Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Stochastik für Ingenieure, SoSe 2005

Übungsaufgaben befinden sich auch auf meiner Homepage
http://www.math.uni-magdeburg.de/˜christop/lehre.htm

Die Aufgaben aus der **Starthilfe Stochastik** mit Lösungen finden Sie unter
http://www.math.uni-magdeburg.de/home/christoph/

Serie 2, Aufgaben 18 - 37: Klassische Wkt., bedingte Wtk., totale Wkt. Bayessche Formel, Unabhängigkeit von Ereignissen, Zufallsgrößen, Verteilungsfunktion

18. (in Vorlesung behandelt) *Werfen von zwei unterscheidbaren Würfeln:* Petra und Paula würfeln. Für die Versuchsbeschreibung wird der Grundraum Ω mit den Elementarereignissen $A_{i,j} = (i, j) = \{$*Petras Würfel zeigt i, Paulas Würfel zeigt j.*$\}$ für $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ gewählt. Wie viele und welche Ereignisse enthält der Grundraum Ω ?.
    Die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse sind zu berechnen:

    $B = \{i < j\} = \{$*Petras Zahl ist kleiner als Paulas Zahl.*$\}$,
    $C = \{i = j\} = \{$*Beide Würfel zeigen dieselbe Zahl.*$\}$,
    $U_k = \{i + j = k\} = \{$*Die Summe beider Zahlen ist k.*$\}$ für $k = 2, 3, \ldots, 12$ und $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

19. *Geburtstagsproblem:* Meist ist man sehr überrascht, wenn z. B. auf einer Party das Ereignis $A = \{$*In einer Gruppe von* 30 *Personen haben mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag.*$\}$ eintritt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

20. *Die Frage des Chevalier de Méré.* Betrachtet werden zwei Glücksspiele:
    a) Mit einem idealen Würfel wird 4-mal gewürfelt und gewettet, dass mindestens eine Sechs erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?
    b) Mit zwei unterscheidbaren idealen Würfeln wird 24-mal gewürfelt und gewettet, dass mindestens eine Doppelsechs erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit jetzt?
    Chevalier de Méré war ein leidenschaftlicher Glücksspieler. Seiner Meinung nach müssten die Gewinnchancen in beiden Glücksspielen identisch sein. Da es im zweiten Spiel 6-mal mehr Elementarereignisse als im ersten Spiel gibt, muss man auch $6 \cdot 4 = 24$ Würfe für mindestens eine Doppelsechs erlauben. In der Spielpraxis war aber das erste Spiel erfolgreicher. Der Chevalier empfand das als einen großen Skandal und wandte sich an den französischen Mathematiker Blaise Pascal (1623 - 1662), der sich dann in einem Brief über de Méré äußerte : *„... dieser hat wohl Geist, aber er ist nicht Mathematiker, und das ist, wie Sie wissen, ein großer Mangel...“.*

21. (Selbststudium, Starthilfe Aufgabe 19)
Zufälliger Versuch: Gleichzeitiges Werfen von 3 unterscheidbaren idealen Würfeln. Hat das Ergebnis „Augensumme 9“ oder das Ergebnis „Augensumme 10“ die größere Wahrscheinlichkeit?

22. (Selbststudium, Starthilfe Aufgabe 20)
In einer Serie von 12 Produkten sind 4 defekte.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei zwei aufeinanderfolgenden Zügen 2 brauchbare Produkte erhält, wenn man
a) das zuerst gezogene Produkt beiseite legt,
b) das zuerst gezogene Produkt zurücklegt?

23. Ein (innen weißer) Würfel ist an allen Seitenflächen schwarz angestrichen. Der Würfel wird in 1000 kleine Würfel einheitlicher Größe zerlegt. Diese 1000 Würfel werden intensiv durchgemischt. Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, dass ein zufällig entnommener kleiner Würfel
a) genau eine schwarze Seitenfläche hat,
b) genau zwei schwarze Seitenflächen hat,
c) genau drei schwarze Seitenflächen hat,
d) völlig weiß ist.

24. (Sehr ähnlich zu Aufgabe 27 in Starthilfe)
Zwei Werke sind zu 60% bzw. 40% an der Gesamtproduktion eines bestimmten Typs von Bauelementen beteiligt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauelement mindestens 2000h funktionstüchtig bleibt, ist für die Bauelemente aus dem 1. Werk 0.9 und für die Bauelemente aus dem 2. Werk 0.8. Ein zufällig beobachtetes Bauelement fiel nach 1960h aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Bauelement aus dem zweiten Werk stammt?

25. (Selbststudium, Starthilfe Aufgabe 24)
In einem Behälter liegen 10 Maschinenteile, davon sind 4 nicht normgerecht. Berechnen Sie $P(B) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, wenn A_i bedeutet, dass das i-te ausgewählte Stück normgerecht ist ($i = 1, 2, 3$) und die ausgewählten Stücke nicht zurückgelegt werden!

26. In drei Urnen A, B, C befinden sich rote, weiße und grüne Kugeln.

Urne	Anzahl rote Kugeln	Anzahl weiße Kugeln	Anzahl grüne Kugeln
A	3	4	1
B	1	2	3
C	4	3	2

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Kugel aus einer beliebigen Urne weiß?

27. An einem Schießstand kann man 4 Gewehre ausleihen. Die Trefferwahrscheinlichkeiten dieser 4 Gewehre sind $0,6; 0,7; 0,8$ und $0,9$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einziger Schuß ein Treffer ist, wenn der Schütze zufällig eines der Gewehre wählt!

28. Bei der Herstellung eines Gerätetyps werden entweder Bauelemente 1. oder 2. Wahl verwendet, die äußerlich nicht zu unterscheiden sind. 80% der verarbeiteten Bauelemente gehören zur 1. Wahl; der Rest zur 2. Wahl. Bei Verwendung der Bauelemente 1. Wahl haben 90% der produzierten Geräte die geforderten Eigenschaften, bei Verwendung der Bauelemente 2. Wahl nur 70%.

    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiges der Gesamtproduktion entnommenes Gerät die geforderten Eigenschaften besitzt?
    b) Die Prüfung eines Gerätes ergibt, dass es nicht die geforderten Eigenschaften hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält es Bauelemente 2. Wahl?

29. Zwei Schützen schießen unter denselben Bedingungen gleichzeitig auf eine Scheibe. Schütze A hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von $0,8$. Schütze B hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von $0,7$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Scheibe getroffen?

30. (Selbststudium, Starthilfe Aufgabe 26) *Zuverlässigkeitsersatzschaltung*
    Berechnen Sie für das Ereignis S aus Aufgabe 11 die Wahrscheinlichkeit $P(S)$, wenn die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i) = p_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ gegeben sind und die Ereignisse A_i unabhängig sind!

31. Eine komplexe Anlage besteht aus $n = 300$ Teilsystemen (Schaltkreisen). Es wird angenommen, dass die Anlage nicht mehr funktionstüchtig ist, wenn auch nur ein Teilsystem ausfällt. Ferner wird vorausgesetzt, dass alle Teilsysteme unabhängig voneinander ausfallen.

    a) Die Ausfallwahrscheinlichkeit sei für alle Teilsysteme $p = 0,005$. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anlage ausfällt?
    b) Wie groß muß die für alle Teilsysteme gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit sein, wenn für die Anlage eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $0,2$ zulässig ist?

32. (Selbststudium, Starthilfe Aufgabe 28)
    Es sei bekannt, dass 96% der hergestellten Produkte eines Betriebes normgerecht sind. Eine Qualitätskontrolle erklärt ein normgerechtes Teil mit der Wahrscheinlichkeit von 0.98 und ein nicht normgerechtes Teil mit der Wahrscheinlichkeit von 0.05 als tauglich.
    Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein von der Kontrolle als tauglich erklärtes Produkt normgerecht ist!

33. Die Zufallsgröße X nehme die Werte $0, 1, 2, 3, 4$ mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,25	0,5	0,05	0,1

Geben Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X an (Skizze)! Berechnen Sie $P(X > 1,5)$, $P(X < 4)$, $P(-1 < X \leq 2)$!

34. Zwei unabhängig voneinander arbeitende Anlagen sind mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0,8$ bzw. $p_2 = 0,9$ intakt (bezogen auf einen festen Zeitpunkt T). X sei die zufällige Anzahl der intakten Anlagen zur Zeit T. Man ermittle

    a) die Einzelwahrscheinlichkeiten von X (Skizze),
    b) die Verteilungsfunktion von X (Skizze).

35. Gegeben ist die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < t < 0 \\ 0,1 & \text{für} \quad 0 \leq t < 2 \\ 0,4 & \text{für} \quad 2 \leq t < 4 \\ 0,8 & \text{für} \quad 4 \leq t < 6 \\ 1 & \text{für} \quad 6 \leq t < \infty \end{cases}$$

Berechnen Sie
a) $P(1 \leq X < 4)$ b) $P(1 \leq X \leq 4)$ c) $P(X \geq 2)$ d) $E(X)$.

36. (Selbststudium, Starthilfe Aufgabe 29)
Für eine Firma werden drei Maschinen gekauft. Diese haben unterschiedliche Qualitätseigenschaften. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese länger als 4000 Stunden ausfallfrei arbeiten, betragen jeweils 0.8, 0.7, 0.6. X sei die Anzahl der Maschinen, die länger als 4000 Stunden ausfallfrei arbeiten. Bestimmen Sie

    (a) die Verteilungstabelle von X,
    (b) die Verteilungsfunktion und ihren Graphen,
    (c) $P(X \geq 1)$!

37. Die Intaktwahrscheinlichkeiten, bezogen auf die Zeit t, betragen für 2 unabhängig voneinander arbeitende Anlagen $0,9$ bzw. $0,8$. X sei die zufällige Anzahl der in der Zeit t intakten Anlagen. Ermitteln Sie:
a) die Verteilungstabelle von X,
b) die Verteilungsfunktion $F_X(t)$,
c) $E(X)$ und $D^2(X)$,
d) die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit t wenigstens eine Anlage intakt ist.