Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik III für Ingenieure, WS 2005/06

(7. Serie)

174. Berechnen Sie folgende Doppelintegrale! Skizzieren Sie den Integrationsbereich! Deuten Sie die Ergebnisse geometrisch!

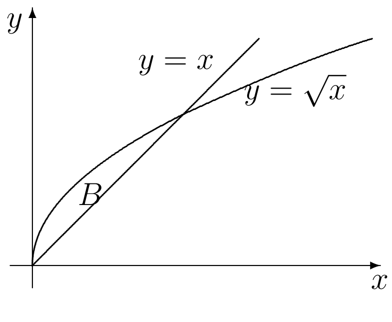
a) $\int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=x}^{2x} (2x+4y+10)\,dy\,dx$ b) $\int\limits_{y=1}^{2} \int\limits_{x=1/y}^{2/y} dx\,dy$

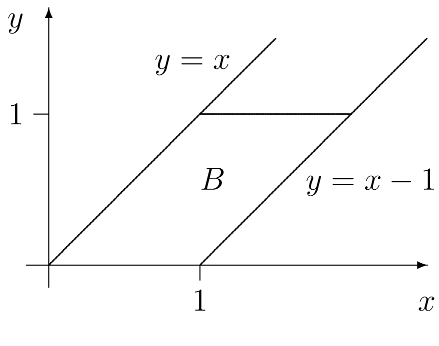
175. Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge!

a) $\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$ b) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=(1-x^2)/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

176. Man berechne folgende Doppelintegrale über den angegebenen Gebieten B.

a) $I = \iint\limits_{B} x \cdot \frac{e^y}{y^2}\,dx\,dy$ *b)* $\iint\limits_{B} (y^2+2x+1)\,dx\,dy$





177. Berechnen Sie

a) $\int\limits_{x=2}^{4} \int\limits_{y=1}^{x} dydx$; b) $\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=y}^{1} (x^2+y^2+1)dxdy$

c) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x^2}{1+y^2}\,dydx$; d) $\int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} xye^{-x^2-y^2}dxdy\,!$

Skizzieren Sie jeweils den Integrationsbereich!

178. Berechnen Sie mit Hilfe von Doppelintegralen den Inhalt der Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

$$a)\ \begin{aligned} y &= ex^2 \\ y &= e^x \\ x &= 0 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 4y &= x^2 - 4x \\ x - y - 3 &= 0 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} y &= \ln x \\ y &= x - 1 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

179. Ermitteln Sie den geometrischen Schwerpunkt des Halbkreises

$\{(x, y) : y \geq 0\,; \quad x^2 + y^2 \leq r^2\}$!

180. Bestimmen Sie mit Hilfe von Doppelintegralen den Inhalt der Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

a) $y = x - 2 \quad$ und $\quad y^2 = x\,;$

b) $xy = 4 \quad$ und $\quad y = 5 - x$!

181. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der von folgenden Flächen begrenzt wird!

a) $z = 0\,; \quad z = \dfrac{4}{1 + x^2 + y^2}\,; \quad y = \sqrt{1 - x^2} \quad$ und $\quad y = 0;$

b) $z = 0 \quad$ und $\quad z = e^{-x^2 - y^2}$!

182. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes der von den Kurven $y = x - 3 \quad$ und $\quad 4y - x^2 + 4x = 0$ eingeschlossenen Fläche!

183. Bestimmen Sie die Masse des Körpers, der durch die Flächen $x = a\,; \quad 2x + z = 2a\,; \quad x + z = a\,; \quad y = \sqrt{ax}\,; \quad y = 0$ begrenzt wird, wenn die Dichte in jedem Punkt gleich der Ordinate y dieses Punktes ist!

184. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten

a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy \qquad$ b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{4 + 3x^2 + 3y^2}$!

185. Bestimmen Sie das Doppelintegral über dem Kreisringsegment D :

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\,dxdy\,, \quad D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\,,\ y \geq x/\sqrt{3}\,,\ y \leq \sqrt{3}\,x\}.$$

186. Man berechne den Flächeninhalt der Oberfläche S für

$$S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}\,.$$

Skizzieren Sie S.

187. Sei $B = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\ x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$. Man berechne den Schwerpunkt von B ($\rho = \text{const}$). Skizzieren Sie B.

188. Man ermittle

$$I = \iiint\limits_B f(x, y, z)\, dxdydz\,,$$

falls

$$B = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq x\,,\ 0 \leq z \leq x\}$$

und $f(x, y, z) = xyz$. Skizzieren Sie B.

189. Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$I = \int\limits_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dS$$

der Oberfläche $S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ x^2 + y^2 \leq z^2\,,\ z \geq 0\}$ bezüglich der z-Achse, wenn $\rho(x, y, z) = 1$ gilt. Skizzieren Sie S und die Projektion von S in die (x, y)-Ebene.

190. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int\limits_{A(0,1)}^{B(1,0)} (x\sqrt{y}dx + y^2dy)$$

längs der Wege

a) $y = 1 - x^2$
b) Gerade AB !
c) Streckenzug ABC mit $C(1, 1)$ (jeweils achsenparallel)!

191. In dem Kraftfeld $\vec{F} = (2x - \frac{1}{2}y + 3)\vec{e_1} + (\frac{1}{2}x + 3y)\vec{e_2}$ wird eine Masse von $P(-2, 0)$ nach $Q(0, 2)$ transportiert.
Man berechne die Arbeit bei folgenden Wegen
a) Strecke $\overline{PQ}$;
b) Viertelkreis mit dem Mittelpunkt $M(0, 0)$.

192. Im Kraftfeld $\vec{F} = \left[\frac{x}{x^2 + y^2}\,, \frac{y}{x^2 + y^2}\,, 1\right]^T$ wird eine Masse längs des Weges $\vec{r}(t) = \left[\cos t, \sin t, \frac{2}{\pi}t\right]^T$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ transportiert. Berechnen Sie die Arbeit.

193. Sind die Integranden folgender Kurvenintegrale totale Differentiale einer Funktion Φ? Wenn ja, berechne man nach Bestimmung von Φ die Integrale.

a) $\int((x^2+y)dx+(x-y^2)dy)$ längs der Wege

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$

(2) geradlinig von $(1,1)$ nach $(a,a)\,,$

(3) $\vec{r}(t)=[2\cos 3t, 4\sin 3t]^T$ mit $0\le t\le 2\pi\,.$

b) $\int(xe^y dx-ye^x dy)$ längs der Wege

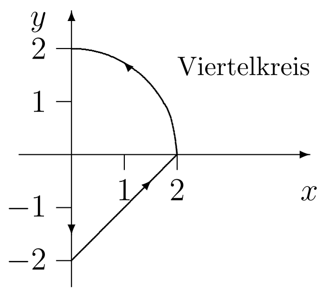
(1) geradlinig von $(0,1)$ nach $(1,0)\,,$

(2) Viertelkreis von $(0,1)$ nach $(1,0)\,.$

194. Ermitteln Sie den Wert des Kurvenintegrals

$$\oint((x^2+y^2+x)dx+(x^2+y^2+2)dy)$$

längs des skizzierten Weges!



195. Berechnen Sie unter Verwendung eines Doppelintegrals das Kurvenintegral $\oint\left(\frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}\right)$ längs des Umfangs des Dreiecks ABC mit $A(1\,,\,1), B(2\,,\,1)$ und $C(2\,,\,2)$!

196. Bestimmen Sie die Fläche der Astroide $x=2\cos^3 t\ ,\ y=2\sin^3 t$ mit Hilfe eines Kurvenintegrals!

197. Gegeben ist $\vec{F}(x,y)=(12x^2+cxy+2ye^{2xy})\vec{e}_1+(8x^2+2xe^{2xy}+10y+3)\vec{e}_2\,.$

a) Für welchen Wert c ist das Kurvenintegral $\int_A^E \vec{F}\cdot\vec{dr}$ vom Wege unabhängig?

b) Bestimmen Sie die Kräftefunktionen $\Phi(x\,,\,y)$, wenn $d\Phi=\vec{F}\cdot\vec{dr}$!