Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zu Mathematik I für Ingenieure, WS 2004/5
Serie 1, Ungleichungen, Komplexe Zahlen

1. Geben Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen an:

   a) $3 - 2x > x - 9$ b) $(x-3)(x+5) < 0$ c) $5x - x^2 \geq 0$

   d) $\dfrac{2x-1}{x+2} < 0$ e) $\dfrac{5-x}{2+x} > 3$ f) $x - 4 \leq \dfrac{9}{x+4}$

   g) $1 - \lg(2x+7) > 0$ h) $\sin 2x \cdot \cos x \leq 0$.

2. Zwei Widerstände werden parallel- bzw. hintereinandergeschaltet. Für den Gesamtwiderstand gilt $\dfrac{1}{R_P} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ bzw. $R_H = R_1 + R_2$.
   Zeigen Sie, dass die Ungleichung $R_H \geq 4R_P$ gilt !

3. Gesucht sind die Lösungsmengen für:

   a) $|x| \geq 5$ *b*) $|x-5| \leq 2$ *c*) $x^2 - 5 = 4|x|$

   d) $\dfrac{2x}{|x-1|} > 1$ *e*) $\dfrac{x^2}{x-2} < |x+1| - 1$ *f*) $|3-x| > 17 - |2x+7|$
   .

4. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen:

   a) $y = |x| + 2$ *b*) $y = |2x+1|$ *c*) $y = |x| + |x-2|$

   d) $y = |(x-2)(x+4)|$ *e*)$y = 1 + |\sin 2x|$ *f*) $y = |\ln(x-2)|$!

5. Für welche x gilt die Ungleichung

   $$\frac{3x^2+2}{x-3} + 1 < 3x \quad ?$$

6. Für welche Punkte der (x, y) - Ebene gilt (Skizze !):
   a) $(x+3)y > 2$

   b) $|x \cdot y| = 1$

   c) $|y + 2x| \leq 1$

   d) $|x+2| + |y-1| \leq 1$?

7. Gegeben sind $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 3 - 5i$.
   Berechnen Sie: $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \overline{z}_2 \cdot z_1, z_2 \cdot \overline{z}_2, |z_2|$.
   Deuten Sie $|z_1 - z_2|$ geometrisch.

8. Man bestimme den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Zahlen:

   a) $z = \dfrac{3}{2+i}$ b) $z = \dfrac{3+2i}{1+i}$

   c) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$ d) $z = \dfrac{(5+i)(2-3i)+2i^5}{(2+3i)^2-(4+i^7)}$.

9. Für welche Punkte $z = x + iy$ der Gaußschen Zahlenebene gilt:

   a) $|z| = 2,$ *b)* $|z| > 3$ *c)* $|z - 3i| < 1$

   d) $|z - (3+2i)| = 1$ *e)* $2 \leq |z-1| \leq 4$?

   Skizzieren Sie die jeweiligen Lösungsmengen im Kartesischen Koordinatensystem (x, y).

10. Für welche Punkte $z = x + iy$ der Gaußschen Zahlenebene gilt:

    (a) $z \cdot \overline{z} = 4$;

    (b) $|z| - Re(z) = 4$;

    (c) $Re(z^2) = 4$!

    Skizzieren Sie die jeweiligen Lösungsmengen im Kartesischen Koordinatensystem (x, y).

11. Geben Sie $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = 1 - \sqrt{3}\, i$ in der trigonometrischen und exponentiellen Form an berechnen Sie dann z_1^4 und z_2^5 !

12. Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) \quad \text{und} \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i\,.$$

    Berechnen Sie $w = z_1 : z_2, \quad w^4$ und $\sqrt[3]{z_2}$!

13. Lösen Sie folgende Gleichungen:

    a) $z^2 - 6z + 13 = 0$ b) $z^3 - 8 = 0$

    c) $z^4 = \sqrt{3}\, i - 1$ d) $(1-i)z^3 - 8i = 0$

    e) $z^2 - 2iz + 8 = 0.$

14. Finden Sie die Gleichungen, die nur die angegebenen Lösungen besitzen:

    a) $z_1 = 2 + 3i\,;\ z_2 = 2 - 3i$ *b)* $z_1 = -2\,;\ z_2 = 3i\,;\ z_3 = -3i$.