Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zu Mathematik I für Ingenieure, WS 2006/07
Serie 4, Vektorrechnung, Geraden, Ebenen und Kurven im Raum

Die Aufgaben finden Sie auch auf meiner Homepage:
http://www.math.uni-magdeburg.de/~christop/ unter Lehre.

61. Zu den Vektoren $\vec{a} = [1, -2, 3]$ und $\vec{b} = [2, 3, 1]$ bestimme man zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$, für die gilt: $\vec{x}||\vec{b}, \vec{y} \perp \vec{b}$ und $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$.

62. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{u} = [1, 1, 1]\,, \quad \vec{v} = [2, -1, \lambda] \quad \text{und} \quad \vec{w} = [\mu, 3, -2] \quad .$$

Ermitteln Sie:

a) $\lambda > 0$ so, dass das von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt $\sqrt{54}$ besitzt,

b) μ so, dass $\vec{w} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$,

c) einen Vektor, der den $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ halbiert.

63. Für das Gleichungssystem mit drei Unbekannten
$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$
bzw. in Vektorschreibweise $\overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c}z = \overline{d}$ ist mit Hilfe der Vektorrechnung die Cramersche Regel herzuleiten.

64. Liegen die vier Punkte
$A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$, $D(5, 0, -6)$ in einer Ebene ?

65. Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte $P_1(2, 3, 0)$ und $P_2(4, 0, 3)$ geht ! Wo durchstößt diese Gerade die yz-Ebene ? Welchen Abstand hat der Nullpunkt von dieser Geraden ?

66. Man bestimme a und b so, dass der Punkt $P_1(5, 3, 1)$ auf der Geraden $\vec{r} = (6 + t)\vec{e_1} + (a + 2t)\vec{e_2} + (4 + bt)\vec{e_3}, -\infty < t < \infty$ liegt.

67. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S und den Schnittwinkel der Geraden

$\vec{r_1} = [-7, \quad -8, \quad -9]^T + t_1[2, \quad 3, \quad 2]^T$

$\vec{r_2} = [-4, \quad 4, \quad 24]^T + t_2[-1, \quad 0, \quad 5]^T$!

68. Welche Ebene steht auf dem Vektor $\vec{a} = (1, 2, 1)$ senkrecht und geht durch den Punkt $P_1(2, 4, 3)$?

69. Die Ebene E_1 wird durch die Punkte $P_1(0,4,2)$, $P_2(-1,0,-8)$, $P_3(2,3,-5)$ bestimmt.

a) Bestimmen Sie die Gleichung von E_1 in Parameterform und in kartesischer Form!

b) Welchen Wert muss x_4 annehmen, damit der Punkt $P_4(x_4,2,-2)$ in E_1 liegt?

c) Geben Sie die Gleichung der Geraden an, die auf E_1 senkrecht steht und durch P_4 geht!

d) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E_1 und der Ebene $E_2 : x + 3y - 2z + 2 = 0$!

70. Die Ebene E_1 hat die Gleichung $3x - 2y + 5z = 67$.
a) Von dem Punkt $P_0(5,2,-4)$ wird auf die Ebene E_1 das Lot gefällt. Welche Koordinaten hat der Fußpunkt des Lotes? b) Welchen Abstand hat der Punkt P_0 von der Ebene E_1 ?
c) Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt P_0' des Punktes P_0 bezüglich der Ebene E_1 ?
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E_1 mit der Ebene E_2 , wenn E_2 die Gleichung $x + 2y + 2z = 1$ besitzt!

71. Zeigen Sie, dass es eine Gerade durch den Ursprung gibt, die zu den drei Ebenen $2x - y - z = 7$, $6x + y + 5z + 3 = 0$, $2x + 2y + 5z = 4$ parallel verläuft. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden !

72. Von der Ebene E ist bekannt, dass sie die Punkte $P_1(1,2,3)$ und $P_2(3,2,1)$ enthält und dass sie senkrecht zur Ebene $4x-y+2z = 7$ verläuft. Ermitteln Sie die Gleichung von E!

73. $P_1(3,2,2)$ und $P_1'(1,6,6)$ seien Spiegelpunkte bezüglich einer Ebene E. Man bestimme deren Gleichung.

74. Skizzieren Sie die Graphen folgender Vektorfunktionen in einem rechtwinklig kartesischen Koordinatensystem!

(a) $\vec{x}(t) = (1+t)\vec{e}_1 + (2+t)\vec{e}_2$, $0 \le t < \infty$;

(b) $\vec{x}(t) = (x(t), y(t)) = (t, 4t^2)$; $0 \le t < \infty$;

(c) $\vec{x}(t) = (3 + 2\cos t, 5 + 2\sin t)$, $0 \le t < 2\pi$;

(d) $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t + \cos^2 t)$, $0 \le t < 2\pi$!

75. Welche Kurven werden durch folgende Parameterdarstellungen erfaßt?

(a) $\vec{r}(t) = (2+t, 3+2t, 4+3t)$, $0 \le t \le 2$;

(b) $\vec{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0, 2t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

76. φ und r seien die Polarkoordinaten eines Punktes im $\mathbb{R}^2$. Welche Kurven werden durch folgende Gleichungen erfaßt?

(a) $r = 2\cos\varphi\,,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,,$ (b) $r = 2\varphi\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,$

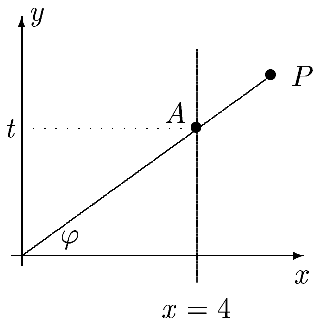
(c) $r = \dfrac{6}{\sin\varphi}\,,\ 0 < \varphi < \pi\,.$

77. Geben Sie folgende Kurven in Polarkoordinaten an!

(a) $x^2 + y^2 = 9$ (b) $x^2 + (y-2)^2 = 4$

(c) $y = x$ (d) $y = 2x + 1$

78. Gegeben sei die Gerade $x = 4$. Ein beliebiger Strahl $0A$ schneidet diese Gerade in A. Auf diesem Strahl wird ein Punkt P durch $\overline{AP} = 2$ Längeneinheiten bestimmt (siehe Skizze!). Welche Kurve beschreibt der Punkt P, wenn $\varphi \in (-\pi\,/\,2\,,\,\pi\,/\,2)$ variabel ist? Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Kurve! Wählen Sie φ oder t als Parameter!



79. Man skizziere folgende in Polarkoordinaten gegebenen Mengen in einem kartesischen Koordinatensystem.

(a) $B_1 = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le r \le \varphi\},$

(b) $B_2 = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 2 < r < 4\,,\ \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}\right\},$

(c) $B_3 = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \le r \le 2\cos\varphi\right\}.$

80. Welche Menge $B \in \mathbb{R}^3$ wird durch folgende Ungleichungen beschrieben?

(a) $3 \le x \le 4$ und $1 \le y \le 2$ und $0 \le z \le 2x\,;$

(b) $2 \le r \le 4$ und $0 \le \varphi < 2\pi$ und $0 \le \Theta \le \frac{\pi}{4}$ (Kugelkoordinaten).

81. Berechnen Sie für die folgenden, in kartesischen Koordinaten gegebenen Punkte des $\mathbb{R}^3$ die zugehörigen Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten!

(a) $P_1 = (1; 1; \sqrt{2})$ (b) $P_2 = (1; 0; 1)$

(c) $P_3 = (-4; 3; -5)$ (d) $P_3 = (-4; 0; 0)$

82. Beschreiben Sie die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^3$, für die gilt:

(a) $x = 2$, (b) $z = -2$, (c) $x + y = 2$,

(d) $r = 4$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$ (Zylinderkoordinaten),

(e) $r = 6$ und $\varphi = 0$ (Kugelkoordinaten),

(f) $r = 6$ und $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$ (Kugelkoordinaten),

(g) $\Theta = \frac{\pi}{4}$ (Kugelkoordinaten)!