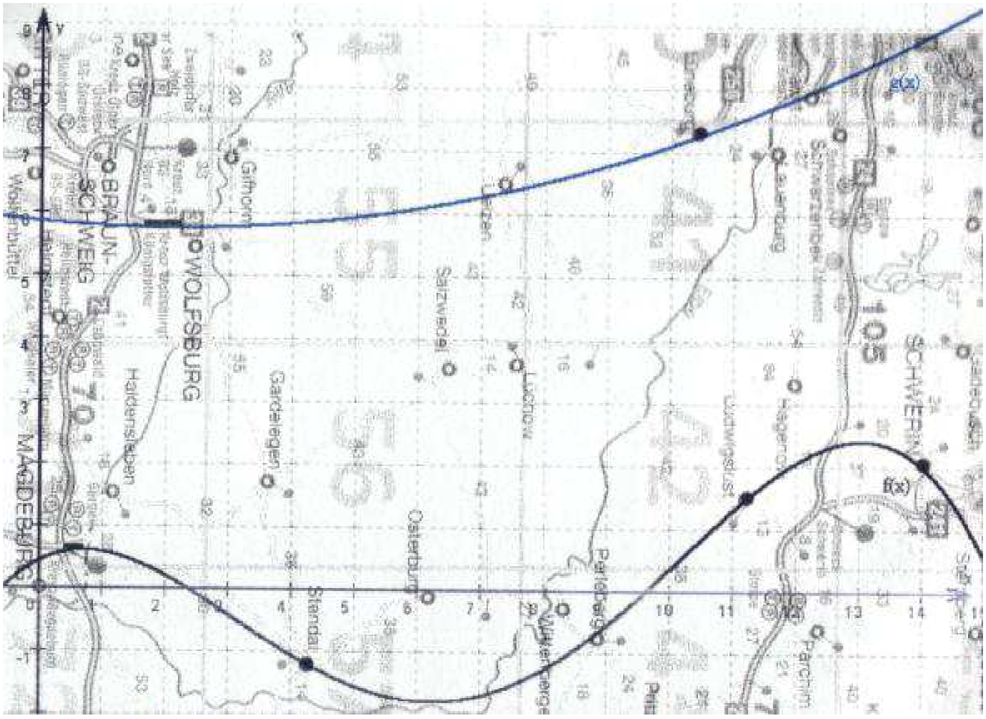
   A 14
   allgemeine Gleichung: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$\begin{array}{rcccc} I: & f(0,7) & = & 0,6 & = & 0,7^4a + 0,7^3b + 0,7^2c + 0,7d + e \\ II: & f(4,25) & = & -1,2 & = & 4,25^4a + 4,25^3b + 4,25^2c + 4,25d + e \\ III: & f(11,2) & = & 1,45 & = & 11,2^4a + 11,2^3b + 11,2^2c + 11,2d + e \\ IV: & f(14) & = & 2 & = & 14^4a + 14^3b + 14^2c + 14d + e \\ V: & f'(0,7) & = & 0 & = & 4 \cdot 0,7^3a + 3 \cdot 0,7^2b + 1,4c + d \end{array}$$

   Ermitteln der Parameter a, b und c mit dem Gauß-Verfahren
   (Hilfsmittel: PC-Programme, zum Beispiel „WinFunktion")

   $a \approx -0,002214$; $b \approx 0,058967$; $c \approx -0,419573$; $d \approx 0,503759$ und $e \approx 0,433266$.

4. Graphische Darstellung der beiden ermittelten Funktionen für die Autobahnen



Interpretation der Problemlösung a)

- A 14 hat einen recht untypischer Verlauf (weit ausschwenkend) ? kostenintensiv
- In der Realität ist eine Autobahn aus sehr vielen kleinen Teilstücken zusammengesetzt
- Hindernisse wurden entsprechend der Modellannahmen vernachlässigt, die sonst aber beim realen Bau berücksichtigt werden müssen
- ...

Modellannahmen für Problem b)

Die Modellierung führt auf ein Extremwertproblem:

1.

$$\text{Zielfunktion:}\quad \begin{aligned} d(x) &= g(x) - f(x) \\ d(x) &= 0,002214x^4 - 0,058967x^3 + 0,441573x^2 - 0,597759x + 5,417734 \end{aligned}$$

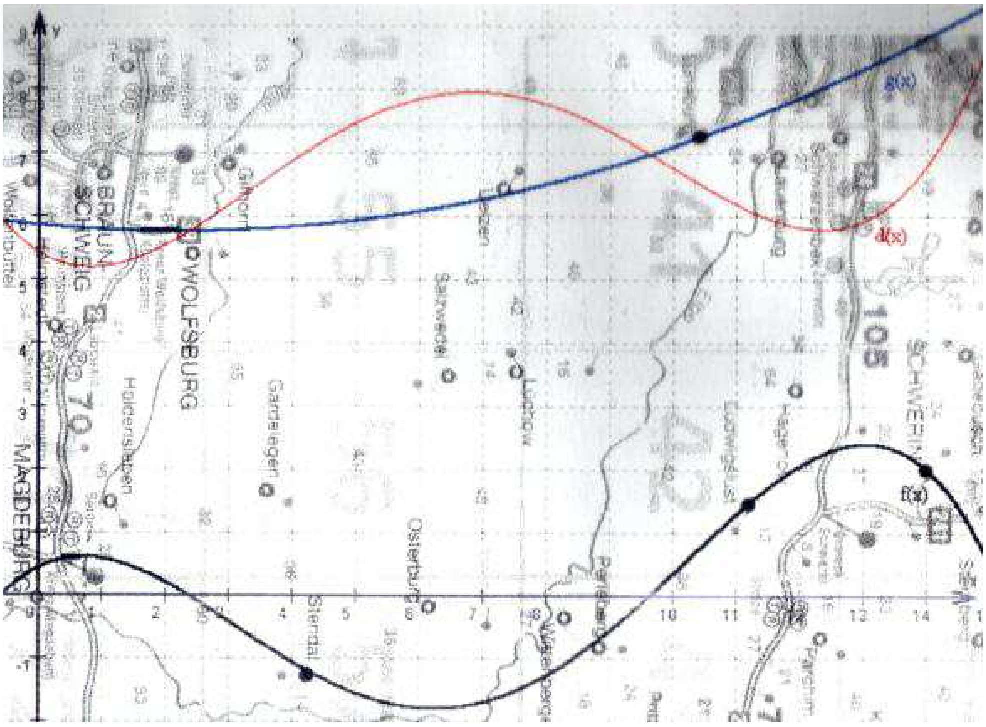
2.

$$\text{Ableitungen:}\quad \begin{aligned} d'(x) &= 0,008856x^3 - 0,176901x^2 + 0,883146x - 0,597759 \\ d''(x) &= 0,026568x^2 - 0,353802x + 0,883146 \end{aligned}$$

3. Ermitteln der lokalen Extrema sowie des Abstandes an den entsprechenden Punkten

notwendige Bedingung: $d'(x) = 0$	hinreichende Bedingung: $d''(x) \neq 0$	Abstand: $d(x) =$
$x_1 \approx 0,8$	$d''(x_1) \approx 0,6171 > 0$ $\rightarrow$ Minimum	$d(x_1) \approx 5,193$ LE $\rightarrow$ globales Minimum
$x_2 \approx 6,842$	$d''(x_2) \approx -0,2938 < 0$ $\rightarrow$ Maximum	$d(x_2) \approx 7,964$ LE
$x_3 \approx 12,333$	$d''(x_3) \approx 0,561 > 0$ $\rightarrow$ Minimum	$d(x_1) \approx 5,816$ LE

4. Graphische Darstellung der Differenzfunktion



Interpretation der Problemlösung b)

- nicht relevant, da in unmittelbarer Nähe die A 2 verläuft und weil Salzwedel zu weit entfernt ist
- bei der bisheriger Planung würde Salzwedel etwa in dem Bereich liegen, wo zwischen beiden Autobahnen der größte Abstand angenommen wird
- ...

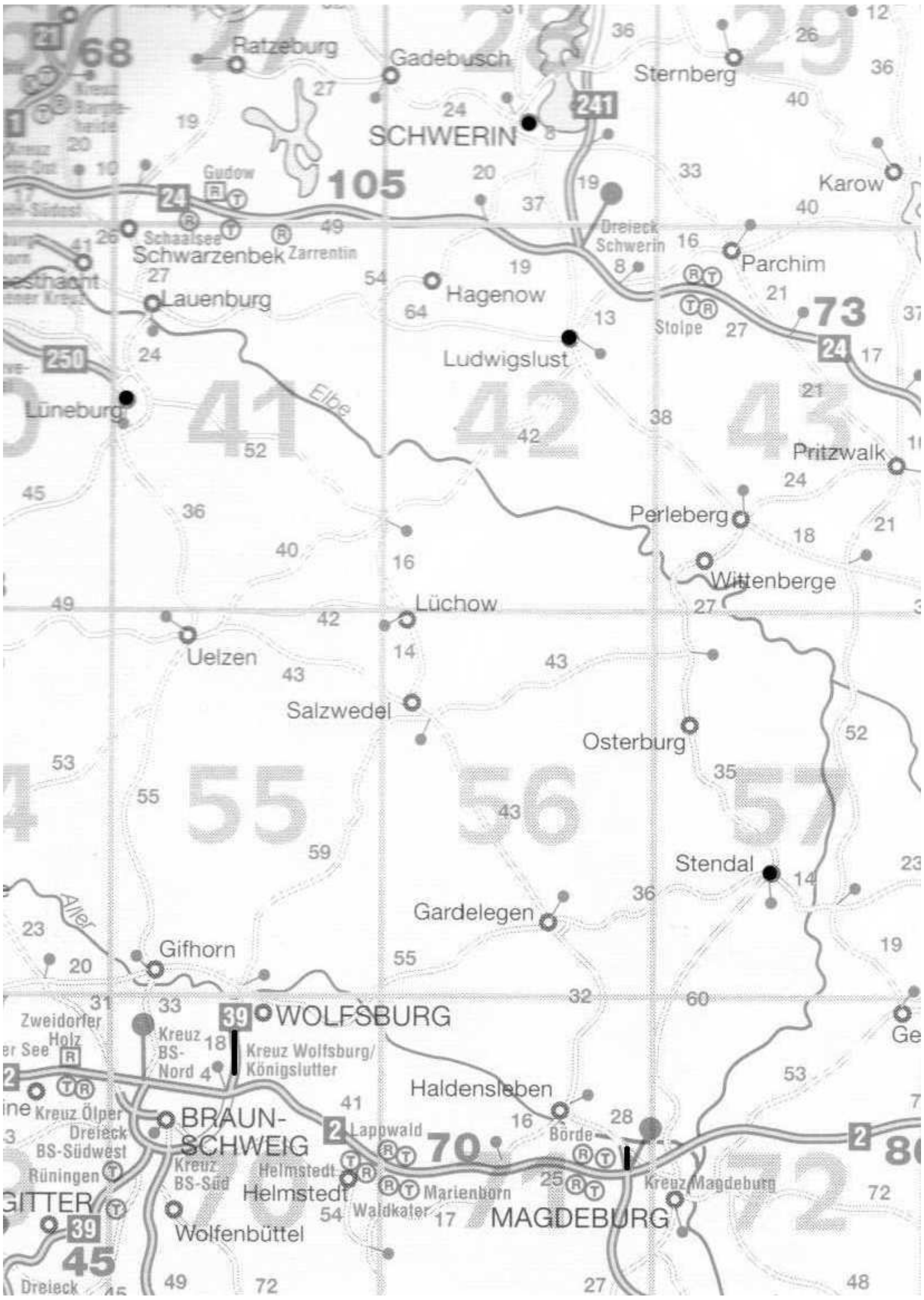
Methodische Hinweise

Die Bearbeitung der komplexen Problemstellung verlief gut.
Der reale Kontext ermöglichte es den Schülern, sich gut in die Problemstellung hineinversetzen zu können, so dass es ihnen ziemlich leicht fiel, entsprechende Bedingungen bzw. Modellannahmen zu formulieren. Die ersten Schwierigkeiten könnten auftreten, wenn die Schüler nicht erkennen, dass sie die Karte um 90° im Uhrzeigersinn drehen müssen, um ihr mathematisches Wissen über Funktionen anwenden zu können. Gegebenenfalls muss deshalb der Hinweis durch den Lehrer erfolgen. Beim Ermitteln der Punktkoordinaten von den jeweiligen Städten sowie den Anschlussstellen ist es sinnvoll, zuvor gemeinsam einen einheitlichen Koordinatenursprung festzulegen, damit für den weiteren Verlauf die Vergleichsmöglichkeit der Ergebnisse besser gewährleistet ist.
Bevor man dieses Problem im Unterricht einsetzen kann, sollte sichergestellt sein, dass die Schüler das Gauß-Verfahren kennen und bereits recht sicher beherrschen, da in diesem Fall relativ „unbequeme“ Werte entstehen, die sonst eher untypisch für die meisten Mathematikaufgaben sind. Beim Gleichungssystem der A 39 habe ich die Parameter a, b und c von den Schülern selbst berechnen lassen, damit sie einerseits eine Übungsmöglichkeit des Gauß-Verfahrens hatten und andererseits den Zusammenhang zwischen einer realen Problem-stellung und deren mathematischen Lösungsmöglichkeit deutlich erkennen sowie bewusst nachvollziehen konnten. Für das andere Gleichungssystem wurde dann der Computer genutzt, da man diese Zeit anderweitig besser nutzen konnte und die Schüler sollten zudem mit einem, in solchen Fällen, legitimen Hilfsmittel vertraut gemacht werden. Ist genügend Zeit und eine entsprechende Räumlichkeit vorhanden, so können Schüler diese Arbeit selbständig am PC ausführen. Ansonsten besteht die Möglichkeit, dass man die Benutzerflächenansicht des verwendeten Mathematikprogramms kopiert, ausdruckt und auf eine Folie bringt, damit man die Ein- sowie Ausgabeprozesse trotzdem anschaulich darstellen und erklären kann. Die Nutzung des Computers muss sich jedoch nicht nur auf das Gauß-Verfahren beschränken, denn auch die Erstellung der graphischen Lösung sowie das Auffinden der Nullstellen der Differenzfunktion mit Hilfe numerischer Lösungsverfahren sind empfehlenswert, erhöhen das Verständnis (Interpretation von Ergebnissen und somit des gewählten Modells) und bieten zusätzliche, inhaltliche Schwerpunkte (z. B. Näherungsverfahren nach Newton, ...).
Insgesamt gesehen, ermöglicht die Aufgabe den Schülern einerseits den theoretischen Ablauf beim Modellbildungsprozess zu verstehen und andererseits können sie alle Schritte an einer recht realitätsnahen Problemstellung praktisch nachvollziehen, da ihre vorhandenen mathema-tischen Fähigkeiten ausreichen und auch der zeitliche Rahmen nicht gesprengt wird.

Weitere Unterrichtsmittel

Nordverlängerung der A 14: Hosenträgervariante

Diese Variante sieht vor, die A 14 von Magdeburg nach Schwerin und die A 39 von Wolfsburg nach Lüneburg zu verlängern. Dabei sollen die Städte Stendal und Ludwigslust von der A 14 passiert werden. Weiterhin ist geplant, die beiden Autobahnen untereinander durch eine gut ausgebaute Bundesstraße in Ost-West-Richtung im Raum Salzwedel zu verbinden.



a) Versuchen Sie für die Trassenführung beider Autobahnen ein mathematisches Modell in Form einer Funktionsgleichung aufzustellen.
Beachte: Die Trassenführung darf keine Knicke und Unterbrechungen aufweisen.

b) Aus Kostengründen soll die Bundesstraße eine möglichst kurze Verbindungsstrecke zwischen den beiden Autobahnen sein. Untersuchen Sie mit Hilfe der in a) gefundenen Funktionsgleichungen, wo sich die kürzeste Verbindung befindet und ob diese für die bisherigen Planungskriterien relevant ist.

2.3.6 Der Schokoladen-Mann (Herbert Henning)

Problemstellung

Wie groß ist die Oberfläche eines Schokoladenweihnachtsmannes?

Ziele

- Die Schüler können zwischen verschiedenen Modellarten unterscheiden (Realmodell, mathematisches Modell).
- Die Schüler erkennen, dass man geometrische Körper als „Vergleichsmodelle“ nutzen kann.
- Die Schüler erkennen, dass vom gewählten Vergleichsmodell die „Güte“ der Problemlösung abhängt.
- Die Schüler können mathematische Modelle vereinfachen und funktionale Abhängigkeiten erkennen und interpretieren.

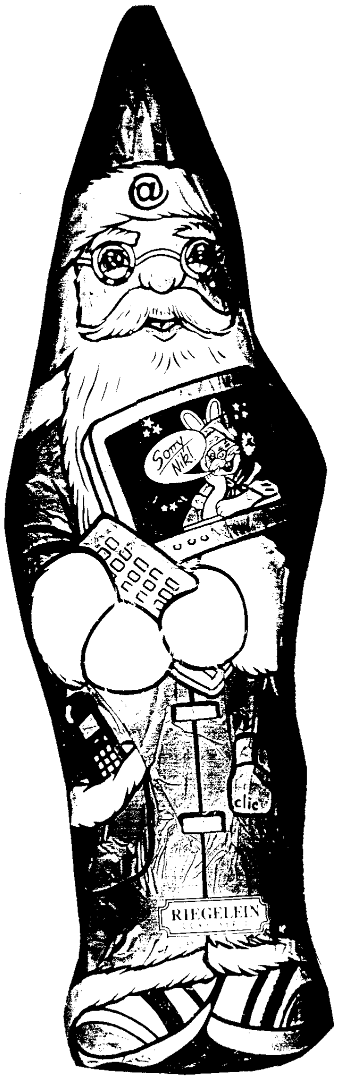
Didaktische Reflexion

Die Problemstellung erwächst aus einer weder trivialen noch zu komplexen Situation, die mit einfachen geometrischen und algebraischen Hilfsmitteln aus dem Mathematikunterricht der S I weitgehend selbstständig mathematisiert werden kann.

Die Beobachtung eines Realobjektes (unterstützt durch eine bildhafte Darstellung) führt zu grundlegenden Modellannahmen:

- Die reale Körperoberfläche der Schokoladenfigur soll „geglättet“ sein.
- Die Art der „Schokolade“ bleibt unberücksichtigt.
- In einem vereinfachten Realmodell müssen Größen ausgemacht werden, die Einfluss auf die Oberfläche haben und leicht messbar sind.

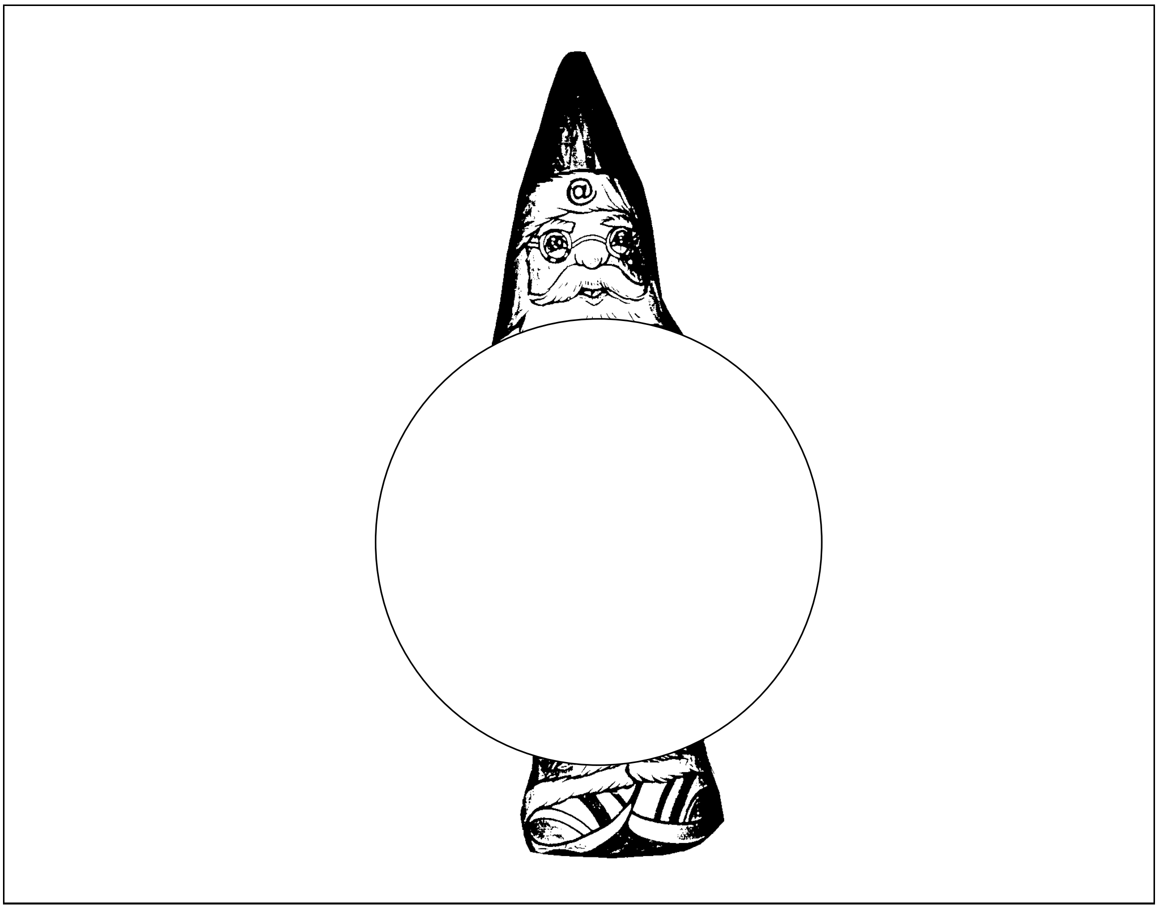
Die „Idee“ des Mathematisierens und der damit verbundenen Modellbildung ist, dass unter bekannten geomtrischen Körpern nach solchen gesucht wird, die als „näherungsweise“ Modelle in Frage kommen. Dabei können auch mehrere Körper zusammengsetzt bzw. der „Schokoladenweihnachtsmann“ in bekannte (und berechenbare) Körper zerlegt werden. Als wesentliche Erkenntnis ist dabei herauszuarbeiten, dass es immer „Näherungs“-Modelle sind. Dabei kann der Vergleich der Modellbildung hinsichtlich der Güte des Modells zu wichtigen Einsichten hinsichtlich der Genauigkeit von Modelllösungen führen.


RIEGELEIN

Exemplarisches Modellieren

- **Kugelmodell:**
Wir wählen zunächst die Kugel als Modell. Dabei beobachten wir als mögliche Näherung:

$$\begin{aligned} \text{Kugeldurchmesser} &= \frac{1}{2}\,\text{Höhe des Weihnachtsmanns} \\ d_k &= \frac{1}{2}h_w. \end{aligned}$$



Durch Kombination von $A_0 = \pi \cdot d_k$ und $V = \frac{1}{6}\pi d_k^3$ erhalten wir

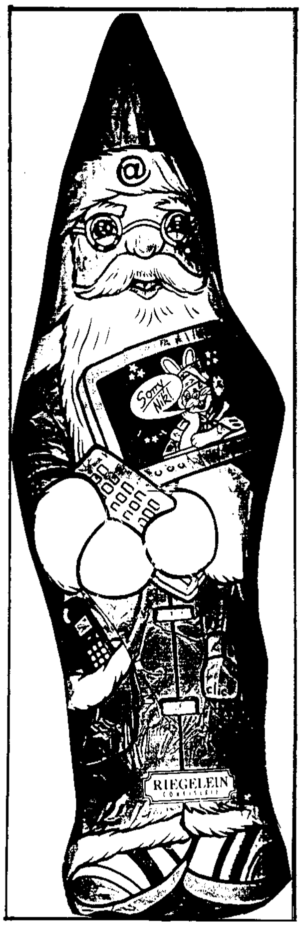
$$A_0 = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3}.$$

An dieser Stelle wird thematisiert, dass

$$A_0 = f(V)$$

ist. Das Volumen ist unbekannt. Als gegebene Größe kann die Masse m ($m = 200$ g) „abgelesen“ werden.

- **Zylindermodell:**
  Sachsituation und Realmodell legen eine mehr „gestreckte“ Körperform nahe.



Modellannahmen:

- $$\begin{aligned} \text{Höhe des Zylinders} &= \text{Höhe des Weihnachtsmannes} \\ h_z &= h_w \end{aligned}$$
- Grundfläche soll als Kreisfläche mit Radius r betrachtet werden (In der Realität ist die „Standfläche“ eine Ellipse).
- $$\frac{\text{Breite des Weihnachtsmannes}}{\text{Höhe des Weihnachtsmannes}} = \frac{1}{4}.$$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi r^2 h_z \\
A_0 &= 2\pi r h_z + 2\pi r^2 h_z \\
&= 2\pi r h_h \left(1 + \frac{r}{h_z}\right) \\
&= 2\pi h_z \sqrt{\frac{V}{\pi h_z}} \left(1 + \frac{r}{h_z}\right) \\
&= 2\sqrt{\pi V h_z} \left(1 + \frac{r}{h_z}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{d_w}{h_z} = \frac{1}{4}, \qquad r_w = \frac{1}{8} h_z
$$

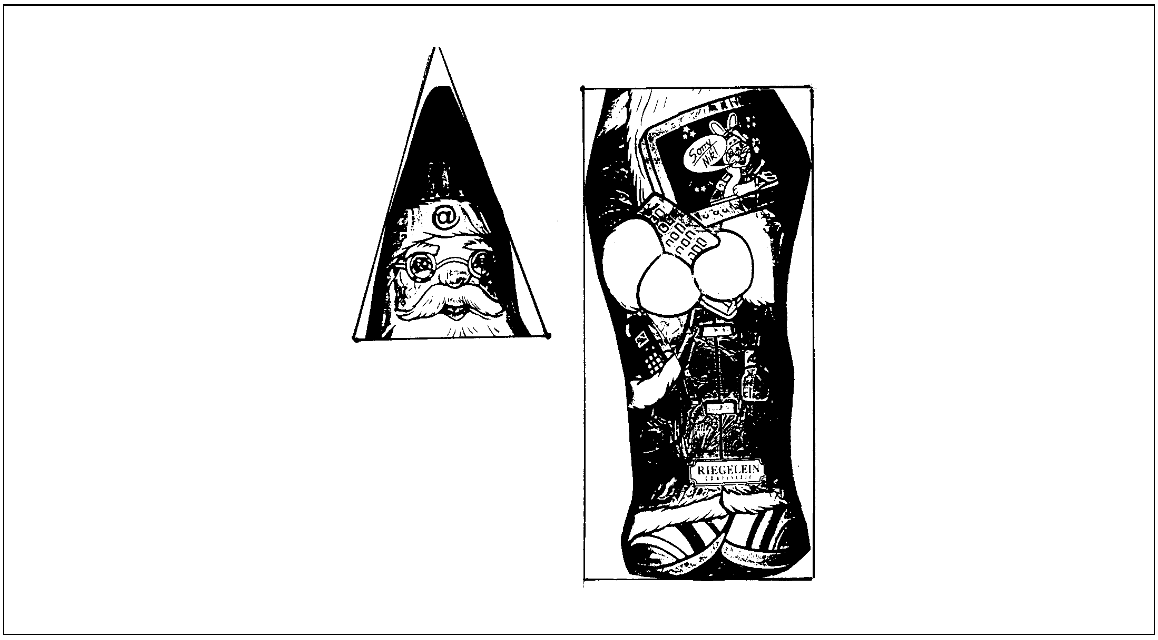
$$
\begin{aligned}
A_o &= 2\sqrt{8\pi V r_w} \left(1 + \frac{r}{8r}\right) \\
&= 2\sqrt{8\pi V r_w} \frac{9}{8} \\
&= \frac{9}{4} \sqrt{8\pi V r_w}
\end{aligned}
$$

wobei r_w die Messgröße ist. Auch hier ist

$$
A_0 = f(V).
$$

- **Zylinder-Kegel-Modell:**
  Als ein „geglättetes“ Modell kann auch als Realmodell ein Zylinder-Kegel-Modell beobachtet werden.
  Modellannahmen:

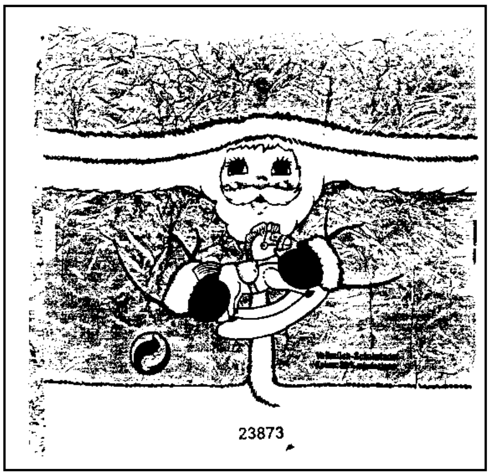
  - $$\frac{\text{Höhe des Zylinders („Rumpf“)}}{\text{Höhe des Kegels („Kopf“)}} = \frac{h_z}{h_k} = \frac{3}{1}.$$
  - Grund- und Deckfläche des Zylinders sowie Grundfläche des Kegels sind kongruente Kreisflächen mit r_k.
  - Seitenlänge des Kegels s_k.



$$
\begin{aligned}
h_k &= \frac{1}{3} h_z \\
A_0 &= r^2\pi + 2\pi r h_z + \pi r s_k \\
s_k &= \sqrt{r^2 + h_k^2} \\
&= r^2\pi + 2\pi r h_z + \pi r \sqrt{r^2 + \frac{1}{25} h_z^2} \\
&= r^2\pi + 2\pi r h_z + 5\pi r \sqrt{25 r^2 + h_z^2} \\
&= f(r, h_z)
\end{aligned}
$$

wobei r, h_z Messgrößen sind und experimentell bestimmt werden können.

- **Abwicklung:**
Die Abwicklung des Staniolpapiers, mit dem der Weihnachtsmann umgeben ist, führt ohne Aufwand (aber mit „Pfiff“) auf die wohl günstige und genaueste Modelllösung: „Fast-Rechteck“, deren Größen (Länge, Breite) gemessen und die Fläche berechnet werden kann.



Reflexion

Die Diskussion der verschiedenen Modellbildungen führte auf drei wesentliche Erkenntnisse:

- Modellierung erfolgt mit Hilfe von geometrischen Vergleichskörpern.
- Die Genauigkeit der Problemlösung ist von der Art der Modellierung und der Art der Mathematisierung (u. a. Art der funktionalen Abhängigkeiten; Variabilisierung) abhängig.
- Die Arbeit im mathematischen Modell führt zu nicht messbaren aber experimentell bestimmbaren Größen, wie beim „Zylinder-Modell“ und beim „Kugel-Modell“ auf das Volumen V, von dessen Größe die Oberfläche des Schokoladenkörpers abhängig ist.

Hier wurden neben der Möglichkeit einer experimentellen Bestimmung des Volumens des „Weihnachtsmannes“, nach dem „Archimedischen Prinzip“, mit einem physikalischen Experiment auch folgende Modellannahmen erkannt

$$\frac{m}{V} = \rho, \qquad (\rho \text{ Dichte der „Schokolade“})$$

$$V = \frac{m}{\rho},$$

wobei m ablesbar ist. Für die Dichte-Bestimmung von Schokolade kann man folgende Vorgehensweise wählen:

Dichte von Schokolade

Für die Dichte gilt

$$\rho = \frac{m}{V},$$

wobei unter der Annahme, dass die Schokoladentafel quaderförmig ist, für das Volumen

$$V = abc$$

gilt. Somit

$$\rho = \frac{m}{abc}.$$

Eine Milkaschokolade mit einer Masse von $m = 100$ g hat die Abmessungen $a = 15,5$ cm, $b = 7,5$ cm und $c = 0,9$ cm. Für die Dichte ergibt sich somit

$$\rho = \frac{100 \text{ g}}{15,5 \text{ cm} \cdot 7,5 \text{ cm} \cdot 0,9 \text{ cm}} = 0,96 \ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

2.3.7 Das Waschmittel „Strahleweiß“ (Claudia Riebel)

Problemstellung

Die Zänkel AG ließ eine Marktuntersuchung machen. Die Abteilungsleiter Herr Müller und Herr Meier tragen die Ergebnisse dem Unternehmensleiter vor.
„Von unserem Waschmittel „STRAHLEWEISS“ verkaufen wir zur Zeit 15000 Packungen wöchentlich zum Stückpreis von 2,50 € . Nach der neuesten Umfrage unserer Marketingabteilung würden wir je 0,10 € Preissenkung wöchentlich 1000 Stück mehr verkaufen. Natürlich nur in gewissen Grenzen.“ Der Unternehmensleiter stellt zwei Aufgaben:

a) „Berechnen Sie mir bitte, bei welcher wöchentlichen Stückzahl und bei welchem Stückpreis der **Umsatz am größten** ist!“

b) „Die betriebswirtschaftliche Zielgröße ist der Gewinn. Ermitteln Sie, bei welcher Stückzahl und bei welchem Stückpreis der **Gewinn am größten** ist.“ Die wöchentlichen Kosten setzen sich zusammen aus einem festen Grundbetrag von 24000 € für Personal, Maschinenpark, Gebühren usw. (den Fixkosten) und aus den variablen Kosten in Höhe von 0,80 € pro Stück.

Fachwissenschaftliche Grundlagen

Ist f eine ökonomische Funktion, so ist oft wichtig zu wissen, wie sich die Funktion bei kleinen Änderungen verhält. Beschreibt etwa f einen Wachstumsprozeß, so ist die Wachstumsgeschwindigkeit von Interesse oder auch die relative Wachstumsrate. Ist f eine Steuerfunktion, so ist die Frage, welcher Steuerprozentsatz auf einen kleinen Zuverdienst zu zahlen ist. Für ein Unternehmen ist interessant, wie sich die (relative) Nachfrage nach einem Produkt bei (relativ) kleinen Preisänderungen ändert.
Wichtig ist auch die Bestimmung von Extremwerten ökonomischer Größen, etwa der Minimierung von Kosten oder der Maximierung von Gewinnen.
Bei der Beantwortung dieser Fragen ist die Differenzialrechnung nützlich. Sie dient dazu, das Verhalten einer Funktion besser zu verstehen, sowohl global durch einen Gesamtüberblick über den Funktionsgraphen (Kurvendiskussion) als auch lokal in der Nähe eines vorgegebenen Punktes.
Wir betrachten im Folgenden stets Funktionen der Form $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich ist. Nun ist das Unternehmen daran interessiert, wie sich die Kosten bei kleiner Änderung der Produktionsmenge verändern. Eine standardisierte Information ist hierbei zum Beispiel, wie sich $K(x)$ ändert, wenn man x um eine Einheit erhöht. Die Änderung ist dann $K(x + 1) - K(x)$. Ist nun x nicht die Anzahl, sondern etwa gemessen in Tonnen, so ist auch eine Änderung von x um $0,1$ oder $0,01$ interessant. Es sollte klar sein, dass eine solche Änderung bereits von der Ausgangszahl x abhängt.

Modellannahmen

- Die Variable x stehe für die Zahl der Preiserhöhungen um 0,10 € . Negative x-Werte bedeuten entsprechend Preissenkungen.
- Umsatz = Preis · Menge, $U(x) = P(x) \cdot M(x)$
- Gewinn = Erlös − Kosten
- Gewinn = Umsatz − Kosten, $G(x) = U(x) - K(x)$

Modell A: Umsatzmaximierung

1. **Hauptbedingung:** $U \to Max$; Umsatz = Preis · Menge.
2. **Nebenbedingung:** Preis pro Stück → Preis; $P(x) = 2,5 + 0,1 \cdot x$. Damit ergibt sich die Zuordnung der abgesetzten Stückzahl pro Woche zur Menge, $M(x) = 15000 - 1000 \cdot x$.
3. **Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung**: Man erhält
$$U(x) = P(x) \cdot M(x) = (2,5 + 0,1 \cdot x) \cdot (15000 - 1000 \cdot x).$$
Wann ist $U(x) = 0$? Ein Produkt wird Null, wenn einer der Faktoren Null wird, also
   i) $P(x) = 0 = 2,5 + 0,1x \Rightarrow x_1 = -25$
   ii) $M(x) = 0 = 15000 - 1000x \Rightarrow x_2 = 15.$

   Bei 25 Preissenkungen betrüge der Preis 0 € , bei 15 Preiserhöhungen würden keine Packungen abgesetzt werden. (Prohibitivpreis, Sättigungsmenge). Damit ist
$$U(x) = (2,5 + 0,1x) \cdot (15000 - 1000x) = 37500 - 1000x - 100x^2.$$
$U(x)$ heißt **Zielfunktion**.
Die mathematische Aufgabe lautet: Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $U(x)$ auf dem Intervall $[-25, 15]$.
4. **Extremwerte berechnen:** Die Ableitungen sind $U'(x) = -1000-200x$ und $U''(x) = -200$. Die notwendige Bedingung für die Existenz einer Extremstele x_E lautet $U'(x) = 0$, also $0 = -1000 - 200x$. Damit ist $x_E = -5$. Die hinreichende Bedingung für ein Maximum ist $U''(x_E) < 0$. Auf den Intervallrändern ist $U(x) = 0$, daher ist $x_E = -5$ di Stelle des globalen Maximums auf dem Intervall.
5. **Berechnen aller geforderten Größen:** Man erhält einen Umsatz von $U(x_E) = 40000$ € . Der Preis pro Stück beträgt $P(x_E) = 2$ € und die abgesetzte Stückzahl pro Woche $M(x_E) = 20000$.
6. **Endergebnis und Interpretation:** Bei einem Preis von 2 € pro Stück werden wöchentlich 20000 Packungen Waschmittel verkauft und damit ein maximaler Umsatz von 40000 € erzielt.

Modell B: Gewinnmaximierung

1. **Hauptbedingung:** $G \to Max$; Gewinn = Erlös − Kosten; Gewinn = Umsatz − Kosten, also $G(x) = U(x) - K(x)$.

2. **Nebenbedingung:** Kosten (lineare Kostenfunktion). $K(x)$ = Fixkosten + Menge · variable Kosten, also $K(x) = K_{fix} + k_{var} \cdot M(x)$. Hier ist $K_{fix} = 24000$ und $k_{var} = 0,8$. Damit erhält man

$$K(x) = 24000 + 0,8 \cdot M(x) = 24000 + 0,8 \cdot (15000 - 1000x) = 36000 - 800x.$$

3. **Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung**: Man erhält

$$G(x) = U(x) - K(x) = (37500 - 1000x - 100x^2) - (36000 - 800x) = 1500 - 200x - 100x^2.$$

   $G(x)$ heißt **Zielfunktion.** Die mathematische Aufgabe lautet: Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $G(x)$.

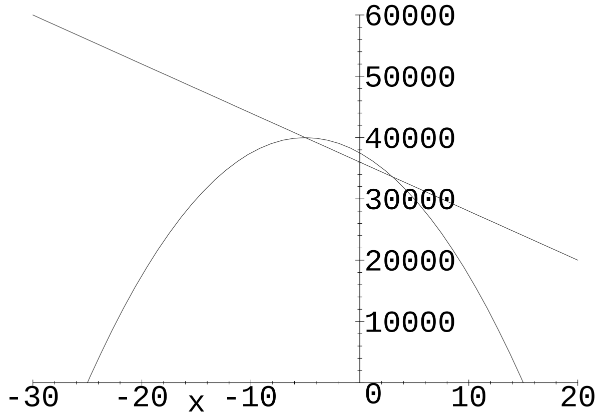
4. **Extremwerte berechnen:** Die Ableitungen sind $G'(x) = -200 - 200x$ und $G''(x) = -200$. Die notwendige Bedingung für die Existenz einer Extremstele x_E lautet $G'(x) = 0$, also $0 = -200 - 200x$. Damit ist $x_E = -1$. Die hinreichende Bedingung für ein Maximum ist $G''(x_E) < 0$.

5. **Berechnen aller geforderten Größen:** Man erhält einen Gewinn von $U(x_E) = 1600$ € . Der Preis pro Stück beträgt $P(x_E) = 2,40$ € und die abgesetzte Stückzahl pro Woche $M(x_E) = 16000$.

6. **Endergebnis und Interpretation:** Bei einem Preis von 2,40 € pro Stück werden wöchentlich 16000 Packungen Waschmittel verkauft und damit ein maximaler Gewinn von 1600 € erzielt.

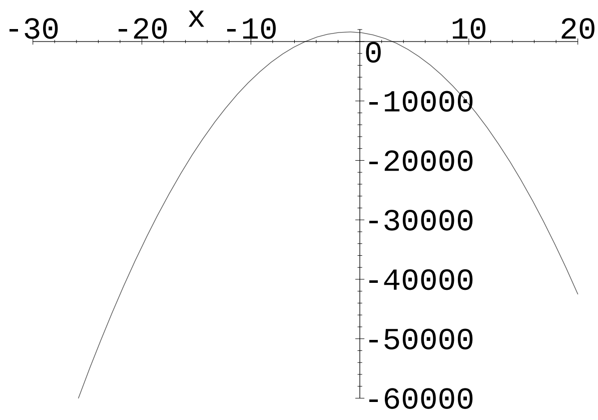
Modelllösungen mit MAPLE

Umsatzmaximierung

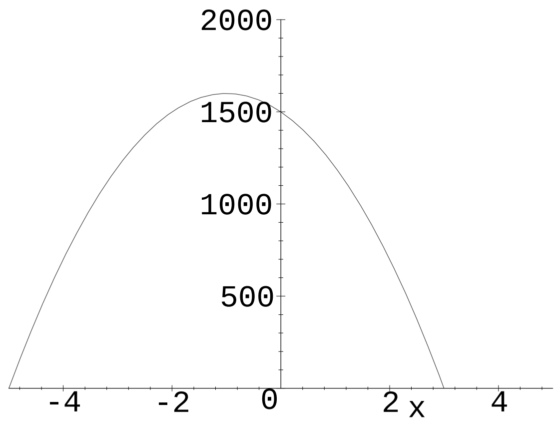


Die lineare Kurve ist $K(x) = 36000 - 800x$ und die Parabel $U(x) = 37500 - 1000x - 100x^2$

Gewinnmaximierung



$G(x) = 1500 - 200x - 100x^2$



$G(x)$ mit anderer Achseneinteilung

Literaturverzeichnis

[1] Förster, F., Kuhlmay, P.: *„The Box“ - Ein Computerspiel hilft beim Verständnis von Modellbildungsprozessen.* In: Förster, F., Henn, H.-W., Meyer, J. (Hrsg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht.* Band 6 Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe. Hildesheim: Franzbecker, 2000, S. 188-198.

[2] OECD - Deutsches PISA-Konsortium: *Schülerleistungen im internationalen Vergleich: Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten.* Berlin, 2000, Max-Planck-Institut für Bildungsforschung. (www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/Rahmenkonzeptiondt.pdf)

[3] Henning, H., Keune, M.: *Modellbildung und Tabellenkalkulation.* In: Mathematik in der Schule 38, Heft 3. Berlin, 2000, Pädagogischer Zeitschriftenverlag. S. 160-169.

[4] Henning, H., Keune, M.: *Diskrete Modellbildung und Tabellenkalkulation.* In: Der Mathematikunterricht 47, Heft 3, 2001, S. 28-37.

[5] Henning, H., Keune, M.: *Modelling and Spreadsheet Calculation.* In: Vakalis, I., Hallett, D. H., Kourouniotis, C., Quinney, D., Tzanakis, C. (Eds.): *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level),* Hersonissos, Wiley, 2002. ID114 CD-Rom.

[6] Heymann, H. W.: *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim, Basel, Beltz, 1996.

[7] Ikeda, T., Stephens, M.: *The effects of students' discussion in mathematical modelling.* In: Matos, J. F., Blum, W., Houston, S. K., Carreira, S. P. (Eds.): *Modelling and Mathematics Education.* Chichester, Horwood, 2001, S. 381-390.

[8] Ikeda, T., Stephens, M.: *Comparing an Analytical Approach and a Constructive Approach to Modelling.* In: Lamon, S. J., Parker, W. A., Houston, K. (Eds.): *Mathematical Modelling: A Way of Life ICTMA 11. Chichester*, Hoorwood, 2003, S. 201-211.

[9] International Commission on Mathematical Instruction [ICMI] (o. J.). ICMI Study 14: Application and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. (o. O.)

[10] Jablonka, E.: *Meta-Analyse von Zugängen zur Mathematischen Modellbildung und Konsequenzen für den Unterricht.* Berlin, 1996, transparent.

[11] Keune, M.: *Problemlösen mit Tabellenkalkulation.* In: Mathematische Unterrichtspraxis, Heft 3/III. Quartal, 2000, S. 33-37.

[12] Keune, M.: *Modelling and spreadsheet calculation.* In: Ye, Qi-Xiao, Blum,W., Houston, K., Jiang, Qi-Yuan. (Eds.): *Mathematical Modelling in Education and Culture*: ICTMA 10. Chichester: Horwood, 2003, S. 101-110.

[13] Lamon, S. J.: *Mathematical Modelling and the Way the Mind Works*. In: Houston, S. K., Blum, W., Huntley, I. and Neill, N. T. (Eds.): *Teaching and Learning Mathematical Modelling*. Chichester, Albion Publishing, 1997, S. 23-37.

[14] Lamon, S. J., Parker, W. A., Houston, K. (Eds.): *Mathematical Modelling*. A Way of Life ICTMA 11. Chichester, Hoorwood, 2003.

[15] Schupp, H.: *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen*. Der Mathematikunterricht, 34 (6), 1988, S. 5 - 16.

[16] Klieme, E. (Koordination) et al.: *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards - Eine Expertise. Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF).* Frankfurt a. M., 2003, (www.dipf.de/aktuelles/expertise_bildungsstandards.pdf)

[17] Niss, M.: *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project*, 2003, (www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical-Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf)

[18] OECD: *The PISA 2003 Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. 2003, (www.pisa.oecd.org)

[19] Borneleit, P. et. al.: *Ergebnisse zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe*. In: Ternoth, H.-E. (Hrsg.): *Kerncurriculum Oberstufe*, Beltz, 2001, p. 26-53