Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik III, WS 2003/04

Serie 3 (Reihen, Konvergenzkriterien, Potenzreihen, Fourierreihen)

23. Gegeben sind die geometrischen Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$. Bestimmen Sie jeweils den prozentualen Fehler von s, wenn s näherungsweise durch die Teilsumme s_{10} ersetzt wird.

24. Wie groß muß n mindestens gewählt werden, damit sich der Grenzwert s der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$ von der Teilsumme s_n um weniger als $\varepsilon = 10^{-4}$ unterscheidet?

25. Man untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

    a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2k+1}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+4}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

    d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$ e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^3}{2^k}$ f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{9k+1}}$

26. Ermitteln Sie für folgende Potenzreihen das Konvergenzintervall und das Konvergenzverhalten auf seinen Randpunkten:

    a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$

    c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{4x^k}{10^{\sqrt{k}}}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{(2k-1)2^k}$

    e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k+1)} (x-1)^k$

27. Man entwickle $f(x) = \ln(2+x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

28. Benutzen Sie die Reihenentwicklung, um den Näherungswert (3 Dezimale genau) von $\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$ zu bestimmen.

29. Man skizziere die Graphen der periodischen Funktionen $[f(x+2k\pi) = f(x)$ mit $k = \pm 1, \pm 2, \ldots]$ und entwickle diese Funktionen in Fourier-Reihen:

    a) $f(x) = \frac{x}{2}$ für $-\pi \le x < \pi$

    b) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \le x \le \pi$ und $f(-x) = f(x)$

    c) $f(x) = x^2$ für $0 < x \le 2\pi$