Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. G. Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Stochastik für Ingenieure, SoSe 2006

Serie 3 (Zufallsgrößen, Verteilungsfunktion, spezielle Verteilungen)
Einige und ähnliche Aufgaben zu den hier aufgeführten finden Sie (mit Lösungen) als Aufgaben zu meiner Starthilfe Stochastik auf meiner Homepage
http://www.math.uni-magdeburg.de/home/christoph/

38. (Selbststudium, Aufgabe 34 zur Starthilfe)
X sei eine diskrete Zufallsgröße mit dem Wertebereich $\{x_1, x_2\}$, $(x_1 < x_2)$.
Bestimmen Sie für den Fall $x_1 = 1$, $P(X = 1) = 0.6$ und $D^2(X) = 0.24$
a) die Verteilungstabelle von X,   b) $P(2 \leq X \leq 10)$!
c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(t)$!

39. (Selbststudium, Aufgabe 35 zur Starthilfe)
Die unabhängigen Zufallsgrößen X und Y haben die Kennwerte $E(X) = 12$, $D^2(X) = 0.2$, $E(Y) = 20$, $D^2(Y) = 0.3$.
Ermitteln Sie: $E(X+Y)$, $D^2(X+Y)$, $D^2(X-Y)$, $E(3X+2Y)$, $D^2(2X+1)$ und $D^2(3X+2Y)$!

40. (Selbststudium, Aufgabe 36 zur Starthilfe)
Ein Glücksrad bestehe aus drei gleichgroßen Sektoren, die durch die Zahlen 1, 2 und 3 gekennzeichnet sind. Das Rad wird dreimal gedreht. X_i beschreibe die abgelesene Zahl bei der i-ten Drehung $(i = 1, 2, 3)$. Die X_i sind also unabhängige Zufallsgrößen.
a) Ermitteln Sie die Verteilungstabelle von $Y = \sum_{i=1}^{3} X_i$!
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 5)$!
c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y!

41. Bei einem Test elektronischer Bauelemente wird eine Serie von n unabhängigen Einzelversuchen gefahren. A sei das Ergebnis, dass ein Bauelement ausfällt; die Ausfallwahrscheinlichkeit sei $P(A) = p$. Das Auftreten von genau $X = k$ Ereignissen A im Versuchsprotokoll ist ein zufälliges Ereignis. Ermitteln Sie die Verteilungstabelle für die Zufallsgröße X. Um welche Verteilung handelt es sich?
Für $n = 8$ und $p = 0,3$ stelle man die Einzelwahrscheinlichkeiten p_i in Abhängigkeit von $X = k$ und die Verteilungsfunktion graphisch dar.

42. Durch jahrelange Beobachtungen stellte man fest, dass von 1000 Neugeborenen im Mittel 515 Knaben und 485 Mädchen sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Familie mit 6 Kindern
a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, oder 6 Mädchen?   b) nicht mehr als 2 Mädchen?
c) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion!

43. Ein Prüfer hat 18 Standardfragen, von denen er in jeder Prüfung 6 zufällig auswählt. Ein Kandidat kennt die richtigen Antworten von nur 10 Fragen, die übrigen kann er nicht beantworten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Prüfung besteht, wenn er dazu mindestens 3 Fragen richtig beantworten muß?

44. In einer Urne befinden sich 3 rote, 2 blaue und 4 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander 3 Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es 3 rote Kugeln, wenn

    a) mit Zurücklegen b) ohne Zurücklegen die Kugeln entnommen werden.

45. Eine Menge von Erzeugnissen enthält 10% defekte Erzeugnisse. Es wird eine Stichprobe vom Umfang 3 entnommen. Die Anzahl der Erzeugnisse ist gegenüber 3 sehr groß, so dass praktisch kein Unterschied zwischen ,,Ziehen mit Zurücklegen" und ,,Ziehen ohne Zurücklegen" besteht. Die Zufallsgröße X zähle die Anzahl der defekten Erzeugnisse in der Stichprobe.
    a) Geben Sie die Verteilungstabelle für X an!
    b) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$!
    c) Ermitteln Sie die Varianz $D^2(X)$!
    d) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(t)$!

46. Ein Betrieb erhält regelmäßig Lieferungen, die aus jeweils $N = 100$ Erzeugnissen bestehen. Aus statistischen Unterlagen geht hervor, dass die Zahl der in einer Lieferung enthaltenen Ausschußstücke eine Zufallsgröße ist, die angenähert einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 2$ und $p = 0,1$ entspricht. Einer Lieferung mit unbekanntem Ausschußanteil werden willkürlich $m = 10$ Qualitätskontrollproben ohne Zurücklegen entnommen. Die gesamte Lieferung wird nur dann angenommen, wenn alle $m = 10$ Erzeugnisse qualitätsgerecht sind

    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lieferung $k = 0, 1, 2$ Ausschußstücke enthält?
    b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lieferung angenommen wird!
    c) Wieviel Sendungen muss der Betrieb durchschnittlich erhalten, damit insgesamt ein Ausschußstück erwartet werden kann?

47. Bei einem Serienartikel sind durchschnittlich 5% fehlerhaft. Aus einem großen Lieferposten wird eine Stichprobe vom Umfang 4 ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Stichprobe mindestens ein fehlerhaftes Stück ist? Wieviel Entnahmen (von je 4 Stück) muß man durchschnittlich vornehmen, um ein fehlerhaftes Stück unter den entnommenen Stücken zu haben?

48. Eine biologische Kreuzung gelingt nur in 5% aller angesetzten Versuche. Wieviel Versuche sind anzusetzen, damit mit 99% Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal die Kreuzung gelingt?

49. Für die Anzahl der Zugriffe auf einen Zentralrechner (innerhalb einer Minute) gelten folgende Modellannahmen: Es gebe 1000 Terminals, jedes greife unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit 0,002 (in jeder Minute) einmal zu. Mehrfache Zugriffe eines Terminals innerhalb einer Minute werden als unwahrscheinlich vernachlässigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute
a) genau zwei b) mindestens zwei
Zugriffe erfolgen? Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zuerst mit Hilfe der exakten Verteilung der Anzahl der Zugriffe (Binomialverteilung) und anschließend mit Hilfe des Grenzwertsatzes von Poisson.

50. Eine Facharbeiterin in einer Textilfabrik bedient 800 Spindeln. Die Wahrscheinlichkeit für das Reißen des Fadens auf jeder Spindel während eines Zeitintervalls T sei 0,005. Man ermittle die wahrscheinlichste Anzahl der Fadenrisse während dieses Zeitintervalls T! Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Fadenrisse während des Zeitintervalls T. Da der Fadenriss ein seltenes Ereignis sein sollte, kann man von einer Poisson-verteilten Zufallsgröße X ausgehen. Man vergleiche die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$! Für welchen Wert von k nimmt die Wahrscheinlichkeit den größten Wert an?

51. Es sei $F_X(t)$ die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X mit

$$F_X(t) = a + b \arctan t, \qquad -\infty < t < \infty$$

   a) Man ermittle die Konstanten a und b!

   b) Wie lautet die Dichtefunktion von X?

52. (Selbststudium, Aufgabe 31 zur Starthilfe)
Für welchen Wert a ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 2 \\ ax^{-4} & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Dichtefunktion einer Zufallsgröße X?. Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und skizzieren Sie den dazugehörigen Graphen!

53. Eine stetige Zufallsgröße X hat die Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \\ t^2/2 & \text{für} \quad 0 < t < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für} \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Ermitteln Sie die zugehörige Dichtefunktion $f_X(x)$!

b) Berechnen Sie $E(X), D^2(X), P(-1 < X < 1/2),\ P(X > 1)$!

54. Die Lebensdauer X (in Monaten) eines Bauelements bestimmter Art besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-0,5t} & \text{für} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass solch ein Bauelement länger als 2 Monate funktionstüchtig ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 4 solchen unabhängig voneinander arbeitenden Bauelementen

(i) genau zwei,

(ii wenigstens zwei

länger als 2 Monate funktionstüchtig sind?

c) Bestimmen Sie die Zeitdauer t so, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,1$ kein Ausfall in $[0, t]$ erfolgt.

55. Die Dauer eines Telefongesprächs (in Minuten) wird als exponentialverteilt zum Parameter $\lambda = 0,2$ angenommen. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass die Dauer eines Telefongesprächs

a) 5 Minuten nicht übersteigt,

b) zwischen 5 und 10 Minuten liegt,

c) 15 Minuten übersteigt.

Berechnen Sie noch die (bedingte!) Wahrscheinlichkeit, dass ein bereits 5 Minuten andauerndes Telefongespräch innerhalb der darauf folgenden 5 Minuten beendet wird.

56. Die Nutzungsdauer X Zeiteinheiten einer Art von Bauelementen sei exponentialverteilt. Die mittlere Nutzungsdauer wird mit 100 Zeiteinheiten angegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) ein Bauelement 10 Zeiteinheiten übersteht,

b) von 5 solchen Bauelementen genau zwei 10 Zeiteinheiten überstehen?

57. Die störungsfreie Arbeitszeit einer Anlage ist exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda = 0,1$. Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Zeit nicht kleiner als 3 Einheiten ist. Welche störungsfreie Arbeitszeit kann mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 garantiert werden?