Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zu Mathematik I für Ingenieure, WS 2004/05
Serie 4, Vektorrechnung, Geraden, Ebenen und Kurven im Raum

Hinweis: Der **Übungsschein zur Vorlesung Mathematik I für Ingenieure** als Voraussetzung für die Klausur Mathematik I/II für Ingenieure kann durch das Bestehen der Übungsscheinklausur am

Dienstag, den 22.03.2005 von 13.00 bis 16.00 Uhr

erworben werden. Die Klausur findet in den Hörsäalen H1, H2, H3 und H4 statt. Eine Zuordnung erfolgt Ende Januar. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner (wird nicht unbedingt benötigt) und ein A4-Blatt mit *handgeschriebenen* Formeln, Aussagen, oder Beispielen. Als Mathematiker möchte ich betonen, dass die *Hand* von den *handgeschriebenen Formeln* zu der Person gehören muss, die den Übungsschein erwerben will.

Die Aufgaben finden Sie auch auf meiner Homepage:
http://www.math.uni-magdeburg.de/∼christop/ unter Lehre.

61. Zu den Vektoren $\vec{a} = [1, -2, 3]$ und $\vec{b} = [2, 3, 1]$ bestimme man zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$, für die gilt: $\vec{x} || \vec{b}, \vec{y} \perp \vec{b}$ und $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$.

62. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{u} = [1, 1, 1]\,, \quad \vec{v} = [2, -1, \lambda] \quad \text{und} \quad \vec{w} = [\mu, 3, -2] \quad .$$

    Ermitteln Sie:

    a) $\lambda > 0$ so, dass das von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt $\sqrt{54}$ besitzt,
    b) μ so, dass $\vec{w} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$,
    c) einen Vektor, der den $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ halbiert.

63. Für das Gleichungssystem mit drei Unbekannten
$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$
bzw. in Vektorschreibweise $\overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c}z = \overline{d}$ ist mit Hilfe der Vektorrechnung die Cramersche Regel herzuleiten.

64. Liegen die vier Punkte
$A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$, $D(5, 0, -6)$
in einer Ebene ?

65. Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte $P_1(2,3,0)$ und $P_2(4,0,3)$ geht ! Wo durchstößt diese Gerade die yz-Ebene ? Welchen Abstand hat der Nullpunkt von dieser Geraden ?

66. Man bestimme a und b so, dass der Punkt $P_1(5,3,1)$ auf der Geraden $\vec{r} = (6+t)\vec{e_1} + (a+2t)\vec{e_2} + (4+bt)\vec{e_3}, -\infty < t < \infty$ liegt.

67. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S und den Schnittwinkel der Geraden

$$\vec{r_1} = [-7, \quad -8, \quad -9]^T + t_1[2, \quad 3, \quad 2]^T$$
$$\vec{r_2} = [-4, \quad 4, \quad 24]^T + t_2[-1, \quad 0, \quad 5]^T \quad !$$

68. Welche Ebene steht auf dem Vektor $\vec{a} = (1,2,1)$ senkrecht und geht durch den Punkt $P_1(2,4,3)$?

69. Die Ebene E_1 wird durch die Punkte $P_1(0,4,2)$, $P_2(-1,0,-8)$, $P_3(2,3,-5)$ bestimmt.

a) Bestimmen Sie die Gleichung von E_1 in Parameterform und in kartesischer Form!

b) Welchen Wert muss x_4 annehmen, damit der Punkt $P_4(x_4,2,-2)$ in E_1 liegt?

c) Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die auf E_1 senkrecht steht und durch P_4 geht!

d) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E_1 und der Ebene $E_2 : x + 3y - 2z + 2 = 0$!

70. Die Ebene E_1 hat die Gleichung $3x - 2y + 5z = 67$.

a) Von dem Punkt $P_0(5,2,-4)$ wird auf die Ebene E_1 das Lot gefällt. Welche Koordinaten hat der Fußpunkt des Lotes?

b) Welchen Abstand hat der Punkt P_0 von der Ebene E_1 ?

c) Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt P_0' des Punktes P_0 bezüglich der Ebene E_1 ?

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E_1 mit der Ebene E_2 , wenn E_2 die Gleichung $x + 2y + 2z = 1$ besitzt!

71. Zeigen Sie, dass es eine Gerade durch den Ursprung gibt, die zu den drei Ebenen $2x - y - z = 7$, $6x + y + 5z + 3 = 0$, $2x + 2y + 5z = 4$ parallel verläuft.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden !

72. Von der Ebene E ist bekannt, dass sie die Punkte $P_1(1,2,3)$ und $P_2(3,2,1)$ enthält und dass sie senkrecht zur Ebene $4x-y+2z=7$ verläuft. Ermitteln Sie die Gleichung von E!

73. $P_1(3,2,2)$ und $P_1'(1,6,6)$ seien Spiegelpunkte bezüglich einer Ebene E. Man bestimme deren Gleichung.

74. Skizzieren Sie die Graphen folgender Vektorfunktionen in einem rechtwinklig kartesischen Koordinatensystem!

    (a) $\vec{x}(t) = (1+t)\vec{e}_1 + (2+t)\vec{e}_2\ ,\ 0 \le t < \infty\ ;$

    (b) $\vec{x}(t) = (x(t), y(t)) = (t, 4t^2)\ ;\ 0 \le t < \infty\ ;$

    (c) $\vec{x}(t) = (3 + 2\cos t, 5 + 2\sin t)\ ,\ 0 \le t < 2\pi\ ;$

    (d) $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t + \cos^2 t)\ ,\ 0 \le t < 2\pi$!

75. Welche Kurven werden durch folgende Parameterdarstellungen erfaßt?

    (a) $\vec{r}(t) = (2+t, 3+2t, 4+3t)\ ,\ 0 \le t \le 2\ ;$

    (b) $\vec{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0, 2t)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi\ .$

76. φ und r seien die Polarkoordinaten eines Punktes im $\mathbb{R}^2$. Welche Kurven werden durch folgende Gleichungen erfaßt?

    (a) $r = 2\cos\varphi\ ,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ ,$ (b) $r = 2\varphi\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,$

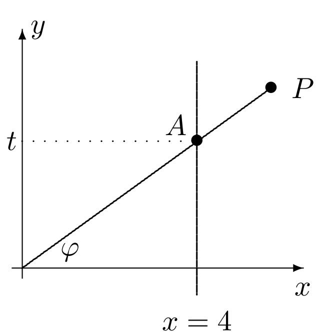
    (c) $r = \dfrac{6}{\sin\varphi}\ ,\ 0 < \varphi < \pi\ .$

77. Geben Sie folgende Kurven in Polarkoordinaten an!

    (a) $x^2 + y^2 = 9$ (b) $x^2 + (y-2)^2 = 4$

    (c) $y = x$ (d) $y = 2x + 1$

78. Gegeben sei die Gerade $x = 4$. Ein beliebiger Strahl $0A$ schneidet diese Gerade in A. Auf diesem Strahl wird ein Punkt P durch $\overline{AP} = 2$ Längeneinheiten bestimmt (siehe Skizze!). Welche Kurve beschreibt der Punkt P , wenn φ variabel ist? $\left[\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right)\right]$. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Kurve! Wählen Sie φ oder t als Parameter!



79. Man skizziere folgende in Polarkoordinaten gegebenen Mengen in einem kartesischen Koordinatensystem.

(a) $B_1 = \{(r, \varphi) \in I\!R^2 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,,\ 0 \leq r \leq \varphi\}$,

(b) $B_2 = \left\{(r, \varphi) \in I\!R^2 : 2 < r < 4\,,\ \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}\right\}$,

(c) $B_3 = \left\{(r, \varphi) \in I\!R^2 : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq 2\cos\varphi\right\}$.

80. Welche Menge $B \in\ I\!R^3$ wird durch folgende Ungleichungen beschrieben?

(a) $3 \leq x \leq 4$ und $1 \leq y \leq 2$ und $0 \leq z \leq 2x$;

(b) $2 \leq r \leq 4$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{4}$ (Kugelkoordinaten).

81. Berechnen Sie für die folgenden, in kartesischen Koordinaten gegebenen Punkte des $I\!R^3$ die zugehörigen Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten!

(a) $P_1 = (1; 1; \sqrt{2})$ (b) $P_2 = (1; 0; 1)$

(c) $P_3 = (-4; 3; -5)$ (d) $P_3 = (-4; 0; 0)$

82. Beschreiben Sie die Menge aller Punkte des $I\!R^3$, für die gilt:

(a) $x = 2$, (b) $z = -2$, (c) $x + y = 2$,

(d) $r = 4$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$ (Zylinderkoordinaten),

(e) $r = 6$ und $\varphi = 0$ (Kugelkoordinaten),

(f) $r = 6$ und $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$ (Kugelkoordinaten),

(g) $\Theta = \frac{\pi}{4}$ (Kugelkoordinaten)!