Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik III für Ingenieure
(6. Serie)

159. Zeigen Sie, dass $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ für folgende Funktionen gilt:

a) $z = \sqrt{y + 2x}$ und b) $z = \ln \dfrac{2x+3y}{2x-3y}$.

160. Zeigen Sie, dass $u = 2\cos^2(x - t/2)$ die DGL $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$ erfüllt.

161. Man bestimme die Konstante c derart, dass die Ebene $z = 2$ Tangentialebene der Fläche $z = f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 10x + 2y + c$ ist.

162. Stellen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen für die Flächen

a) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ im Punkt $P_0(1, 3, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$;

b) $xyz = 8$ im Punkt $P_0(1, 2, 4)$;

c) $x^3 + 2y - \ln z = 3$ im Punkt $P_0(1, 1, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$ auf!

Geben Sie jeweils die Gleichungen der Normalen an!

163. Bilden Sie die totalen Differentiale von

a) $z = 2\arctan(y/x)$, b) $z = \ln \dfrac{e^{y+3x}}{(1 + x^2 + y^2)^3}$, c) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$!

164. Man ermittle die totalen Differentiale erster Ordnung von:

a) $z = \sin(x^2 + y^2)$ b) $z = \sqrt{x - y} + \ln \sqrt{xy}$.

165. Für die Funktion $z = 4\ln(y / x^2)$ vergleiche man im Punkt $P(1/2, 2)$ die Differenz der Funktionswerte $\triangle z$ mit dem Wert des totalen Differentials dz und berechne $|\triangle z - dz|$ falls gilt:

a) $dx = dy = 0.5$, b) $dx = -0.1$, $dy = 0.3$, c) $dx = 0.02$, $dy = 0.16$.

166. Prüfen Sie, ob die Gleichungen exakte Differentialgleichungen darstellen und bestimme gegebenenfalls eine zugehörige Funktion $z = u(x, y)$.

a) $(2x + 2xy^4)dx + (4y^3x^2 + 3y^2)dy = 0$, b) $x \sin y \, dx + x^2 \cos y \, dy = 0$

c) $\left(2xy - \dfrac{1}{y^2}\right) dx + \left(x^2 + \dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{y}{y^2+1}\right) dy$ d) $2ydx - 2xdy = 0$

e) Hoffentlich haben Sie in d) erhalten, dass es sich bei dem Ausdruck $2ydx - 2xdy$ um kein totales Differential handelt. Versuchen Sie es nun mit

$(2ydx - 2xdy)(x+y)^{-2} = 0.$

Sie merken, dass der Ausdruck in d), multipliziert mit dem *integrierenden Faktor* $\lambda(x,y) = (x+y)^{-2}$, eine exakte Differentialgleichung ergibt.

f) $\left(2xy + 3x^2 + \dfrac{y}{1+xy}\right) dx + \left(x^2 + 2y + 4 + \dfrac{x}{1+xy}\right) dy\,.$

167. Zur Bestimmung der Brennweite f eines Kugelspiegels werden Gegenstandsweite $a = (12 \pm 0.1)$ cm und Bildweite $b = (5 \pm 0.05)$ cm gemessen. Welcher absolute und welcher relative Fehler ergibt sich für die Brennweite?
Es gilt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

168. Mit welchem absoluten und relativen Fehler muss man bei der Ermittlung des Volumens eines geraden Kegelstumpfes rechnen, wenn der Grundkreisradius $r_1 = 5$ cm, der Deckkreisradius $r_2 = 4$ cm und die Höhe $h = 6$ cm gemessen und alle Größen mit einem absoluten Fehler von höchstens 0.1 cm abgelesen wurden.

169. Man bestimme die relativen Extrema von

a) $z = 2xy(x+y-6)$ b) $z = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$

c) $u = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ d) $z = f(x,y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$!

e) $z = f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$!

170. Bestimmen Sie die absoluten Extrema über dem gegebenen Bereich:

a) $f(x,y) = x \cdot y - y^2$ über dem Quadrat $0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1\,.$

b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ über dem Kreisring mit $x^2 + y^2 = 0.5\,,\ x^2 + y^2 = 2\,.$

171. Man bestimme den kürzesten Abstand des Punktes $P_0(2\,,\ 2\sqrt{7}\,,\ 0.5)$ vom Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$.

172. Gegeben sind die fünf Meßwertpaare

$$(1\,,\ 3.1), (2\,,\ 1.4), (3\,,\ 1.3), (4\,,\ 1.15), (5\,,\ 1.05)\ .$$

Man ermittle mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die Ausgleichsfunktion $f(x) = a\,x^{-2} + b$.

173. Für eine Kennziffer seien die in der Tabelle gegebenen Werte bekannt:

Jahr	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Wert der Kennziffer	4305	4421	4539	4662	4785	4906	5018

Ermitteln Sie die Parameter a und b der linearen Trendfunktion $f(x) = a + b\,x$! Welche Werte der Kennziffer sind danach für 2005 und 2006 zu erwarten?