Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zu Mathematik I für Ingenieure, WS 2004/05
Serie 2, Determinanten, Matrizen

Die Aufgaben finden Sie auch auf meiner Homepage:
http://www.math.uni-magdeburg.de/∼christop/ unter Lehre.

Noch drei schöne Mathematikbücher für Ingenieure:
1a.) v. Finkenstein, Lehn, Schellhaas, Wegmann: *Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure* Band 1 (Analysis und lineare Algebra),Teubner-Verlag 2003 (ersch. neu im Nov.2004 für 28.90 Euro)
1b) ... ...Band 2 (Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Numerik und Stochastik) Teubner-Verlag 2004 (34.90 Euro).
2. Richter, W.: Ingenieurmathematik kompakt, Vieweg (39.90 Euro) z.Z. nicht lieferbar, schade
3a. Henze, N. und Last, G.: Mathematik fr Wirtschaftsingenieure Band 1 (Grundlagen, Analysis, Stochastik, Lineare Gleichungssysteme) 2003. 422 S. Online Service, Vieweg Verlag 2003. Der Titel ist lieferbar. EUR 29,90
3b)... ... Mathematik für Wirtschaftsingenieure und für naturwissenschaftlich-technische Studiengänge Band 2 (Analysis im IR^n, Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik) Vieweg 2004. 466 S. Online-Service EUR: 29,90 (ersch. Nov. 2004)

15. Berechnen Sie:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{e)} \begin{vmatrix} 2a & 2a & -2a \\ a & -a & a \\ 3a & -3a & -3a \end{vmatrix} \qquad \text{f)} \begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ a+1 & a-1 & a \\ a-1 & a & a+1 \end{vmatrix} \quad !$$

16. Für welche reellen Werte von x gilt:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2+2x & 0 & 4 \\ 1 & 2-x & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 1-x & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad ?$$

17. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen:

$$a) \quad f(x) = \begin{vmatrix} \ln x & \ln(x+2) \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad b) \quad f(x) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2+2e^x & 0 & 4 \\ 1 & 2-e^x & 0 \end{vmatrix} \quad !$$

18. Berechnen Sie möglichst geschickt folgende Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & -10 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$!

19. Welche Kurven werden durch folgende Gleichungen erfasst?

a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 13 & -2 & 3 & 1 \\ 53 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

20. Stellen Sie mit Hilfe einer Determinante die Gleichung der Geraden auf, die durch die Punkte $P_1(-2;3)$ und $P_2(1;5)$ geht!

21. Welche geometrische Deutung besitzt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 26 & 5 & -1 & 1 \\ 50 & -1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ?$$

22. Für welche Werte x, y und z gilt die Matrizengleichung

$$3\begin{bmatrix} x & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & z \\ 14 & 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

23. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie, sofern die Ausdrücke erklärt sind:

$A + B \quad ; \quad A + 2C \quad ; \quad A \cdot B \quad ; \quad B \cdot A \quad ; \quad C \cdot A \quad ; \quad (A + C) \cdot B$!

24. Bilden Sie die Produkte AB und BA , wenn

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben sind !

25. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Bestätigen Sie die Gültigkeit der Regel

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

26. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$a)$ $\begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$ $\quad$ $b)$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$c)$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ $d)$ $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

27. Bestimmen Sie, falls sie existieren, die inversen Matrizen zu

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad$ $b)$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$c)$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad$ $d)$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$!

28. Für welche Matrizen X und Y gilt $AX = B$ bzw. $YA = B$, wenn

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad ?$$

29. Schreiben Sie das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} b_1 & = & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ b_2 & = & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ b_3 & = & 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 \end{array}$$

als Matrizengleichung und ermitteln Sie den Lösungsvektor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad !$$

30. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & a \\ 6 & a & -27 \end{bmatrix}$

   a) Für welche a existiert A^{-1} nicht ?

   b) Ermitteln Sie für $a = 0$ die inverse Matrix !

31. Man bestimme den Rang folgender Matrizen:

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 12 & 18 \\ 5 & -17 & 26 & 39 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad b) \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

32. Wie ist a zu wählen, damit die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix} \text{ den Rang 2 hat?}$$

33. Bestimmen Sie die Matrix X aus den Gleichungen:

   a) $AXB = C$ b) $ABCX = D$

   c) $AX + EX = A$ d) $XA - XC = B + 4X$

   e) $2(XA + XB) = 2X + C$

34. Lösen Sie die Matrizengleichungen:

$$a) \quad AX - B = BX + 2X \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$b) \quad 3X - XC = X(C - D) + 2(D + X)$$

$$\text{für} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad !$$

35. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 9x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

   a) mit Hilfe einer inversen Matrix ;
   b) mit Hilfe der Cramerschen Regel;
   c) mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus!