Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

## Übungsaufgaben zu Mathematik I für Ingenieure, WS 2006/07
## Serie 2, Determinanten, Matrizen

Die Aufgaben finden Sie auch auf meiner Homepage:
http://www.math.uni-magdeburg.de/∼christop/ unter Lehre.

15. Berechnen Sie:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2a & 2a & -2a \\ a & -a & a \\ 3a & -3a & -3a \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a-1 \\ a+1 & a-1 & a \\ a-1 & a & a+1 \end{vmatrix}$ !

16. Für welche reellen Werte von $x$ gilt:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2+2x & 0 & 4 \\ 1 & 2-x & 0 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 1-x & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ ?

17. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen:

*a)* $f(x) = \begin{vmatrix} \ln x & \ln(x+2) \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ *b)* $f(x) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2+2e^x & 0 & 4 \\ 1 & 2-e^x & 0 \end{vmatrix}$ !

18. Berechnen Sie möglichst geschickt folgende Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & -10 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ !

19. Welche Kurven werden durch folgende Gleichungen erfasst?

a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 13 & -2 & 3 & 1 \\ 53 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

20. Stellen Sie mit Hilfe einer Determinante die Gleichung der Geraden auf, die durch die Punkte $P_1(-2;3)$ und $P_2(1;5)$ geht!

21. Welche geometrische Deutung besitzt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 26 & 5 & -1 & 1 \\ 50 & -1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ?$$

22. Für welche Werte $x, y$ und $z$ gilt die Matrizengleichung

$$3\begin{bmatrix} x & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & z \\ 14 & 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

23. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie, sofern die Ausdrücke erklärt sind:

$$A + B \quad ; \quad A + 2C \quad ; \quad A \cdot B \quad ; \quad B \cdot A \quad ; \quad C \cdot A \quad ; \quad (A + C) \cdot B \quad !$$

24. Bilden Sie die Produkte $AB$ und $BA$ , wenn

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ gegeben sind !}$$

25. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Bestätigen Sie die Gültigkeit der Regel

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

26. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$a)$ $\begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$ $\quad$ $b)$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$c)$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ $d)$ $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

27. Bestimmen Sie, falls sie existieren, die inversen Matrizen zu

$$a)\quad A=\begin{bmatrix}2&3\\1&5\end{bmatrix}\qquad\qquad b)\quad B=\begin{bmatrix}1&2&4\\1&3&2\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$c)\quad C=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&5\\3&3&8\end{bmatrix}\qquad\qquad d)\quad D=\begin{bmatrix}1&2&4&8\\0&1&2&4\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad !$$

28. Für welche Matrizen $X$ und $Y$ gilt $AX=B$ bzw. $YA=B$, wenn

$$A=\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}\quad \text{und}\quad B=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\quad ?$$

29. Schreiben Sie das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} b_1&=&x_1&-&2x_2&+&x_3\\ b_2&=&2x_1&-&x_2&+&x_3\\ b_3&=&3x_1&-&x_2&+&x_3\end{array}$$

als Matrizengleichung und ermitteln Sie den Lösungsvektor

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\quad !$$

30. Gegeben ist die Matrix $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\4&5&a\\6&a&-27\end{bmatrix}$

a) Für welche $a$ existiert $A^{-1}$ nicht ?

b) Ermitteln Sie für $a=0$ die inverse Matrix !

31. Man bestimme den Rang folgender Matrizen:

$$a)\quad A=\begin{bmatrix}2&-6&12&18\\5&-17&26&39\\1&-5&2&3\end{bmatrix}\qquad b)\quad B=\begin{bmatrix}2&1&4&3&1\\1&2&2&0&-5\\1&-1&2&3&2\\1&1&2&1&0\end{bmatrix}$$

32. Wie ist $a$ zu wählen, damit die Matrix

$A=\begin{bmatrix}a&1&-1\\1&a&1\\-1&1&a\end{bmatrix}$ den Rang 2 hat?

33. Bestimmen Sie die Matrix $X$ aus den Gleichungen:

a) $AXB = C$ b) $ABCX = D$

c) $AX + EX = A$ d) $XA - XC = B + 4X$

e) $2(XA + XB) = 2X + C$

34. Lösen Sie die Matrizengleichungen:

$a)$ $AX - B = BX + 2X$ mit $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ;

$b)$ $3X - XC = X(C - D) + 2(D + X)$

für $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ !

35. Bestimmen Sie, falls sie existieren, die inversen Matrizen zu

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ !