Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Gerd Christoph

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik III für Ingenieure, WS 2007/08 (2. Serie)

14. Berechnen Sie folgende Doppelintegrale! Skizzieren Sie den Integrationsbereich! Deuten Sie die Ergebnisse geometrisch!

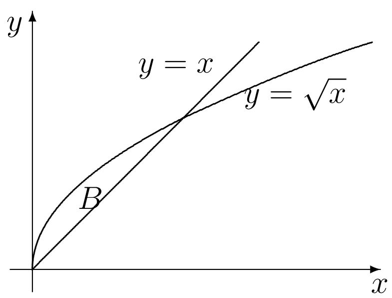
a) $\int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=x}^{2x} (2x + 4y + 10)dy\,dx$ b) $\int\limits_{y=1}^{2} \int\limits_{x=1/y}^{2/y} dx\,dy$

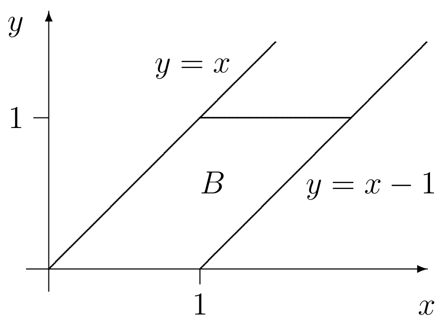
15. Skizzieren Sie den Integrationsbereich und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge!

a) $\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$ b) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=(1-x^2)/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\,dx$

16. Man berechne folgende Doppelintegrale über den angegebenen Gebieten B.

a) $I = \iint\limits_{B} x \cdot \frac{e^y}{y^2}\,dx\,dy$ b) $\iint\limits_{B} (y^2 + 2x + 1)\,dx\,dy$





17. Berechnen Sie

a) $\int\limits_{x=2}^{4} \int\limits_{y=1}^{x} dydx$; b) $\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=y}^{1} (x^2 + y^2 + 1)dxdy$

c) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} \frac{x^2}{1+y^2}\,dydx$; d) $\int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} xye^{-x^2-y^2}dxdy$!

Skizzieren Sie jeweils den Integrationsbereich!

18. Berechnen Sie mit Hilfe von Doppelintegralen den Inhalt der Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

a) $\begin{aligned} y &= ex^2 \\ y &= e^x \\ x &= 0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 4y &= x^2 - 4x \\ x - y - 3 &= 0 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} y &= \ln x \\ y &= x - 1 \\ y &= -1 \end{aligned}$

19. Ermitteln Sie den geometrischen Schwerpunkt des Halbkreises $\{(x, y) : y \geq 0 ; \quad x^2 + y^2 \leq r^2\}$!

20. Bestimmen Sie mit Hilfe von Doppelintegralen den Inhalt der Flächen, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

    a) $y = x - 2$ und $y^2 = x$;
    b) $xy = 4$ und $y = 5 - x$!

21. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der von folgenden Flächen begrenzt wird!

    a) $z = 0$; $z = \dfrac{4}{1 + x^2 + y^2}$; $y = \sqrt{1 - x^2}$ und $y = 0$;
    b) $z = 0$ und $z = e^{-x^2 - y^2}$!

22. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes der von den Kurven $y = x - 3$ und $4y - x^2 + 4x = 0$ eingeschlossenen Fläche!

23. Bestimmen Sie die Masse des Körpers, der durch die Flächen $x = a$; $2x + z = 2a$; $x + z = a$; $y = \sqrt{ax}$; $y = 0$ begrenzt wird, wenn die Dichte in jedem Punkt gleich der Ordinate y dieses Punktes ist!

24. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten

    a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy$ b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dxdy}{4 + 3x^2 + 3y^2}$!

25. Bestimmen Sie das Doppelintegral über dem Kreisringsegment D :

$$\iint\limits_D \arctan \frac{y}{x} \, dxdy \, , \quad D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \, , \; y \geq x/\sqrt{3} \, , \; y \leq \sqrt{3}\, x\}.$$

26. Man berechne den Flächeninhalt der Oberfläche S für

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0 \, ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \, .$$

Skizzieren Sie S.