Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Aufgaben zur Vorlesung Mathematik III für Ingenieure, WS2005/06
(5. Serie, Funktionen mehrerer Variabler, Gradient, Rotation, Divergenz)

148. Man bestimme und skizziere den größtmöglichen Definitionsbereich folgender Funktionen:

a) $z = \sqrt{4x+y} + \sqrt{4x-y}\,,$ b) $z = \ln(x^2+y-1)\,,$

c) $z = \dfrac{2}{\sqrt{\ln(5-x^2-y^2)}}\,,$ d) $z = \arcsin(5-2y+2x)\,,$

e) $z = \ln[2x\,\ln(y-x)]\,.$

149. Skizzieren Sie die durch Hauptschnitte entstehenden Kurven für die Flächen:

a) $z = \sqrt{9-x^2-y^2}\,,$ b) $z = 1+\sqrt{x^2+y^2}\,,$

c) $z = \sqrt{36-9x^2-4y^2}\,,$ d) $z = xe^y\,.$

150. Skizzieren Sie von den folgenden Funktionen einige Höhenlinien

a) $z = 2x+y\,,$ b) $z = y(1+x^2)$ bzw. c) $z = (4-x^2)e^y\,.$

151. Welche Flächen 2. Ordnung sind durch folgende Gleichungen gegeben?

a) $9x^2+4y^2 = 36\,,$ b) $z^2-4x^2+y^2 = 1\,,$

c) $36x^2+16y^2+9z^2 = 144\,,$ d) $y^2 = x^2+z^2\,,$

e) $16z = 4x^2+y^2\,,$ f) $x^2 = 4y\,.$

152. Wie lautet die Gleichung der Fläche, die entsteht, wenn die Kurve mit der Gleichung $z = \ln x$ um die z-Achse rotiert?

153. Berechnen Sie: a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2ye^{4x}-xe^{2y}}{3x+2y}\right),$

b) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ye^{4x}-xe^{2y}}{3x+2y}\right)$ und c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}\dfrac{\sqrt{xy+16}-4}{2xy}$!

154. Für die folgenden Funktionen sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung allgemein und an der Stelle (x_0,y_0) zu ermitteln. Man bestimme jeweils den Gradienten $\nabla z(x_0,y_0)$ in (x_0,y_0).

a) $z = x^2+2y^2\,;\ (x_0,y_0) = (2,1)\,,$ b) $z = \ln\dfrac{2x+4y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\,;\ (1,1)\,,$

c) $z = 2y+xe^{2xy}\,;\ (1,0)\,,$ d) $z = \arctan\dfrac{y}{2x}\,;\ (1,2)\,,$

e) $z = 3x^y+y^x+4\,;\ (1,1)\,.$

Einige Bemerkungen zur Vektoranalysis:

Es seien $f(x,y,z)$ eine skalare Funktion und $\mathbf{F}(x,y,z) = (\, F_1(x,y,z)\,,\; F_2(x,y,z)\,,\; F_3(x,y,z)\,)$ ein (dreidimensionales) Vektorfeld jeweils der drei Variablen x, y, z.

a) $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\,,\; \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\,,\; \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right)$
definiert ein Vektorfeld, das Gradientenfeld (∇ ist der *Nabla*-Operator).

b) Der *Laplace*-Operator $\triangle$ einer skalaren Funktion $f(x,y,z)$ ist wieder ein Skalar (Summe der 2. partiellen Ableitungen):
$\triangle f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}\,.$

c) Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (F_1\,,\; F_2\,,\; F_3)$ ist eine skalare Funktion und definiert die *Quelldichte* des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ (Summe der 1. partiellen Ableitungen der Komponenten von $\mathbf{F}$):
$\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}\,.$

d) Die *Rotation* eines Vektorfeldes $\mathbf{F} = (\, F_1(x,y,z)\,,\; F_2(x,y,z)\,,\; F_3(x,y,z)\,)$ ist ein Vektorfeld, rot$\mathbf{F}$ erklärt die *Wirbeldichte* im Vektorfeld $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\,,\; \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\,,\; \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Beachte: rot$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ mit formal $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\; \frac{\partial}{\partial y}\,,\; \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Die Rotation rot $\mathbf{F}$ eines Vektorfeldes ist nur in $I\!R^3$ erklärt. Der Gradient grad $f = \nabla f$ und der Laplace-Operator $\triangle f$ für eine skalare Funktion f sowie die Divergenz div $\mathbf{F}$ eines Vektorfeldes $\mathbf{F}$ sind für beliebig viele Variable definiert.

155. Es sei $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (ze^{2x}, xe^{-y}, zy^2)^T$ ein Vektorfeld. Man bestimme rot $\mathbf{F}$, div $\mathbf{F}$ und grad (div $\mathbf{F}$).

156. Gegeben sind die Skalarfunktion $U(x,y,z) = x^2y + yz + 2xz^2$ und das Vektorfeld $\mathbf{F}[x,y,z) = (xe^{-y}, zy^2, ze^{2x})$. Ermitteln Sie:

a) $\operatorname{grad} U$,	b) $\operatorname{div} \mathbf{F}$,	c) $\operatorname{rot} \mathbf{F}$,
d) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$,	e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$,	f) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U)$.

157. Ist das Vektorfeld $\mathbf{v} = (\, v_1\,,\; v_2\,,\; v_3\,) = (x^2 - y^2\,,\; z^2 - xy\,,\; -xz)$ quellenfrei?

158. Gegeben sind das Vektorfeld $\mathbf{v} = (\, v_1\,,\; v_2\,,\; v_3\,) = (x^2\,,\; -y\,z^2\,/\,x\,,\; x\,z)$ und das Skalarfeld $U(x,y,z) = 4x^2 + 6y^2 + z^2$. Berechnen Sie für den Punkt $A = (1\,,\, -2\,,\, 4)$ die Komponente des Vektorfeldes rot $\mathbf{v}$ in Richtung des größten Anstieges der Ortsfunktion $U(x,y,z)$!